MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - Edhec 2025

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Exercice 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère la fonction f_n définie sur $]n\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]n\,;+\infty[, \quad f_n(x) = (x-n)\ln(x) - x\ln(x-n).$$

On considère aussi la fonction g définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. (a) La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle où le dénominateur ne s'annule pas, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2 > 0$ donc $g'(x) > 0 \iff 1-\ln(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e$ par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Sachant que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, le tableau de variation complet de g est donc le suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
g	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

(b) Puisque $2 < e < 3$, alors pour tout entier $k \geqslant 3$: $\quad 3 \leqslant k < k+1 \Longrightarrow g(k) > g(k+1)$ par stricte décroissance de g sur $[e\,;+\infty[$, soit : $\forall k \geqslant 3$, $\dfrac{\ln(k)}{k} > \dfrac{\ln(k+1)}{k+1}$, ce qui prouve que la suite $\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)_{k\geqslant 3}$ est (strictement) décroissante.

Ainsi, pour tout $k \geqslant 4$: $\quad \dfrac{\ln(k)}{k} \leqslant \dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{2\ln(2)}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2}$.

2. (a) Pour tout $x \in]n\,;+\infty[$, $x-n > 0$ et $x > 0$, donc par composition puis produit et somme de fonctions dérivables, f_n est bien dérivable sur $]n\,;+\infty[$ et :

$$\forall x > n, \quad f_n'(x) = 1\cdot\ln(x) + (x-n)\cdot\frac{1}{x} - 1\cdot\ln(x-n) - x\cdot\frac{1}{x-n} = \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) + 1 - \frac{n}{x} - \frac{x}{x-n}.$$

(b) La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle y est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\ln''(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$ pour tout $t > 0$), donc sa courbe se situe entièrement en-dessous de chacune de ses tangentes.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation : $\quad y = \ln'(1)(t-1) + \ln(1) \iff y = t - 1$, donc en effet :

$$\forall t > 0, \quad \ln(t) \leqslant t - 1.$$

(c) En reprenant l'expression de $f_n'(x)$ valable pour tout $x \in]n\,;+\infty[$, et puisque $\dfrac{x}{x-n} > 0$ pour tout $x > n$, alors :

$$\forall x \in]n\,;+\infty[, \quad \ln\left(\frac{x}{x-n}\right) \leqslant \frac{x}{x-n} - 1 \Longrightarrow f_n'(x) \leqslant -\frac{n}{x} < 0,$$

ce qui prouve en effet que f_n est strictement décroissante sur $]n\,;+\infty[$.

(d) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Sur l'intervalle $]n\,;+\infty[$, donc sur $[n+1\,;n+2]$ la fonction f_n est continue, strictement décroissante, et $f_n(n+1) = 1\ln(n+1) - (n+1)\ln(1) = \ln(n+1) > 0$,

tandis que $f_n(n+2) = 2\ln(n+2) - (n+2)\ln(2) = 2(n+2)\left(\dfrac{\ln(n+2)}{n+2} - \dfrac{\ln(2)}{2}\right) \leqslant 0$ d'après 1.(b), donc f_n change de signe sur $]n\,;+\infty[$.

Le théorème de la bijection assure alors que l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [n+1\,;n+2]$, admet une unique solution, que l'on note x_n.

3. Par définition de x_n : pour tout $n \geqslant 2$, $n+1 \leqslant x_n \leqslant n+2 \overset{\div n>0}{\Longrightarrow} 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{x_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n} = 1$, alors le théorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1$, ce qui prouve bien que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

4. (a) Soit $n \geqslant 2$; par définition de x_n :

$$f_n(x_n) = 0 \iff (x_n - n)\ln(x_n) - x_n\ln(x_n - n) = 0 \iff x_n\ln(x_n - n) = (x_n - n)\ln(x_n)$$
$$\iff \ln(x_n - n) = (x_n - n)\frac{\ln(x_n)}{x_n},$$

la dernière opération de division étant licite puisque $x_n > n > 0$.

(b) Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ par croissances comparées.

En tenant compte aussi du fait que : $\forall n \geqslant 2$, $n+1 \leqslant x_n \leqslant n+2 \iff 1 \leqslant x_n - n \leqslant 2$,

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - n)\dfrac{\ln(x_n)}{x_n} = 0$ puisque $(x_n - n)_{n\geqslant 2}$ est bornée, et $\left(\dfrac{\ln(x_n)}{x_n}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

L'égalité démontrée en 4.(a) donne ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(x_n - n) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} x_n - n = e^0 = 1$$

par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

5. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $\quad \forall n \geqslant 2,\ u_n = x_n - n - 1$.

(a) Le résultat de 4.(b) assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc on a bien $\ln(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ d'après l'équivalent classique du cours.

Par ailleurs, en remarquant que $1 + n + u_n = x_n$, puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 2}$ qui vérifie : $\quad \forall n \geqslant 2,\ x_n = n(1 + \varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Mais alors : $\forall n \geqslant 2,\ \ln(x_n) = \ln(n) + \ln(1+\varepsilon_n)$,
où puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\varepsilon_n = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\varepsilon_n) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln en 1.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, alors $\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\big(\ln(n)\big)$, et ainsi :

$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + o(n) \iff \ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \iff \ln(1+n+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

(b) Le résultat de 4.(a) se réécrit : $\forall n \geqslant 2,\ \ln(1+u_n) = (1+u_n)\dfrac{\ln(1+n+u_n)}{1+n+u_n}$.
Avec les équivalences obtenues à la question précédente, et puisqu'on a aussi $1+u_n+n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $1+u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$ vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on peut écrire :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(1+u_n) \sim (1+u_n)\frac{\ln(1+n+u_n)}{1+n+u_n} \sim \frac{\ln(n)}{n}.$$

6. On sait donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\dfrac{1}{n} = o\Big(\dfrac{\ln(n)}{n}\Big)$ puisque $n \times \dfrac{\ln(n)}{n} = \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
La série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ étant divergente, par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge aussi. Le critère d'équivalence des séries à termes positifs assure alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est de même nature que cette dernière série, c'est-à-dire divergente.

Enfin : $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^2} \geqslant 0$, où par croissances comparées, on sait que $\big(\ln(n)\big)^2 = o(\sqrt{n})$, donc $\dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^2} = o\Big(\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}\Big) = o\Big(\dfrac{1}{n^{3/2}}\Big)$.
La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente comme série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, donc d'après le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\big(\ln(n)\big)^2}{n^2}$.
Le critère d'équivalence des séries à termes positifs assure donc que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n^2$ est elle-même convergente.
Remarque : pour cette question on aura fait un copié-collé de la réponse donnée dans le sujet Edhec 2018 ECS, posée exactement selon les mêmes termes, avec le même équivalent !

Exercice 2

Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et de la norme associée $||\cdot||$.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E, supposé non trivial ($F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$) par l'énoncé.
   Soit p la projection orthogonale sur F.

   (a) Tout vecteur x de F vérifie : $x = p(x)$ puisque p projette sur F !
   Donc pour tout $x \in F$, $||p(x)|| = ||x||$, et par conséquent, en effet :

   $$F \subset \{x \in E\,;||p(x)|| = ||x||\}.$$

   (b) On sait que pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$ donc $p(x) \perp x - p(x)$, et puisque $x = \big(x - p(x)\big) + p(x)$, le théorème de Pythagore donne :

   $$||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2.$$

   (c) Soit $x \in E$; d'après ce qui précède, et par positivité de la norme :

$$||x|| = ||p(x)|| \iff ||x||^2 = ||p(x)||^2 \iff ||x - p(x)||^2 = 0 \iff x - p(x) = 0_E \iff x = p(x) \iff x \in F,$$

   donc en effet : $\qquad F = \{x \in E\; ||p(x)|| = ||x||\}$,
   et plus généralement : $\quad \forall x \in E,\; ||x||^2 = ||x - p(x)||^2 + ||p(x)||^2 \geqslant ||p(x)||^2 \Longrightarrow ||x|| \geqslant ||p(x)||$
   par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ et par positivité de la norme.

Dans la suite de l'exercice, on considère, F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E et pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note p_i la projection orthogonale sur F_i.

2. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_3$.

   (a) Soit $x \in F_1 \cap F_2$: alors $x \in F_2$ est invariant par p_2, donc $p_2(x) = x$, et puisque $x \in F_1$ aussi, alors $p_1(x) = x$, donc :

   $$p_3(x) = p_1 \circ p_2(x) = p_1(x) = x.$$

   Le vecteur x est donc encore invariant par p_3 cette fois, ce qui implique que $x \in F_3$, ce qui prouve l'inclusion $F_1 \cap F_2 \subset F_3$.

   (b) Soit x un vecteur de F_3, vérifiant donc : $\quad p_3(x) = x \iff p_1\big(p_2(x)\big) = x$.
   D'après l'inégalité finale de 1.(c), utilisée ici avec le projecteur p_1 et le vecteur $p_2(x)$:

   $$||x|| = ||p_1\big(p_2(x)\big)|| \leqslant ||p_2(x)||.$$

   Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a alors :

   $$||x||^2 \leqslant ||p_2(x)||^2 \iff ||x - p_2(x)||^2 + ||p_2(x)||^2 \leqslant ||p_2(x)||^2 \Longrightarrow ||x - p_2(x)||^2 \leqslant 0 \Longrightarrow ||x - p_2(x)|| = 0$$

   car une norme, toujours positive, n'est inférieure ou égale à 0 que si elle est nulle.
   Et comme $||x - p_2(x)|| = 0 \iff x - p_2(x) = 0_E \iff p_2(x) = x$, x invariant par p_2 appartient à F_2.
   Mais alors, l'égalité $x = p_1\big(p_2(x)\big)$ vérifiée dès le début de cette question, se réécrit : $x = p_1(x)$, ce qui caractérise le fait que $x \in F_1$.

   (c) La question précédente prouve que : $\quad x \in F_3 \Longrightarrow X \in F_1 \cap F_2$, donc puisque l'inclusion réciproque est vraie d'après 2.(a), on a

   $$F_3 = F_1 \cap F_2.$$

(d) Comme le rappelle l'énoncé, les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques. Pour le projecteur orthogonal p_3, cela signifie par définition :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle p_3(x)\,,y\rangle = \langle x\,,p_3(y)\rangle,$$

ce qui s'écrit aussi : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \quad \langle p_1 \circ p_2(x)\,,y\rangle = \langle x\,,p_1 \circ p_2(y)\rangle.$

Mais p_1 et p_2 aussi sont des projecteurs orthogonaux, donc des endomorphismes symétriques, de sorte que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle x\,,p_1\big(p_2(y)\big)\rangle = \langle p_1(x)\,,p_2(y)\rangle = \langle p_2\big(p_1(x)\big)\,,y\rangle,$$

et on a bien montré que : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \ \langle p_1 \circ p_2(x)\,,y\rangle = \langle p_2 \circ p_1(x)\,,y\rangle.$

(e) De ce qui précède, on déduit que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x)\,,y\rangle = 0.$$

Cela signifie que pour tout x de E, $p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x)$ est orthogonal à tout vecteur y de E, donc appartient à $E^\perp = \{0_E\}$, et donc :

$$\forall x \in E, \quad p_1 \circ p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) = 0_E \iff \forall x \in E, \quad p_1 \circ p_2(x) = p_2 \circ p_1(x).$$

On a donc bien prouvé l'égalité d'endomorphismes : $\quad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1.$

3. On suppose dans cette question que $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ et on pose $p = p_1 \circ p_2$.

(a) Puisque p_1 et p_2 commutent par hypothèse, alors :

$$p \circ p = p_1 \circ p_2 \circ p_1 \circ p_2 = p_1 \circ p_1 \circ p_2 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2^2 = p_1 \circ p_2 = p$$

puisque $p_1^2 = p_1$ et $p_2^2 = p_2$ du fait que p_1 et p_2 sont des projecteurs. L'égalité $p \circ p = p$ prouve que p aussi est un projecteur.

(b) Toujours du fait que p_1 et p_2 sont des projecteurs orthogonaux, donc des endomorphismes symétriques, et puisque p_1 et p_2 commutent :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle p(x)\,,y\rangle = \langle p_1 \circ p_2(x)\,,y\rangle = \langle p_2(x)\,,p_1(y)\rangle = \langle x\,,p_2 \circ p_1(y)\rangle = \langle x\,,p_1 \circ p_2(y)\rangle = \langle x\,,p(y)\rangle,$$

donc p est bien un endomorphisme symétrique de E.

(c) D'après le cours : un projecteur est orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique de E, ce qui est bien le cas pour $p_1 \circ p_2$ d'après les deux questions précédentes.

Et d'après la question 2., puisque p a les mêmes propriétés que le projecteur orthogonal p_3 de cette question, $p = p_1 \circ p_2$ est le projecteur orthogonal sur $F_1 \cap F_2$.

4. En raisonnant par double implication, on a prouvé que la composée de deux projecteurs orthogonaux p_1 et p_2, qui projettent sur F_1 et F_2 respectivement, est encore un projecteur orthogonal si et seulement si p_1 et p_2 commutent, auquel cas $p_1 \circ p_2$ est le projecteur orthogonal sur $F_1 \cap F_2$.

Exercice 3

L'énoncé suppose que toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

La fonction f est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

Partie 1. Étude d'une variable aléatoire.

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour tout $x \leqslant 0$, $-2x \geqslant 0$ et $e^{-x^2} > 0$ donc $f(x) = -2xe^{-x^2} \geqslant 0$: la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

   La fonction f est continue sur $]0\,;+\infty[$ comme fonction constante sur cet intervalle, et sur $]-\infty\,;0[$ comme composée et produit de fonctions de références continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

   Enfin, sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} -2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + 0 = \lim_{B\to-\infty} \left[e^{-x^2}\right]_B^0 = \lim_{B\to-\infty} 1 - e^{-B^2} = 1$$

   puisque $\lim\limits_{B\to-\infty} -B^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$.

   L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est donc bien convergente et vaut 1, ce qui achève de démontrer que f est une densité de probabilité.

   On considère dans la suite une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) =]-\infty\,;0]$, de densité f, et on note F sa fonction de répartition.

2. La fonction F est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On distingue ici deux cas :

   - Pour tout $x \in]-\infty\,;0]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} -2te^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{B\to-\infty} \left[e^{-t^2}\right]_B^x = \lim_{B\to-\infty} e^{-x^2} - e^{-B^2} = e^{-x^2}.$$

   - Pour tout $x \in]0\,;+\infty]$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} -2te^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 1$$

     d'après le calcul de la question précédente.

   Bilan : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

3. Une variable aléatoire T qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ admet pour densité la fonction

$$f_T :\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1/2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\cdot 1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

4. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme $x \mapsto xf(x)$ est nulle sur $]0\,;+\infty[$ et négative sur $]-\infty\,;0]$, on est ramené à étudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x|f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} -xf(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^{0} x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

   Or la variable aléatoire T introduite à la question précédente, admet une espérance nulle et un moment d'ordre 2 qui est alors, d'après la formule de Koenig-Huygens, égal à la variance de T, soit $\frac{1}{2}$.

Ce moment d'ordre 2 est égal à l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x$; comme la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x^2}$ est paire, alors :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x \iff 2\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ce qui prouve que X admet une espérance, qui vaut $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} -2xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On trouve bien une espérance négative pour une variable aléatoire à valeurs dans $]-\infty\,;0]$ *!*

On pose $Z = X^2$ et on note G la fonction de répartition de Z.

5. Soit x un réel positif :

$$G(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}(X^2 \leqslant x) = \mathbf{P}(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\sqrt{x}}^{0} -2te^{-t^2}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\sqrt{x}} 0\ \mathrm{d}t = 1 - e^{-(-\sqrt{x})^2} = 1 - e^{-x}.$$

Comme Z est à valeurs positives, l'expression complète de G est : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

ce qui correspond bien à la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1 : c'est donc la loi suivie par Z.

6. La variable aléatoire Z admet alors une espérance égale à 1, qui est de fait : $\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(X^2) = 1$.

La variable aléatoire X admet donc une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \big(\mathbf{E}(X)\big)^2 = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}.$$

7. On souhaite dans cette question simuler la variable X à l'aide de `Python`.

On sait simuler la variable aléatoire $Z = X^2$ qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$: comme X est à valeurs *négatives*, on a alors $X = -\sqrt{Z}$ (*ne pas oublier ce signe "moins" !*), de sorte que la fonction suivante renvoie un vecteur contenant n simulations indépendantes de X :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX(n):
    M = np.zeros(n) # matrice ligne de taille n constituée de 0
    for i in range(n):
        M[i] = -np.sqrt(rd.exponential(1))
    return M
```

Comme X admet une variance, on sait qu'alors (d'après la loi faible des grands nombres), la moyenne empirique de l'échantillon calculé par la fonction ci-dessus, est un estimateur sans biais et convergent de l'espérance de X.

Comme l'énoncé interdit l'utilisation d'une fonction venant d'une bibliothèque particulière, on calcule cette moyenne empirique à l'aide d'une boucle `for` :

```
def EsperanceX(n):
    M = simulX(n)
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S+M[i]
    return S/n
```

À l'exécution pour $n = 10000$ par exemple, on obtient une valeur approchée de l'ordre de -0.88 qui correspond bien à $-\sqrt{\pi}/2 = \mathbf{E}(X)$.

Partie 2. Étude d'une convergence en loi.

On définit une fonction h par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1-x) & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

8. On reprend ici le même schéma de raisonnement qu'à la question 1.

   Pour tout $x < 0$ et tout $x > 1$, $h(x) = 0 \geqslant 0$ et pour tout $x \in [0\,;1]$, $h(x) = 2(1-x) \geqslant 0$ donc h est positive sur $\mathbb{R}$.

   La fonction h est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]1\,;+\infty[$ car elle est constante sur ces intervalles, et sur $]0\,;1[$ comme fonction affine : h est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et 1, ce qui représente un nombre fini de points.

   Enfin : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 2(1-x)\mathrm{d}x = \Big[2x - x^2\Big]_0^1 = 2 - 1 = 1$, donc h est bien une densité de probabilité.

   On considère dans la suite une variable aléatoire Y telle que $Y(\Omega) = [0\,;1]$, de densité h, et on note H sa fonction de répartition.

9. La fonction h étant nulle en-dehors de $[0\,;1]$, on peut déjà affirmer que $H(x) = 0$ pour tout $x < 0$, et $H(x) = 1$ pour tout $x > 1$.

   Pour tout $x \in [0\,;1]$: $\quad \displaystyle H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^x 2(1-t)\mathrm{d}t = \Big[2t - t^2\Big]_0^x = 2x - x^2.$

   Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

On considère maintenant une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et toutes de même loi que Y.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ et $T_n = \sqrt{n}(M_n - 1)$.

10. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n la fonction de répartition de T_n. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F_n(x) = \mathbf{P}(T_n \leqslant x) &= \mathbf{P}\big(\sqrt{n}(M_n - 1) \leqslant x\big) = \mathbf{P}\Big(M_n \leqslant 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \\ &= \mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big[Y_i \leqslant 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big]\Big) && \text{par définition du maximum} \\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\Big(Y_i \leqslant 1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big) && \text{par indépendance des } (Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \\ &= \prod_{i=1}^{n} H\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big) = \Big[H\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big]^n && \text{car les } (Y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ suivent toutes la loi de } Y \end{aligned}$$

11. Soit un réel y. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y}{n} = 0$, alors pour n assez grand $1+\dfrac{y}{n} > 0$, et $\left(1+\dfrac{y}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)}$.

Toujours du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y}{n} = 0$: $\quad \ln\left(1+\dfrac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{y}{n} \Longrightarrow n\ln\left(1+\dfrac{y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} y$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right) = y \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{y}{n}\right)} = e^y = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

12. Pour répondre à cette dernière question, on doit expliciter complètement $F_n(x)$ pour tout réel x. D'après 9. et 10. : pour tout réel x,

$$F_n(x) = \left[H\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \begin{cases} 0^n = 0 \quad \text{si } 1+\frac{x}{\sqrt{n}} < 0 \iff x < -\sqrt{n} \\ \left[2+\frac{2x}{\sqrt{n}} - \left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^n = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } 0 \leqslant 1+\frac{x}{\sqrt{n}} > 1 \iff -\sqrt{n} \leqslant x > 0 \\ 1^n = 1 \quad \text{si } 1+\frac{x}{\sqrt{n}} \geqslant 1 \iff x \geqslant 0 \end{cases} .$$

On a donc déjà : $\quad \forall x > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1.$

Soit un $x \leqslant 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$, alors x étant fixé, pour n assez grand, $-\sqrt{n} \leqslant x \leqslant 0$, et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}$$

d'après le résultat de la question précédente avec $y = -x^2$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = F(x) \quad \text{dans tous les cas.}$$

Comme X est une variable à densité, sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$, et comme le résultat de limite qu'on vient d'établir est vrai pour tout réel x, on peut bien conclure que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers X.

Problème

On considère la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ B_n = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

Partie 1.

1. D'après la définition des puissances et celle des coefficients binomiaux, on peut écrire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$B_n = \frac{1}{4^n}\times\frac{(2n)!}{n!n!} = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\times\frac{\prod_{k=1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}k\times\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=n+1}^{2n}k}{\prod_{k=1}^{n}4k} \overset{[i=k-n]}{=} \frac{\prod_{i=1}^{n}(i+n)}{\prod_{k=1}^{n}4k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+n}{4k}.$$

Remarquons qu'avec la convention faite par l'énoncé, $\displaystyle\prod_{k=1}^{0}\frac{k+n}{4k} = 1 = \frac{1}{4^0}\binom{2\times 0}{0} = 1$, donc la formule est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On peut alors compléter le code Python ci-dessous, qui prend en entrée un entier naturel n, et qui renvoie la valeur de B_n calculée comme le produit ci-dessus :

```
def B(n):
    P = 1                     # élément neutre pour le produit
    for k in range(1,n+1):    # k varie de 1 à n
        P = P * (k+n)/(4*k)
    return P
```

Partie 2.

On pose pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)^n\mathrm{d}t$.

2. Deux calculs élémentaires :

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = \int_0^{\pi/2}\sin(t)\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi/2} = -\cos(\pi/2)+\cos(0) = 1.$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leqslant\sin(t)\leqslant 1$ donc $\big(\sin(t)\big)^{n+1}\leqslant\big(\sin(t)\big)^n$ par comparaison des puissances d'un même nombre compris entre 0 et 1 (*ou simplement en multipliant par* $\big(\sin(t)\big)^n\geqslant 0$ *les membres de la première inégalité.*)
Les fonctions comparées sont continues sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $0<\frac{\pi}{2}$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2}\big(\sin(t)\big)^{n+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2}\big(\sin(t)\big)^{n}\mathrm{d}t \iff W_{n+1}\leqslant W_n.$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est bien décroissante.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Dans l'intégrale $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\big(\sin(t)\big)^{n+2}\mathrm{d}t$, on pose :

$$\begin{aligned} u(t) &= \big(\sin(t)\big)^{n+1} &\longrightarrow\quad u'(t) &= (n+1)\cos(t)\big(\sin(t)\big)^n \\ u'(t) &= \sin(t) &\longrightarrow\quad u(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc par intégration par parties :

$$W_{n+2} = \Big[-\cos(t)\big(\sin(t)\big)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\big(\sin(t)\big)^n \mathrm{d}t$$

$$= -\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0}\big(\sin(\pi/2)\big)^{n+1} + \cos(0)\underbrace{\big(\sin(0)\big)^{n+1}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2}\big(1-\sin^2(t)\big)\big(\sin(t)\big)^n\mathrm{d}t$$

$$= (n+1)\left(\int_0^{\pi/2}\big(\sin(t)\big)^n\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2}\big(\sin(t)\big)^{n+2}\mathrm{d}t\right) = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2},$$

donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \iff W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n.$

5. Montrons alors par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}B_n$ et $W_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)B_n}$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $\quad B_0 = 1$, et $W_{2\times 0} = W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}B_0$ et $W_{2\times 0+1} = 1 = \dfrac{1}{B_0}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $W_{2n+2} = \dfrac{\pi}{2}B_{n+1}$ et $W_{2n+3} = \dfrac{1}{(2n+3)B_{n+1}}$.

On commence par écrire :

$$B_{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)\times(2n+1)\times(2n)!}{4^n\times 4\times(n+1)^2\times n!n!} = \frac{2n+1}{2n+2}B_n,$$

et d'après la relation obtenue à la question 4. :

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \overset{H.R.}{=} \frac{\pi}{2}\times\frac{2n+1}{2n+2}B_n = \frac{\pi}{2}B_{n+1},$$

mais aussi : $\quad W_{2n+3} = \dfrac{2n+2}{2n+3}W_{2n+1} \overset{H.R.}{=} \dfrac{2n+2}{(2n+3)(2n+1)B_n} = \dfrac{1}{(2n+3)B_{n+1}},$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; d'après la relation de récurrence observée entre les nombres (B_n) dans l'hérédité de la question précédente, on a : $B_n = \dfrac{2n-1}{2n}B_{n-1}$, donc $W_{2n-1} = \dfrac{1}{(2n-1)B_{n-1}} = \dfrac{1}{2nB_n}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (W_n) étant décroissante, les résultats des deux questions précédentes permettent d'écrire :

$$W_{2n+1} \leqslant W_{2n} \leqslant W_{2n+1} \iff \frac{1}{(2n+1)B_n} \leqslant \frac{\pi}{2}B_n \leqslant \frac{1}{(2n-1)B_n}.$$

En multipliant les trois membres par $B_n > 0$ et en divisant par $\pi/2 > 0$, on obtient :

$$\frac{2}{(2n+1)\pi} \leqslant B_n^2 \leqslant \frac{2}{2n\pi} \iff \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \leqslant B_n^2 \leqslant \frac{1}{n\pi} \implies \frac{1}{(n+1)\pi} \leqslant B_n^2 \leqslant \frac{1}{n\pi} \implies \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leqslant B_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, et du fait que $B_n > 0$.

8. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+1/n}} \leqslant \sqrt{n}B_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}},$

où $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+1/n} = \sqrt{1} = 1$ par continuité de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème d'encadrement donne alors : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}B_n = \sqrt{\pi}$, d'où l'équivalent :

$$B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie 3.

On considère dans cette partie, une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1\,;1\}$, et telles que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1).$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons que puisque $X_k(\Omega) = \{-1\,;1\}$ et $\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1)$, alors ces deux probabilités sont toutes les deux égales à $\frac{1}{2}$.
   Puisque $\frac{1+1}{2} = 1$ et $\frac{1+(-1)}{2} = 0$, alors $Y_k(\omega) = \{0\,;1\}$ et :
   $$\mathbf{P}(Y_k = 0) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(Y_k = 1),$$
   donc Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   Le cours donne alors : $\quad \mathbf{E}(Y_k) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{V}(Y_k) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.
   (b) On remarque ici que la variable T_n définie par : $T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$,
   s'écrit aussi $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{X_k}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Puisque les $(X_k)_{k\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes, alors d'après le lemme des coalitions, les $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ sont aussi mutuellement indépendantes.
   La variable T_n apparaît alors comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes, de paramètre $\frac{1}{2}$: on sait qu'alors, T_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\big(n, \frac{1}{2}\big)$.
   (c) La relation : $\quad T_n = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}S_n \iff S_n = 2T_n - n$ permet alors de retrouver la loi de T_n.
   Puisque $T_n = [\![0\,;n]\!]$, alors $S_n(\Omega) = \big\{2j - n\,; j \in [\![0\,;n]\!]\big\}$, et :
   $$\forall j \in [\![0\,;n]\!], \quad \mathbf{P}(S_n = 2j - n) = \mathbf{P}(T_n = j) = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On définit la variable aléatoire R_n comme étant le cardinal de l'ensemble $\{k \in [\![1\,;2n]\!]\,; k = 0\}$, c'est-à-dire que pour tout $\omega \in \Omega$, $R_n(\omega)$ est égal au nombre d'entiers $k \in [\![1\,;2n]\!]$ tels que $S_k(\omega) = 0$.
   (a) Comme S_n est la somme de n variables qui valent soit -1, soit 1 : pour $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega)$ ne peut valoir 0 que si le nombre de termes égaux à -1 dans la somme, est égal au nombre de termes égaux à 1.
   C'est donc impossible si n est impair, donc il ne s'agit bien de compter que les entiers k pairs compris entre 1 et $2n$ pour lesquels $S_k = 0$, ce qui s'écrit aussi :
   $$R_n = \mathrm{Card}(\{k \in [\![1\,;n]\!]\,; S_{2k} = 0\}).$$
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après 9.(c) :
   $$\mathbf{P}(S_{2k} = 0) = \mathbf{P}(S_{2k} = 2k - 2k) = \mathbf{P}(T_{2k} = k) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = B_k.$$

(c) L'énoncé rappele ici que la variable indicatrice $\mathbb{1}_A$ d'un événement A, est la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé, et 0 sinon.

En définissant pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, l'événement $A_k = [S_{2k} = 0]$, la variable aléatoire R_n compte le nombre d'événement A_k réalisés, donc :

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}.$$

(d) Chaque variable indicatrice $\mathbb{1}_{A_k}$, en tant que variable de Bernoulli, admet une espérance qui vaut $\mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = \mathbf{P}(\mathbb{1}_{A_k} = 1) = \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0)$, donc par linéarité de l'espérance, R_n admet un espérance qui vaut :

$$\mathbf{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(S_{2k} = 0) = \sum_{k=1}^{n} B_k.$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Avec la notion de *quantité conjuguée*, on a :

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad \sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{k-(k-1)}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}.$$

La stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$ donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{k-1} \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{k+1} \Longrightarrow 0 < \sqrt{k} + \sqrt{k-1} \leqslant 2\sqrt{k} \leqslant \sqrt{k+1} + \sqrt{k},$$

et par stricte décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \overset{\times 2>0}{\Longrightarrow} 2\big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\big(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\big).$$

12. En mettant en lien le résultat précédent avec celui de la question 7., on peut écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\big(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\big) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \leqslant B_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\big(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\big).$$

En ne gardant que les deux termes extrêmes et B_k au centre, le passage à la somme dans les inégalités quand k varie de 1 à n donne :

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \big(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} B_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \big(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\big) \iff \frac{2}{\sqrt{\pi}}\big(\sqrt{n+2} - \sqrt{2}\big) \leqslant \mathbf{E}(R_n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}.$$

En divisant les deux membres par $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n}$, on obtient :

$$\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \mathbf{E}(R_n) \leqslant 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{n}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1} - 0 = 1$ par continuité de la racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \mathbf{E}(R_n) = 1, \quad \text{soit :} \quad \mathbf{E}(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Partie 4.

13. (a) L'équivalent : $B_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ obtenu à la fin de la partie 2, donne :

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \iff \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

(b) Soit x un réel de $[0\,;4[$: pour tout entier $n \geqslant 1$, $n^2\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\sqrt{n\pi}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n > 0$.

Puisque $0 \leqslant x < 4$, alors $0 \leqslant \dfrac{x}{4} < 1$, donc par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n\pi}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n = 0$, donc on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}} = 0$, c'est-à-dire : $\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge, puisque $2 > 1$: le critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, assure alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge est elle-même convergente.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;4[$ par : $\forall x \in [0\,;4[,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

14. On ne sait pas dériver une fonction définie par une somme de série, donc in revient à la définition initiale de la croissance ; soient x et y deux réels de $[0\,;4[$ tels que $0 \leqslant x \leqslant y < 4$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \leqslant y^n$ par croissance de la fonction puissance n-ième sur $\mathbb{R}^+$, donc puisque $\binom{2n}{n} > 0$, alors $\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leqslant \dfrac{y^n}{\binom{2n}{n}}$, donc par sommation de cette inégalité pour n variant de 1 à $+\infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^n}{\binom{2n}{n}} \iff f(x) \leqslant f(y).$$

La fonction f est bien croissante sur $[0\,;4[$.

L'énoncé admettait dans la suite que f est continue sur $]0\,;4[$.

15. (a) Soit $x \in [0\,;4[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant B_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \leqslant \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \iff \sqrt{(n+1)\pi} \geqslant \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \geqslant \sqrt{n\pi} \Longrightarrow (n+1)\sqrt{\pi} \geqslant \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \geqslant \sqrt{\pi}$$

car $(n+1) \geqslant \sqrt{n+1}$ vu que $n+1 \geqslant 2$ et $\sqrt{n} \geqslant 1$, donc en multipliant tous les membres de la dernière inégalité par $\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$:

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leqslant \frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leqslant \sqrt{\pi}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n.$$

(b) Puisque $0 \leqslant \dfrac{x}{4} < 1$, alors la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n$ et la série géométrique dérivée $\sum\limits_{n\geqslant 1}(n+1)\left(\dfrac{x}{4}\right)^n = \sum\limits_{n\geqslant 2} n\left(\dfrac{x}{4}\right)^{n-1}$, qui est une série géométrique dérivée, toutes deux de raison $\dfrac{x}{4}$, sont convergentes, tout comme celle de terme général $\dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ d'après 13.(b).

On peut donc sommer la double inégalité de la question précédente lorsque n varie de 1 à $+\infty$:

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}} \leqslant \sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{x}{4}\right)^n \iff \sqrt{\pi}\frac{x/4}{1-x/4} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{x}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n\right).$$

Le membre de gauche est égal à $\sqrt{\pi}\dfrac{x}{4-x}$, et celui de droite vaut :

$$\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}+\frac{x}{4-x}\right)=\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{(1-x/4)^2}+\frac{x}{4-x}\right),$$

d'où le résultat voulu. Mais alors :

puisque $\lim\limits_{x\to 4^-} 4-x=0^+$, alors $\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{\pi}\dfrac{x}{4-x}=+\infty$, donc par comparaison de limites :

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=+\infty.$$

La courbe de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x=4$.

Ensuite, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\pi}\dfrac{x}{4-x}=0=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\pi}\left(\dfrac{x}{4}\times\dfrac{1}{(1-x/4)^2}+\dfrac{x}{4-x}\right)=0$, alors par encadrement :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

Comme $f(0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{0^n}{\binom{2n}{n}}=0$, on en déduit que f est continue en 0.

16. Soit x un réel de $[0\,;4[$. Puisque $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ est une somme de termes tous positifs, alors cette somme est supérieure ou égale à son premier terme, qui vaut $\dfrac{x}{\binom{2}{1}}=\dfrac{x}{2}$:

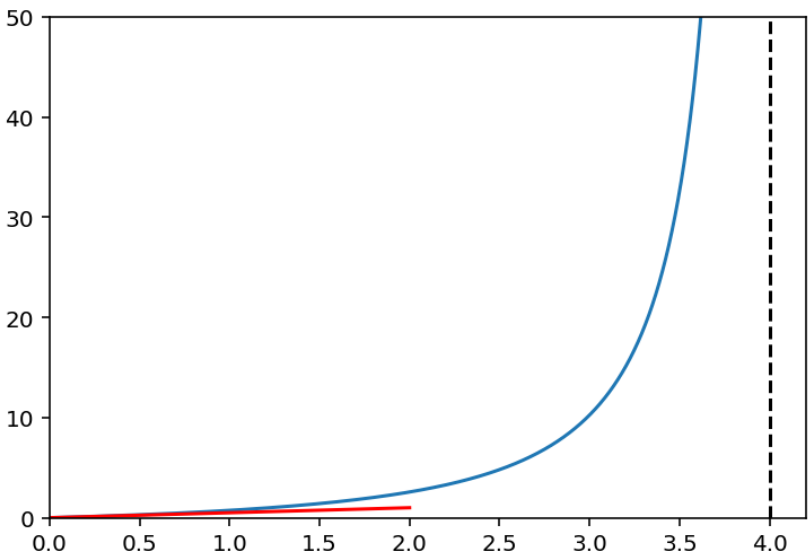
$$\forall x\in[0\,;4[,\quad f(x)\geqslant\frac{x}{2}.$$

17. L'énoncé admettait pour finir que :

$$f(x)\underset{0}{=}\frac{x}{2}+o(x).$$

Ce résultat signifie que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc que f est dérivable en 0, et que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation : $y=\dfrac{x}{2}$.

On en déduit l'allure du tracé de la courbe de f sur $[0\,;4[$:



★★★ FIN DU SUJET ★★★