501989

CHATEL

NATHAN

16/12/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 501989

Né(e) le 16/12/2005

Signature

Nom CHATEC

Prénom (s) NATHAN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/09

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page

Exercice 1

Partie 1

1a/ $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1b/ $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\underline{J^2 = 3J}$

1c/ $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

$\underline{M^2 = 7J + 4I}$

1d/ $7M - 10I = \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

On a bien $\underline{7M - 10I = M^2}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

2a/ Soit $R(X) = X^2 - 7X + 10$

$$M^2 - 7M + 10I = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 7 & 7 \\ 7 & 21 & 7 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 0$$

$R(X)$ est un polynôme annulateur de M.

2b/ $\Delta = b^2 - 4AC$

$= 49 - (4 \times 1 \times 10)$

$= 9$

$= 3^2 > 0$ il y a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{7-3}{2} = 2$$

deux racines de R sont 2 et 5.

2c/ Les valeurs propres possibles de M se trouvent parmi les racines de son polynôme annulateur. Elles peuvent donc être 2 et 5.

3/ $MU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

$MU = 5U$ avec $U \neq 0$
U est donc vecteur propre de M associé à la valeur propre 5.

4/ $MV = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$MV = 2V$ avec $V \neq 0$
V est donc vecteur propre de M associé à la valeur propre 2.

$MW = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$MW = 2W$ avec $W \neq 0$
W est donc vecteur propre de M associé à la valeur propre 2.

5a/ $QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$QP = 3I$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3} QP = I$

5b/ $\frac{1}{3} QP = I$. P est donc inversible d'inverse

$P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

5c/ $PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$MP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

On a bien $PD = MP \iff PDP^{-1} = MPP^{-1}$

$M = PDP^{-1}$

5d Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3} PD^n Q$

Initialisation $n = 0$

$M^0 = I$ d'un côté

$\frac{1}{3} PD^0 Q = \frac{1}{3} PQ = I$ car $P^{-1} = \frac{1}{3} Q$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité, on suppose vrai $M^n = \frac{1}{3} PD^n Q$ pour un n quelconque.

Montrons que $M^{n+1} = \frac{1}{3} PD^{n+1} P^{-1}$.

$M \times M^n = M \left(\frac{1}{3} PD^n Q \right)$ d'après h.r

$M^{n+1} = \frac{1}{3} MPD^n Q$ par linéarité

$= \frac{1}{3} PDD^n Q$ car $MP = PD$ d'après 5c/

$M^{n+1} = \frac{1}{3} PD^{n+1} Q$

La propriété est vraie au rang suivant.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3} PD^n Q$

Numéro d'inscription 501989

Né(e) le 16/12/2005

Signature

Nom CHATEL

Prénom (s) NATHAN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/09

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page

Partie 2

6a/ $U_{n+1} = 5a_{n+1} + b_{n+1}$
$= 5(7a_n + b_n) - 10a_n$
$= 35a_n + 5b_n - 10a_n$
$= 25a_n + 5b_n$
$= 5(5a_n + b_n)$
$U_{n+1} = 5U_n$

$(U_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 5. *

* $U_n = U_0 \times q^n$
avec $U_0 = 1$
et $q = 5$

$U_n = 1 \times 5^n$
$= 5^n$

6b/ $V_{n+1} = -2a_{n+1} - b_{n+1}$
$= -2(7a_n + b_n) + 10a_n$
$= -14a_n - 2b_n + 10a_n$
$= -4a_n - 2b_n$
$= 2(-2a_n - b_n)$
$V_{n+1} = 2V_n$

$(V_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison 2

$V_n = V_0 \times q^n$
avec $V_0 = -1$
et $q = 2$

$V_n = -1 \times 2^n$
$= -2^n$

6c/ J'admets $a_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n)$

$$b_n = \frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n)$$

7/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$. $M^n = a_n M + b_n I$

Initialisation $n = 0$

$M^0 = I$ d'un côté.

$a_0 M + b_0 I = 1 \times I = I$ de l'autre.

La propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité: on suppose vrai $M^n = a_n M + b_n I$ pour un n quelconque. Montrons que $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$

J'admets la récurrence

Partie 3

8a / Le jour numéro 1. Le chat se nourrit dans la maison 1. La probabilité qu'il se nourrisse dans la même maison au jour 2 est donc de $\frac{3}{5}$ d'après l'énoncé.

On a donc $P(X_2 = 1) = \frac{3}{5}$

Il se nourrit au deuxième jour de manière équiprobable dans la maison 2 ou 3. C'est-à-dire qu'au jour 2, il y a 1 chance sur 5 pour qu'il se nourrisse dans la maison 2 et une chance sur 5 qu'il se nourrisse dans la maison 3 soit

$$P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = \frac{1}{5}.$$

k	1	2	3	Total
$P(X_2 = k)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$E(X_2) = \sum P(X_2 = k) \cdot k$$
$$= 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5}$$

$$E(X_2) = \frac{8}{5}$$

$$E(X_2^2) = \sum P(X_2 = k) \times k^2$$
$$= 1 \times \frac{3}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5}$$
$$= \frac{16}{5}$$

d'après Huygens, $V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2$

$$= \frac{16}{5} - \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{5} - \frac{64}{25}$$

$$= \frac{80-64}{25}$$

$$V(X_2) = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

l'écart type de X_2 est donné par $\sigma_2 = \sqrt{V(X_2)}$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{4}{5}$$

9a / $P(X_3 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{25}$

$P(X_3 = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{25}$

$P(X_3 = 3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{25}$

k	1	2	3	Total
$P(X_3 = k)$	$\frac{11}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{25}$	1

Numéro d'inscription 501989

Né(e) le 16 / 12 / 2005

Signature

Nom CHATEL

Prénom (s) NATHAN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 / 09

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page

9a / justifications loi de X_3.

Maison 1, 2 et 3 forment un système complet d'événements. On peut donc utiliser la formule des probabilités totales.

$$P(X_3 = 1) = P(X_2 = 1) \times P_{[X_2=1]}(X_3 = 1) + P(X_2 = 2)$$

$$\times P_{[X_2=2]}(X_3 = 1) + P(X_2 = 3) \times P_{[X_2=3]}(X_3 = 1)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{11}{25}$$

ainsi de suite pour $P(X_3 = 2)$ et $P(X_3 = 3)$

9b / $P_{[X_3=3]}(X_2 = 2) = \dfrac{P([X_3 = 3] \cap [X_2 = 2])}{P(X_3 = 3)}$

$$= \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{7}{25}} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{1}{25} \times \frac{25}{7} = \frac{1}{7}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Le troisième jour, le chat s'est nourri dans la maison 3. La probabilité qu'il se soit nourrit dans la deuxième maison le même jour est $P_{[X_3=3]}(X_2=2) = \frac{1}{7}$

10a) $C_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) \\ P(X_{n+1}=2) \\ P(X_{n+1}=3) \end{pmatrix}$

d'après la formule des probabilités totales :

$P(X_{n+1}=1) = P(X_n=1) \times P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) + P(X_n=2) \times P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1])$

$+ P(X_n=3) \times P_{[X_n=3]}([X_{n+1}=1])$

$P(X_{n+1}=1) = \frac{3}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=2) + \frac{1}{5} P(X_n=3)$

$P(X_{n+1}=2) = P(X_n=1) \times P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=2]) + P(X_n=2) \times P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=2])$

$+ P(X_n=3) \times P_{[X_n=3]}([X_{n+1}=2])$

$P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{5} P(X_n=1) + \frac{3}{5} P(X_n=2) + \frac{1}{5} P(X_n=3)$

$$P(X_{n+1}=3) = P(X_n=1) \times P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=3]) + P(X_n=2) \times P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=3)$$

$$+ P(X_n=3) \times P_{[X_n=3]}([X_{n+1}=3])$$

$$P(X_{n+1}=3) = \frac{1}{5} P(X_n=1) + \frac{1}{5} P(X_n=2) + \frac{3}{5} P(X_n=3)$$

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} 3/5\, P(X_n=1) + 1/5\, P(X_n=2) + 1/5\, P(X_n=3) \\ 1/5\, P(X_n=1) + 3/5\, P(X_n=2) + 1/5\, P(X_n=3) \\ 1/5\, P(X_n=1) + 1/5\, P(X_n=2) + 3/5\, P(X_n=3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} C_n$$

$$C_{n+1} = \frac{1}{5} M \; C_n$$

10b / Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$

<u>Initialisation</u> $n=1$

$C_1 = C_1$ d'un côté

$\frac{1}{5^0} M^0 C_1 = C_1$ de l'autre

La propriété est vraie pour $n=1$

<u>Hérédité</u>, on suppose vrai $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$ pour un n quelconque.
Montrons que $C_{n+1} = \frac{1}{5^n} M^n C_1$ au rang suivant

$C_{n+1} = \frac{1}{5} M C_n$ d'après 10a/

$= \frac{1}{5} M \left(\frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1 \right)$ d'après h.re

$C_{n+1} = \frac{1}{5^n} M^n C_1$

La propriété est vraie au rang suivant.

Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$.

Numéro d'inscription 501989

Né(e) le 16/12/2005

Nom CHATEC

Prénom (s) NATHAN

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/09

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page

10c /

$$C_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} C_1$$

$$= \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5^{n-1}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2^n}{5^{n-1}} \\ 1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}} \\ 1 - \frac{2^{n-1}}{5^{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$C_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \\ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\cancel{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{2}{3} < 1}$

On obtient :

k	1	2	3
$P(X_n = k)$	$\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$	$\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$	$\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$

11a / $E(X_n) = \sum P(X_n = k) \cdot k$

$$E(X_n) = \frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) + 1\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right))$$

11b / $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = 2$

Partie 4

12/ la requêtre renvoie le nom des chattes grises

13/ UPDATE propriétaires SET idprop = 1234 WHERE pucechat= 987654321

14/

CREATE idchat = 457 , nomchat = Niels , race = birmane, sexe : 'M', couleur = blanche , âge = 1 , poids =2 FROM chats

15/ SELECT chats. nomchat, race, puce, nomprop, adresse FROM INNERJOIN chats , propriétaires ON chat. puce = propriétaires . pucechat .

Exercice 2

Partie 1

1/ $f(x) = e^{x} + e^{-x}$

f est dérivable d'après l'énoncé et

$f'(x) = e^{x} - e^{-x}$. On a bien $f'(x) = g(x)$

$g(x) = e^{x} - e^{-x}$
g est dérivable d'après l'énoncé.
$g'(x) = e^{x} - (-e^{-x}) = e^{x} + e^{-x}$ On a bien $g'(x) = f(x)$

$x \to +\infty$ $\qquad$ $x \to -\infty$

2a / $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} -e^{-x} = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} -e^{-x} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

2b / $g'(x) = e^{x} + e^{-x}$

Par propriété de la fonction exponentielle. $e^{x} \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
$g'(x) \geq 0$
g est donc croissante.

Numéro d'inscription: 501989

Né(e) le: 16/12/2005

Nom: CHATEL

Prénom (s): NATHAN

Signature

20 / 20

Ecricome — Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/09

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page.

2b /

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3a / Avec $x = 0$ $\quad g(0) = e^{0} - e^{-0}$

$= 1 - 1$

$= 0$

$g(x) = 0$ avec $x = 0$.

3b / g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et passe de valeur négative à positive à partir de $x = 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ a une solution unique qui est $x = 0$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3c / d'après 1/ $f(x) = g'(x)$ et $f'(x) = g(x)$

On en déduit donc que f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $]0, +\infty[$ grâce au tableau de signe de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3d / $f'(x) = g(x)$ donc $f''(x) = g'(x)$
Or, $g'(x) = f(x)$ donc :

$$f''(x) = e^{x} + e^{-x}$$

Par propriété de la fonction exponentielle, $e^{x} \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
$f''(x) \geq 0$
f est donc convexe sur $\mathbb{R}$

4 / $g'(x) = f(x)$ donc $g''(x) = f'(x)$
Or $f'(x) = g(x)$ donc :

$$g''(x) = g(x) = e^{x} - e^{-x}$$

d'après le tableau de signe de g question 3b/ on conclu que g est concave sur $]-\infty, 0[$ admet un point d'inflexion en 0 puis est convexe sur $[0, +\infty[$.

5a/ Équation de tangente de $\mathcal{C}g$ au point d'abscisse 0.

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$
$$= 2(x-0) + 0$$
$$y = 2x$$

5b / g est convexe sur $[0, +\infty[$. g est donc au-dessus de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

con concave

5c/ Sur $]-\infty, 0[$ g est en ~~dessous~~ de la tangente $y = 2x$ donc $\forall x \leq 0$ $g(x) \leq 2x$

Sur $[0, +\infty[$ g est au dessus de la tangente $y = 2x$ car g est convexe donc $\forall x \geq 0$, $g(x) \geq 2x$

6a/ Sur $]-\infty, 0[$, $f(x) > 0$ et $g(x) < 0$

On a donc $f(x) \geq g(x)$

Sur $[0, +\infty[$, les deux fonctions divergent en $+\infty$ mais comme $e^{x} \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ alors $e^{x} + e^{-x} \geq e^{x} - e^{-x}$
donc $f(x) \geq g(x)$

Sur $\mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$

6b/

Numéro d'inscription 501989

Né(e) le 16 / 12 / 2005

Nom CHATEC

Prénom (s) NATHAN

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

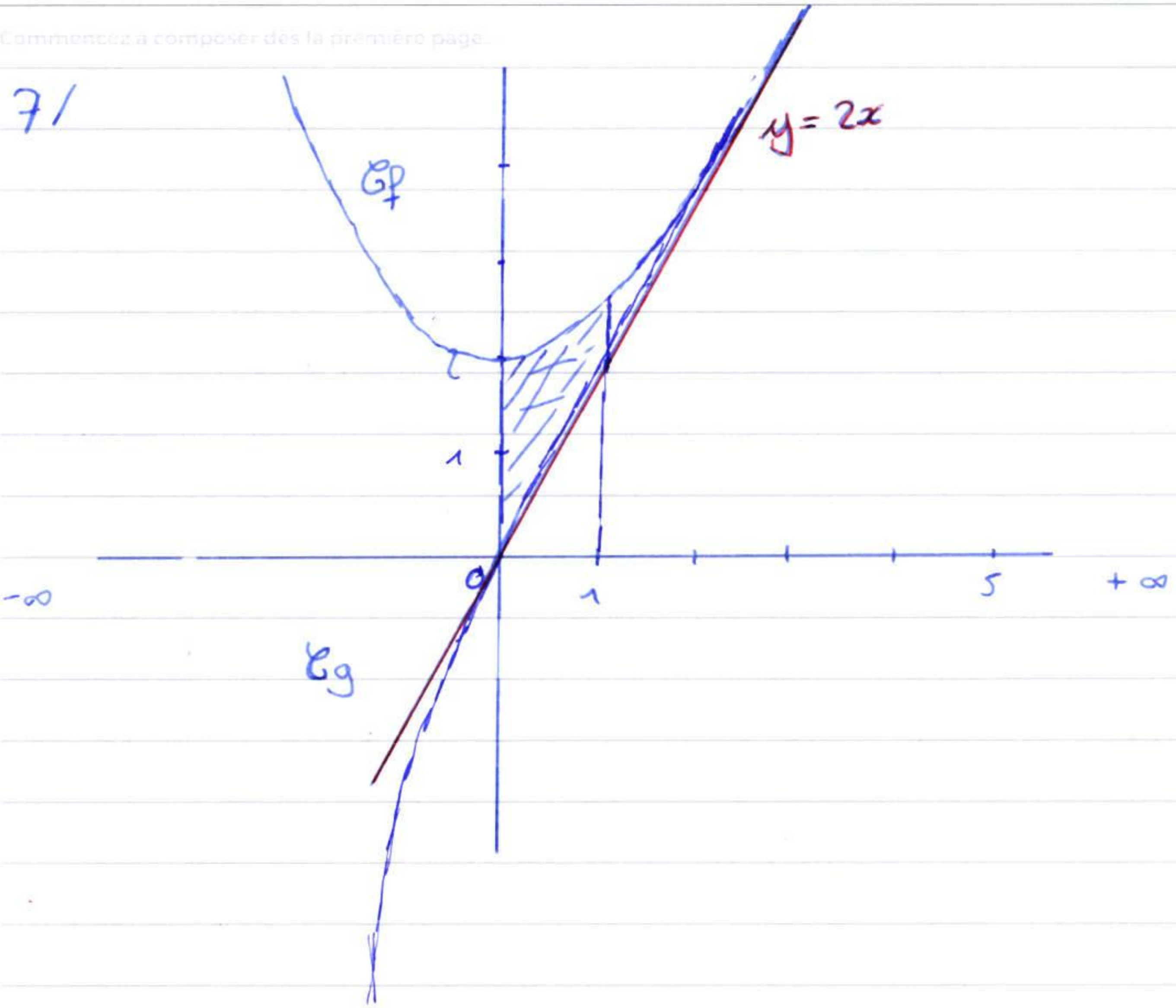
Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 09

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page.

7/



8a/ Voir 7/

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

8b /

8c /

9a/ $h(x) = e^{x} + e^{-x} - 2 - x^{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$h'(x) = e^{x} - e^{-x} - 2x$

9b/ On peut déduire $\forall x \in \mathbb{R}$ que $f(x) \geqslant 2x + x^{2}$ en étudiant le signe de $h(x)$ grâce à la dérivée. J'admets par faute de temps.

9c/ $k'(x) = e^{x} + e^{-x} - 2 - x^{2}$

9d/ J'admets $g(x) \leqslant 2x + \frac{1}{3}x^{3}$ $\forall x \leqslant 0$

$g(x) \geqslant 2x + \frac{1}{3}x^{3}$ $\forall x \geqslant 0$

Partie 2

10/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$g(x) = \frac{1}{n}.$$

$$e^{x} - e^{-x} = \frac{1}{n}$$

J'admets l'unique solution et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $g(U_n) = \frac{1}{n}$

11/ $g(U_n) = e^{U_n} - e^{-U_n}$

12/

13/

14a/
```
def d(x):
    x = n
d(x) = np.exp(x) - np.exp(-x) - 1/x
```

~~14~~b/

14c/ On peut ici déduire que U_n converge vers 0.

Exercice 3

Partie 1

1a/ $T \sim \mathcal{E}(1)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

peut être considérée comme une densité de T.

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 1 \qquad V(T) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

1b/ $$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est la fonction de répartition de T.

1c/ $P(T \leq 3) = 1 - e^{-3}$

est la probabilité que le papillon vive au plus 3 jours.

1d/ $$P_{[T>1]}(T \geq 2) = \frac{P([T>1] \cap [T \geq 2])}{P(T>1)}$$

$$= \frac{P(T \geq 2)}{1 - P(T \leq 1)}$$

$$= \frac{1 - P(T \leq 2)}{1 - P(T \leq 1)} = \frac{1 - (1 - e^{-2})}{1 - (1 - e^{-1})} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}}$$

Numéro d'inscription 501989

Né(e) le 16/12/2005

Nom CHATEL

Prénom (s) NATHAN

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 09

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page

2/ Soit $U \sim \mathcal{U}]0,1[$ et $X = -\ln(U)$

2a/ Une densité de U peut être :

$$f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{sinon} \\ 1 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Sa fonction de répartition :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2b/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X \leq x)$
$= P(-\ln(U) \leq x)$
$= P(-U \leq e^{-x})$
$= P(U \geq e^{-x})$

$\forall x < 0$
2c/ $P(X \leq x) = P(U \geq e^{-x})$
Or $e^{-x} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ alors $P(X \leq 0) = 0$ $\forall x < 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$$P(X \leq x) = P(U \geq e^{-x})$$
$$= 1 - F_U(e^{-x})$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^{-x} < 0 \quad \text{d'après 2c)} \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 < e^{-x} < 1 \\ 1 - 1 & \text{si } e^{-x} > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } e^{-x} < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 < e^{-x} < 1 \\ 0 & \text{si } e^{-x} > 1 \end{cases}$$

$$\cancel{= \begin{cases} 0 \end{cases}}$$

2d /

2e / ~~np. random (0, 1)~~

np. exponential (1)

Partie 2

3a / Soit $A > 0$

$$I_1(A) = \int_0^A e^{-x} \, dx$$

$$= \left[- e^{-x} \right]_0^A$$

$$= (-e^{-A}) - (-e^{-0})$$

$$I_1(A) = 1 - e^{-A}$$

3b / $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A} = 0$

I_1 converge et $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

4 / $\forall A > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad I_n(A) = x^{n-1} e^{-x} dx$

$$I_{n+1}(A) = \int_0^A x^n e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-x^n e^{-x}\right]_0^A - \int_0^A n x^{n-1} e^{-x}\,dx \quad \text{par IPP}$$

$$= \left[-x^n \times \frac{1}{e^x}\right]_0^A + n\int_0^A x^{n-1} + e^{-x}\,dx$$

par linéarité

$$I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^A} + n\, I_n(A)$$

5/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(A) = k$ avec k une limite finie alors $I_{n+1}(A)$ aura une limite finie et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1}(A) = -\frac{A^n}{e^A} + n\, I_n(A)$

6/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ converge et que $I_{n+1} = n\, I_n$

Initialisation $n=1$

I_1 converge et vaut 1 d'après 3b/
la propriété I_n converge est vraie pour $n=1$

Hérédité : on suppose vrai que I_n converge pour un n quelconque, montrons que I_{n+1} converge et vaut $n\, I_n$

Numéro d'inscription 501989

Né(e) le 16/12/2005

Nom CHATEC

Prénom (s) NATHAN

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/09

Numéro de table 002

$I_{n+1}(A) = -\dfrac{A^n}{e^A} + n\, I_n(A)$

d'après qu 4/

$\lim\limits_{A \to +\infty} -\dfrac{A^n}{e^A} = 0$ par théorème de croissances comparées

$I_{n+1} = n\, I_n(A)$

On d'après h.r I_n converge donc I_{n+1} converge et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_{n+1} = n\, I_n$

Par récurrence, I_n converge et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_{n+1} = n\, I_n$

7/

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Partie 3

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

déf sur $\mathbb{R}$

8/ Sur $]-\infty, 0[$, $f_n(x) = 0 \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx = 0$

Sur $[0, +\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \geq 0$

car $n > 0$ et $x \geq 0$ et $e^{-x} \geq 0$ par propriété de l'exponentielle.

$A > 0$ $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}\,dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^A x^{n-1} e^{-x}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^A In(A)$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} In(A) = (n-1)!$ d'après 7

$\displaystyle = \frac{1}{(n-1)!} (n-1)!$

$= 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_n(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_n(x)\,dx \quad \text{relation de Chasles}$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

f_n est une densité de probabilité.

9/ $\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}}$ Etude de $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\,dx$

Sur $]-\infty, 0[$, $\int_{-\infty}^{0} x\, f_n(x)\,dx = 0$

$A > 0$ Sur $[0, +\infty[$, $\int_{0}^{A} x \cdot \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}\,dx$

$$= \int_0^A \frac{1}{(n-1)!} x^n e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^A I_{n+1}(A)\,dx$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} I_{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\, n\, I_n \qquad \text{Or, } I_n = (n-1)!$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\, n = n$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_m(x)\, dx$ converge et Y admet une espérance. $E(Y) = m$

9b/ $F_m = \frac{1}{N}(Y_1 + \ldots + Y_N)$

$E(F_m) = E\left(\frac{1}{N}(Y_1 + \ldots + Y_N)\right)$

$= \frac{1}{N}(N E(Y))$

$E(F_m) = E(Y)$

$V(F_m) = V\left(\frac{1}{N}(Y_1 + \ldots + Y_N)\right)$

$= \frac{1}{N^2} N V(Y)$

$V(F_m) = \frac{1}{N} V(Y)$

9e/ On estime que $m = 3$

Numéro d'inscription | 5 0 1 9 8 9

Né(e) le | 1 6 / 1 2 / 2 0 0 5

Nom | C H A T E L

Prénom (s) | M A T H A W

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques T

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 9 / 0 9

Numéro de table 0 0 2

Commencez à composer dès la première page

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE