505456

KRETZ

HIPPOLYTE

09/05/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 50456

Né(e) le 09/05/2005

Signature

Nom KRETZ

Prénom (s) HIPPOLYTE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/04

Numéro de table 085

Exercice 1

1. a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann car $2>1$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Or, par 1.a), $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument. Donc la série converge.

c) On a : $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(2n)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4} \times \frac{1}{n^2}$.

Or, par linéarité, $\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc par positivité et par critère de comparaison par équivalence, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

2.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

3. a) On a les formules suivantes valables $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (*)$

~~cos(α+β~~

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (**)$

En additionnant $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " $\forall t \in [0, \pi[$, $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ ".

Initialisation : Si $n = 1$, on a $\forall t \in [0, \pi[$, $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k \cos(kt) = -\cos(t)$

et $-\frac{1}{2} + (-1)^1 \frac{\cos\left(\frac{3}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{2} -$ cos

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $P(n+1)$ est vraie :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) = \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt) \right) + (-1)^{n+1} \cos((n+1)t)$$

$$= -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} + (-1)^n \cos((n+1)t) \text{ par } P(n)$$

$$= -\frac{1}{2} + (-1)^n \left(\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \cos((n+1)t) \right)$$

On a :

$$\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \cos((n+1)t) = \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos((n+1)t)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) - \cos\left(\frac{t}{2} + (n+1)t\right) - \cos\left(\frac{t}{2} - (n+1)t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) - \cos\left(\frac{2n+3}{2} t\right) - \cos\left(-\frac{(2n+1)}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Or, $\cos\left(-\frac{(2n+1)}{2} t\right) = \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)$ par la parité de cos, d'où :

$$\frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{-\cos\left(\frac{2n+3}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}. \text{ Donc :}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \left(\frac{-\cos\left(\frac{2n+3}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right) = -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \left(\frac{\cos\left(\frac{2(n+1)+1}{2} t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right)$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

4.a) f est C^1 sur $[a,b]$, donc f est continue sur $[a,b]$, qui est un fermé. Donc par le théorème des bornes, $\exists M_1 \in \mathbb{R}, \forall t \in [a,b], |f(t)| \leq M_1$.

f' est C^1 sur $[a,b]$, donc f' est continue sur $[a,b]$, et de même, $\exists M_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in [a,b], |f'(t)| \leq M_2$.

On note $M = \max(M_1, M_2)$. On a ainsi, $M_1 \leq M$ et $M_2 \leq M$, donc $\exists M \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq M$ et $|f'(t)| \leq M$.

b) Soit $t \in [a,b]$, on a par 4.a), $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

$0 \leq |f'(t) \sin(\lambda t)| \leq M |\sin(\lambda t)| \leq M$, ainsi :

$0 \leq \frac{1}{\lambda} |f'(t) \sin(\lambda t)| \leq \frac{M}{\lambda}$, donc par croissance de l'intégrale (qui converge car par produit, comme $t \mapsto |\sin(\lambda t)|$ est continue sur $[a,b]$, $t \mapsto \frac{1}{\lambda}|f'(t) \sin(\lambda t)|$ l'est aussi) avec les bornes dans le sens croissant ($a<b$ par l'énoncé), on a :

$0 \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t) \sin(\lambda t)| \, dt \leq \frac{M}{\lambda}$. Or, $\frac{M}{\lambda} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par le théorème d'encadrement, $\frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t) \sin(\lambda t)| \, dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) \, dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $t \mapsto f(t) \cos(\lambda t)$ est continue sur $[a,b]$ donc $\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) \, dt$ existe. On procède à une intégration par parties (IPP) : Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$,

On pose $\forall t \in [a,b]$, $u(t) = f(t)$ $\quad v'(t) = \cos(\lambda t)$

$u'(t) = f'(t)$ $\quad v(t) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)$

Numéro d'inscription 505456

Né(e) le 09/05/2005

Signature

Nom KRETZ

Prénom (s) HIPPOLYTE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/08

Numéro de table 085

u et v sont C^1 sur $[a,b]$, ainsi :

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = \left[\frac{1}{\lambda}f(t)\sin(\lambda t)\right]_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)\right) - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt.$$

On a :

$f(b)\dfrac{\sin(\lambda b)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ car $\lambda \mapsto \sin(\lambda b)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

De même, $f(a)\dfrac{\sin(\lambda a)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, par passage à la limite licite dans l'égalité ci-dessus, on a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,dt = 0 \text{ par } (4.b).$$

5. a) $\forall t \in]0,\pi]$, ~~sin~~ $0 < \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. Sin est strictement croissante de $]0,\frac{\pi}{2}]$ vers $]0,1]$, ainsi, $0 < \sin(\frac{t}{2}) \leq 1$.

Donc $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$. Donc φ est C^1 sur $]0,\pi]$ en tant que quotient bien défini de fonctions C^1 sur $]0,\pi]$. $\forall t \in]0,\pi]$,

$$\varphi'(t) = \frac{\sin(\frac{t}{2}) - \frac{t}{2}\cos(\frac{t}{2})}{(\sin(\frac{t}{2}))^2} = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{t\cos(\frac{t}{2})}{2\sin^2(\frac{t}{2})}.$$

b) On a :

$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{\frac{t}{2}} \underset{0^+}{\sim} 2.$

Donc $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = 2 \in \mathbb{R}$.

Donc φ est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est :

$\tilde{\varphi} : t \mapsto \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in]0,\pi] \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

c) φ est continue sur $[0,\pi]$ par 5 b). φ est C^1 sur $]0,\pi]$ par 5. a). On a $\forall t \in]0,\pi]$,

$\cancel{\varphi'(t) \underset{0^+}{\sim}} \quad \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = \frac{\frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} - 2}{t} = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{2}{t} = \frac{t - 2\sin(\frac{t}{2})}{t\sin(\frac{t}{2})}.$

Donc, $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} \underset{0^+}{\sim} \frac{t - 2\sin(\frac{t}{2})}{\frac{t^2}{2}} \underset{0^+}{\sim} \frac{2t - 4\sin(\frac{t}{2})}{t^2}.$

On a :

$\sin(u) \underset{0}{=} u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$, donc $4\sin(\frac{t}{2}) \underset{0}{=} 4\frac{t}{2} - 4\frac{(\frac{t}{2})^3}{6} + o(t^3)$

$\underset{0}{=} 2t - \frac{2}{3} \times \frac{t^3}{8} + o(t^3)$

$\underset{0}{=} 2t - \frac{t^3}{12} + o(t^3)$

Ainsi :

$2t - 4\sin(\frac{t}{2}) \underset{0}{=} 2t - 2t + \frac{t^3}{12} + o(t^3)$. Ainsi,

$2t - 4\sin(\frac{t}{2}) \underset{0^+}{\sim} \frac{t^3}{12}$. Donc :

$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} \underset{0^+}{\sim} \frac{\frac{t^3}{12}}{t^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{12}$. Donc $\lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}$ existe et vaut 0. Donc φ est dérivable en 0. Par le théorème de la

Limite de la dérivée, φ est C^1 en 0 et $\varphi'(t) = 0$.
Ainsi, φ est C^1 sur $[0,\pi]$.

d) Soit $t \in [0,\pi]$, ainsi, $0 \leq t \leq \pi$, donc $-\pi \leq -t \leq 0$, ainsi, $0 \leq \pi - t \leq \pi$. Donc $\pi - t \in [0,\pi]$.
Or, par ci-avant, φ est C^1 sur $[0,\pi]$, donc on peut prolonger $t \mapsto \varphi(\pi-t)$ en une fonction C^1 sur $[0,\pi]$, donc f se prolonge en une fonction C^1 sur $[0,\pi]$.

6. a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto (\pi-t)\cos(kt)$ est continue sur $[0,\pi]$ donc l'intégrale existe. On a :

$$\int_0^\pi (\pi-t)\cos(kt)\,dt = \pi\int_0^\pi \cos(kt)\,dt - \int_0^\pi t\cos(kt)\,dt$$
$$= \pi\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi t\cos(kt) + \frac{1}{k}\sin(kt) - \frac{1}{k}\sin(kt)\,dt$$
$$= \frac{\pi\sin(k\pi)}{k} - \left[\frac{1}{k}t\sin(kt)\right]_0^\pi + \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)\,dt$$
$$= \cancel{\frac{\pi\sin(k\pi)}{k}} - \cancel{\frac{\pi\sin(k\pi)}{k}} + \frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_0^\pi$$
$$= -\frac{1}{k^2}\left(\cos(k\pi) - 1\right)$$

* Si k est pair :
$\exists k' \in \mathbb{N}^*$, $k = 2k'$, or, $\cos(2k'\pi) = 1$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Donc $\frac{1}{k^2}(\cos(k\pi) - 1) = 0$.

* Si k est impair :
$\cos(k\pi) = -1$, donc $-\frac{1}{k^2}(\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k^2}$.

Donc $\int_0^\pi (\pi-t)\cos(kt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$.

6) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\int_0^{\pi} (\pi-t)\cos(kt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{sinon} \end{cases}, \text{ donc :}$$

$$\int_0^{\pi} (-1)^k (\pi-t)\cos(kt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{(-1)^k 2}{k^2} & \text{sinon} \end{cases}, \text{ ainsi en sommant}$$

pour $k \in [\![1, 2N+1]\!]$,

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \int_0^{\pi} (-1)^k (\pi-t)\cos(kt)\,dt = \left(\sum_{\substack{k \text{ pair} \\ 0 \leq k \leq 2N+1}} 0\right) + 2 \sum_{\substack{k \text{ impair} \\ 0 \leq k \leq 2N+1}} \frac{(-1)^k}{k^2}, \text{ d'où}$$

par linéarité de l'intégration :

$$\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi-t)\cos(kt)\,dt = 2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Soit $k' \in \mathbb{N}$, $k = 2k'+1$. On a ainsi :

$k' \in \mathbb{N}$ et $1 \leq 2k'+1 \leq 2N+1$, donc :

$k' \in \mathbb{N}$ et $0 \leq 2k' \leq 2N$, ainsi :

$k' \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k' \leq N$, d'où par réindexation :

$$2 \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = 2 \sum_{k'=0}^{N} \frac{(-1)^{2k'+1}}{(2k'+1)^2} = -2 \sum_{k'=0}^{N} \frac{((-1)^2)^{k'}}{(2k'+1)^2} = -2 \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

D'où le résultat demandé.

7.a) Par 1.c), $\lim\limits_{N \to +\infty} -2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ existe et est finie.

Numéro d'inscription 50456

Né(e) le 09/05/2005

Nom KRETZ

Prénom (s) HiPPOLYTE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet 1 ou 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/12

Numéro de table 085

11) On a le système d'après 2 :

$$\begin{cases} A-B=2C \\ A=C+\frac{1}{4}A \end{cases} \iff \begin{cases} A-B=\frac{\pi^2}{4} \\ \frac{3}{4}A=\frac{\pi^2}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} B=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{4}=-\frac{\pi^2}{12}. \\ A=\frac{\pi^2}{6} \end{cases}$$

Donc $A=\frac{\pi^2}{6}$ et $B=-\frac{\pi^2}{12}$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Exercice 2 I

1.a) On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 16 & 6 & 16 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & 14 \end{pmatrix}$$

b) Donc $\exists (a_i)_{0 \leq i \leq 9} \in \mathbb{R}^{10} \setminus \{0_{\mathbb{R}^{10}}\}, \sum_{i=0}^{9} a_i M^i = 0$ par définition d'une famille liée.

~~On~~ pose $P = \sum_{i=0}^{9} a_i X^i$, on a bien $P(M) = 0$ et $\deg(P) \leq 9$.

2. a)

```
import numpy as np
def PolyAnn(M):
    M2 = np.dot(M,M)
    M3 = np.dot(M2 ,M)
    ~~M4 = np.dot(M2,M2)~~
    if    M3 - 4 * M2 - 12*M - 28* np.eye(3) == 0 :
          return (True)
    else :
    ~~ret~~ return (False)
```

b) On a donc la relation :

$0 = M^3 - 4M^2 - 12M - 28I_3$, ainsi :

$28I_3 = M(M^2 - 4M - 12I_3)$, donc :

$I_3 = M(\frac{1}{28}M^2 - \frac{1}{7}M - \frac{3}{7}I_3)$

Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{28}M^2 - \frac{1}{7}M - \frac{3}{7}I_3$.

3. a) On sait par le cours que si λ est valeur propre de M, alors λ est racine de tous les polynômes annulateurs de M.
~~En effet, $\forall \lambda \in Sp(M)$, φ~~

b) φ est polynomiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$\varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12$.
Le discriminant Δ de l'équation $\varphi'(x) = 0$ est donné par :
$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 64 + 144 = 208$.
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{208} = \sqrt{4 \times 52} = 2\sqrt{52} = 2\sqrt{4 \times 13} = 4\sqrt{13}$.
Ainsi, les solutions de l'équation sont :
$x_1 = \frac{8 - 4\sqrt{13}}{6} = \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3}$ et $x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}$ avec $x_1 < x_2$.

On a ainsi :

x	$-\infty$		x_1		x_2		λ		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	0		$+$		
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_1)$	$\searrow$	$\varphi(x_2)$		$\nearrow$		$+\infty$
φ		$-$				$-$	0	$+$	

Or, on a $\varphi\left(\frac{4 - 2\sqrt{13}}{3}\right) < 0$
Donc par lecture du tableau et par continuité de φ sur $\mathbb{R}$, $\varphi < 0$ sur $]-\infty, x_2]$.

φ est continue et strictement croissante de $]x_2, +\infty[$ dans $]\varphi(x_2), +\infty[$, donc par le théorème de la bijection monotone, comme $\varphi(x_2) < 0$, et $0 \in]\varphi(x_2), +\infty[$, ainsi $\exists ! \lambda \in]x_2, +\infty[$, $\varphi(\lambda) = 0$.

On admet que $x_2 \geq 4$.
Ainsi, $\lambda > x_2 \geq 4$.
Donc M admet au plus une valeur propre (car par 3-a)),
$Sp(M) \subset \{x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = 0\}$ et $\lambda > 4$.

c) On distingue deux cas :
* $Sp(M) = \emptyset$. M n'est donc pas diagonalisable.
* $Sp(M) = \{\lambda\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que M soit diagonalisable. Alors, en posant $D = diag(\lambda, \lambda, \lambda)$, $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $M = PDP^{-1}$. Or, $D = 3I_3$, donc :

$$M = P(3I_3)P^{-1} = 3PP^{-1} = 3I_3.$$

Or, il est clair que $M \neq 3I_3$.
Donc M n'est pas diagonalisable.

Dans les deux cas, M n'est pas diagonalisable.

II

4. On a : ${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM = S$.
Donc $S \in S_3(\mathbb{R})$.

5. Soit $\lambda \in Sp(S)$ et X un vecteur propre associé.
On note $\|.\|$ la norme euclidienne.
On a :
$SX = \lambda X$, donc : ${}^tX\,{}^tMMX = \lambda\,{}^tXX$, i.e. ${}^t(MX)(MX) = \lambda \|X\|^2$.
Donc $\|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2$. Or X est un vecteur propre, donc $X \neq 0$, ainsi $\|X\|^2 \neq 0$, donc : $\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$. Or, $\|MX\|^2 = 0 \iff MX = 0$
$\iff X$ est vecteur propre de M associé à la valeur propre 0.

Or par la partie 1, $0 \notin Sp(M)$. Donc $\lambda \neq 0$ et $\lambda > 0$. Donc $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Numéro d'inscription 505456

Né(e) le 09 / 05 / 2005

Nom KRETZ

Prénom (s) HIPPOLYTE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 13 / 16

Numéro de table 085

6. S est symétrique donc par le théorème spectrale, il existe D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et P une matrice orthogonale de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $S = PD\,{}^tP$.

7. a) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, on a bien $\Delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = D$.
Soit $\Delta' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ~~telle que~~ diagonale telle que $\Delta'^2 = D$.
Ainsi, on a :
$0 = D - D = \Delta^2 - \Delta'^2$. Donc $\Delta^2 = \Delta'^2$. Or ces matrices sont diagonales, donc $\Delta = \Delta'$.
Donc Δ est unique.

b) Δ est diagonale avec ses coefficients diagonaux tous non-nuls, donc Δ est inversible.

8. On a $S = PD\,{}^tP = P\Delta^2\,{}^tP = (P\Delta)(\Delta\,{}^tP) = P\Delta\,{}^tP\,P\Delta\,{}^tP = (P\Delta\,{}^tP)^2$
On pose $R = P\Delta\,{}^tP$.
On a : ${}^tR = {}^t(P\Delta\,{}^tP) = P\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP$ car Δ est diagonale.
Donc R est symétrique.

9. Soit λ une valeur propre de R. On a pour tout X vecteur propre associé, $RX = \lambda X$, ainsi $R^2X = \lambda RX$, ou encore $SX = \lambda^2 X$. Donc λ^2 est valeur

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

propre de S. Or, par 5., $\lambda^2 > 0$, donc par stricte croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda > 0$.

Donc $\lambda \neq 0$.

Donc R est inversible.

On a $R^2 = S$. Or 0 n'est pas valeur propre de S par 5., donc S est inversible. On a, en notant $D^{-1} = \text{diag}(1, \frac{1}{16}, \frac{1}{49})$

$S(PD^{-1}\,{}^tP) = PD\,{}^tPPD^{-1}\,{}^tP$

$= PDD^{-1}P$

Or, D^{-1} est l'inverse de D, donc $S(PD^{-1}\,{}^tP) = I_3$.

Ainsi :

$R^2(PD^{-1}\,{}^tP) = I_3$.

On a $\Delta^{-1} = \text{diag}(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7})$, donc $(\Delta^{-1})^2 = D^{-1}$.

Ainsi :

$R(P\Delta\,{}^tP)(PD^{-1}\,{}^tP) = I_3$, donc $R(P\Delta\,{}^tPP(\Delta^{-1})^2\,{}^tP) = I_3$

Donc $R^{-1} = P\Delta\,{}^tPP(\Delta^{-1})^2\,{}^tP = P\Delta\Delta^{-1}\Delta^{-1}\,{}^tP = P\Delta^{-1}\,{}^tP$.

10. On a :

$U\,{}^tU = \cancel{t}\; MR^{-1}\,{}^t(MR^{-1}) = MR^{-1}\,{}^t(R^{-1})\,{}^tM = MR^{-1}P\,{}^t\Delta^{-1}\,{}^tP\,{}^tM$

~~Or, par 8, ${}^tR = R$, donc :~~ $= MR^{-1}PD^{-1}\,{}^tP\,{}^tM$

~~$U\,{}^tU =$~~ $= M(R^{-1})^2\,{}^tM$.

Or, $(R^{-1})^2 = PD^{-1}\,{}^tPP\Delta^{-1}\,{}^tP = P(\Delta^{-1})^2\,{}^tP$.

III

11. Soit $\lambda \in Sp(R)$. On a pour tout X vecteur propre associé,

$RX = \lambda X$

Or, on a $R^2 = P\Delta\,{}^tP\,P\Delta\,{}^tP = P\Delta^2\,{}^tP = PD\,{}^tP = S$.

Ainsi,

$SX = \lambda^2 X$. Or, comme déjà fait à la question 9,

on a $\lambda^2 > 0$, et donc $\lambda > 0$.

Donc $Sp(R) \subset \mathbb{R}_+^*$.

12. On admet que $T^2 = S$.

Ainsi, $N^2 = ({}^tPTP)({}^tPTP) = {}^tPT^2P = {}^tPSP = D$ par la question 6.

13. $TS = T(T^2) = T^3 = (T^2)T = ST$.

Donc T et S commutent.

14. a) $\forall i \in [\![1,3]\!]$, en notant $P = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ et $E_i = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cancel{\neq 0}$

$$PE_i = \cancel{P} \left(\sum_{k=1}^{3} p_{i,k}e_k\right)_{0\leq i\leq 3}$$

$$= \left(\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{3} p_{i,k}\times 0\right) + p_{i,j}\right)_{0\leq j\leq 3}$$

$$= C_i$$

b) On a $\forall i \in [\![1,3]\!]$,

$SC_i = T^2 C_i = (PN\,{}^tP)^2 C_i = PN^2\,{}^tP C_i = PD\,{}^tP C_i$

c)

Numéro d'inscription	505456
Né(e) le	09 / 05 / 20?5
Nom	KRETZ
Prénom (s)	HIPPOLYTE

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 17 / 20

Numéro de table 085

Problème I

1. a) $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ car $(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} 1$.

b) $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,\frac{1}{2}]$, donc $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est impropre en 0.

Or, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ par 1.a). Or, $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$ converge par le critère de Riemann si et seulement si ~~$x-1<1$~~, $1-x<1$, ie si $x>0$.

Donc par critère de comparaison par équivalence et par positivité, $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si $x>0$.

c) On pose $s=1-t$, changement valide car affine non constant. $ds=-dt$, on a ainsi que ~~comme on sait déjà que $\int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}(1-s$~~ les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds$ et

$-\int_{1-0}^{1-\frac{1}{2}}(1-t)^{y-1}t^{x-1}dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Donc $\int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1}t^{x-1}dt$ sont de même nature.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

d) $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si

$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ convergent.

Or, par 1.b), $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge $\Leftrightarrow x>0$.

L'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est impropre en 1. Or, par

1.c), elle est de même nature que $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$, qui elle converge si et seulement si $y>0$.

Donc elle converge si et seulement si $y>0$.

Ainsi, $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge $\Leftrightarrow$ $x>0$ et $y>0$.

2. On sait que $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $B(x,y)$ et $B(y,x)$ convergent.
On pose $s=1-t$ dans $B(x,y)$, et similairement à 1.c), on a :

$$B(x,y) = -\int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}ds = \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds = B(y,x).$$

3. $\forall x>0,\ B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^0 dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

4. a) $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$,
$$B(x+1,y)+B(x,y+1) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y dt$$
$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(t+1-t)dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = B(x,y).$$

b) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. ~~On~~

On a :

$xB(x,y+1) = x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \, dt$. Soit $(A,B) \in]0,1[^2$ avec $A<B$.

On procède à une IPP.

On pose $\forall t \in [A,B]$,

$u(t) = (1-t)^y \qquad v'(t) = xt^{x-1}$

$u'(t) = -y(1-t)^{y-1} \qquad v(t) = t^x$

u et v sont C^1 sur $[A,B]$, ainsi :

$$x\int_A^B t^{x-1}(1-t)^y dt = \left[t^x(1-t)^y\right]_A^B + y\int_A^B t^x(1-t)^{y-1} dt$$

$$= B^x(1-B)^y - A^x(1-A)^y + y\int_A^B t^x(1-t)^{y-1} dt.$$

~~Or,~~ $\cancel{B^x(1-B)^y \underset{0}{\sim} B^x}$ ~~et~~ $\cancel{B^x = e^{x\ln B} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$ ~~donc~~ $\cancel{B^x(1-B)^y \xrightarrow[x\to 0]{} (1-B)^y}$

~~et~~ $\cancel{A^x(1-A)^y}$

On a $B^x(1-B)^y = e^{x\ln(B)}\cancel{(1-B)^y \underset{0}{\sim} e^{x\ln(B)} \xrightarrow[B\to 1]{} 1}$

~~et~~ $\cancel{A^x(1-A)^y \to}$

On admet que $B^x(1-B)^y - A^x(1-A)^y$ tend vers 0 quand successivement A tend vers 0 et B tend vers 1.

Ainsi, $xB(x,y+1) = yB(x,y+1)$.

c) On a par (4. a),

$B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)$, donc :

$B(x+1,y) + \frac{y}{x}B(x+1,y) = B(x,y)$, ainsi :

$\left(\frac{y}{x}+1\right)B(x+1,y) = B(x,y)$, donc : $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y)$.

5. Soit $q \in \mathbb{N}^*$.
Montrons que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $P(p)$: " $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$ " est vraie.

Initialisation : Si $p=1$, on a $B(1,q) = B(q,1)$ par 2.
$= \dfrac{1}{q}$ par 3.

Or, $\dfrac{1!\,(q-1)!}{(1+q-1)!} = \dfrac{(q-1)!}{q!} = \dfrac{1}{q} = B(1,q)$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(p)$ vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Montrons que $P(p+1)$ est vraie.
On a :

$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q} B(p,q) \quad \text{par 4.c)}$$
$$= \frac{p}{p+q} \times \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!} \quad \text{par } P(p)$$
$$= \frac{p!\,(q-1)!}{(p+q)!}$$

Donc $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

II

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $\Gamma(n+1) = n!$ " est vraie.
Initialisation : Si $n=0$, on a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$ (intégrale exponentielle de référence) et $0! = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On a $\Gamma(n+2) = \Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)\,n!$ par $P(n)$
$= (n+1)!$

Donc $P(n+1)$ est vraie. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Numéro d'inscription 50456

Né(e) le 09/05/2005

Signature

Nom KRETZ

Prénom (s) HIPPOLYTE

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 7-1 / 24

Numéro de table 095

6) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

On pose $u = \sqrt{2t}$. Le changement est valable car $t \mapsto \sqrt{2t}$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers lui-même.

$u = \sqrt{2t} \iff u^2 = 2t \iff t = \frac{u^2}{2}$

Donc $dt = u\,du$.

On a ainsi, comme $\Gamma(\frac{1}{2})$ converge,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{\frac{u^2}{2}}} u\,du$$

$= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ car $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est paire

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi}$ On reconnaît une intégrale de Gauss de référence

$= \sqrt{\pi}$.

$t \mapsto f_{a,b}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)$ est doublement impropre en $+\infty$ et en $-\infty$.

7. a) On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 \times |f_{a,b}(t)| = \left|\frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a+1}\right| e^{-bt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées car $b > 0$. Donc $|f_{a,b}(t)| \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or, par le critère de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Donc par positivité et par critère de comparaison par négligeabilité,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)dt$ converge absolument donc elle converge.

On admet que $\int_{-\infty}^{0} f_{a,b}(t)\,dt$ converge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt$ converge.

b) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto t^{a-1} e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par croissance de l'intégrale convergente, $\Gamma(a) \geq 0$.

De plus, si $t>0$, $t^{a-1} > 0$ et $e^{-bt} > 0$.

Donc $f_{a,b} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme $f_{a,b}(t) = 0$ si $t \leq 0$,

$f_{a,b} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

$f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les règles usuelles.

On a :

$\cancel{f_{a,b}(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} \underset{0}{\sim} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1}}$

$f_{a,b} = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ donc $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$.

Donc $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

On a :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt$ qui converge par 2.a) et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$$

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt = 1$.

Donc $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

8. a) Si $b=1$, alors $f_{a,1} : t \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $X \hookrightarrow \gamma(a)$.

Donc $E(X) = V(X) = a$.

b) Si $a=1$, $f_{1,b} : t \longmapsto \begin{cases} \frac{b}{\Gamma(1)} t^{0} e^{-bt} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$.

Donc $\forall t>0$, $f_{1,b}(t) = b\, e^{-bt}$.

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$.

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ (cours).

9. a) Par transformation affine, $\forall t \in \mathbb{R}$, si l'on note f_{bX} une densité de bX, on a :

$$f_{b(X)}(t) = \frac{1}{|b|} f_{a,b}\left(\frac{t-0}{b}\right) = \frac{1}{b} f_{a,b}\left(\frac{t}{b}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{b^{a-1}}{\Gamma(a)} \left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} e^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $bX \hookrightarrow \gamma(a)$.

b) Ainsi, $E(bX) = a$, et par linéarité,
$bE(X) = a$, d'où $E(X)$ qui existe et $E(X) = \frac{a}{b}$.

De même, $V(bX) = a$, donc $V(X)$ existe et :

$b^2 V(X) = a$, donc $V(X) = \frac{a}{b^2}$.

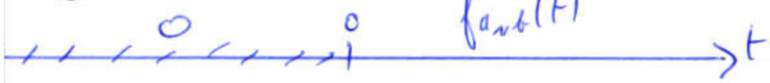
10.

a) X_1 et X_2 sont indépendantes, donc si la fonction :

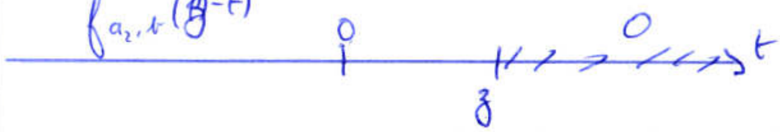
$$h : z \longmapsto \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(z-t)\,dt & \text{si l'intégrale converge} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définie et est continue sur $\mathbb{R}$, alors $X_1 + X_2$ est à densité de densité h.

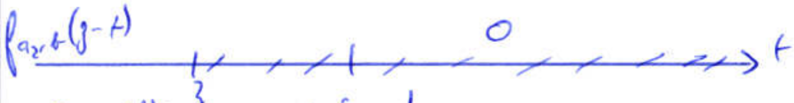
On a :



$$f_{a_1,b}(t) = \begin{cases} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} t^{a_1-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$



$$f_{a_2,b}(z-t) = \begin{cases} \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} (z-t)^{a_2-1} e^{-b(z-t)} & \text{si } z-t > 0\ (z > t) \\ 0 & \text{si } z-t \leq 0\ (z \leq t) \end{cases}$$



On distingue ainsi deux cas :

- Si $z \leq 0$:

On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(z-t) = 0$. Donc $h(z)$ existe et $h(z) = 0$.

Numéro d'inscription 50545 6

Né(e) le 09/05/2005

Nom KRETZ

Prénom (s) HIPPOLYTE

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 25/28

Numéro de table 085

• Si $z>0$:

On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t)\, f_{a_2,b}(z-t)\,dt = 0 + \int_0^z f_{a_1,b}(t)\, f_{a_2,b}(z-t)\,dt + 0$$

$$= \int_0^z \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} t^{a_1-1} e^{-bt} \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} (z-t)^{a_2-1} e^{-b(z-t)}\,dt$$

$$= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^z t^{a_1-1}(z-t)^{a_2-1} e^{-bz}\,dt$$

$$= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bz} \int_0^z t^{a_1-1}(z-t)^{a_2-1}\,dt$$

On admet que $\int_0^z t^{a_1-1}(z-t)^{a_2-1}dt = z^{a_1+a_2-1} B(a_1,a_2)$.

Ainsi, on a $h(z) \underset{z\to 0^+}{\to} 0$ * donc h est continue (* par croissances comparées)

Donc X_1+X_2 est à densité de densité :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}.$$

b) h est une densité donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = 1$. Or $h(x)=0$ si $x\leq 0$.

Donc $\frac{b^{a_1+a_2} B(a_1,a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = 1$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

On, avec le changement affine $(b \neq 0)$ $bu = x$, on a : $(dx = b\,du$

$$\int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx}\,dx = \int_0^{+\infty} b^{a_1+a_2-1} u^{a_1+a_2-1} e^{-u}\, b\, du$$

$$= b^{a_1+a_2}\,\Gamma(a_1+a_2) \text{ , ainsi ,}$$

$$B(a_1,a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)} \times \frac{\cancel{b^{a_1+a_2}}}{\cancel{b^{a_1+a_2}}} = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}.$$

c) $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} = \pi$.

$\boxed{\text{III}}$

1 . a)

b)

```
def Simul (x, y):
    if x <= 0 or y <= 0 :
        return ("error")
    else:
        return (((rd.random ())** (x-1)) *((1- rd.random())** (y-1)))
```

c) ~~Les $(R_n)_{n\geq 1}$ sont des VAR indépendantes et identiquement distribuées de variance non-nulle.~~
~~Donc par le théorème limite central,~~ R_n

On admet que $E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(x, y)$.

Les $(U_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d de même loi $\mathcal{U}([0,1])$ et admettent une espérance égale à $B(x, y)$. il en va de même des $(U_n^{x-1}(1-U_n)^{y-1})_{n\geq 1}$

Donc par la loi faible des grands nombres,

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} B(x, y).$$

d)

```
def RM(x, y, n):
    if x <= 0 or y <= 0 :
        return ("error")
    else:
        A = np.zeros(n)
        for k in range(n):
            A[k]= Simul(x, y)
        B= sum(A)
        return ((1/n)*B)
```

e) Cela illustre que $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi \,(\simeq 3{,}14)$.

12.

a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

Par le théorème de transfert, $E(X^{a-1})$ existe
$\Leftrightarrow$
$\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} \, dt$ converge.

Or, $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} \, dt$ converge et vaut $\Gamma(a)$.

Donc $E(X^{a-1})$ existe et $E(X^{a-1}) = \Gamma(a)$.