502218

KELLER

EVARISTE

21/07/2006

Note de délibération : 19.57 / 20

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

19.57 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 08

Numéro de table 020

Exercice 1 :

1) • $E_{O_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $O_3 M + M O_3 = O_3 \}$

donc $\boxed{E_{O_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \}}$

• $E_{I_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $I_3 M + M I_3 = O_3 \}$

$M \in E_{I_3} \iff 2M = O_3$

$\iff M = O_3$

donc $\boxed{E_{I_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \text{ telles que } M = O_3 \}}$

2) • $E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

• $E_C \neq \emptyset$ car la matrice nulle appartient à E_C (cf. E_{I_3})

• Soient M et $N \in E_C$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$C(\alpha M + N) + (\alpha M + N)C = \alpha CM + CN + \alpha MC + NC$$
$$= \alpha (CM + MC) + (CN + NC)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

Par définition, puisque M et $N \in E_C$, on a :

$$C(\alpha M+N) + (\alpha M+N)C = \alpha(CM+MC) + (CN+NC)$$
$$= 0_3$$

• Au total, on a donc bien E_C qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3) $E_A = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM + MA = 0_3 \}$

• Tout d'abord : on remarque que ${}^tA = A$.

• $M \in E_A \iff AM + MA = 0_3$
$\iff {}^t(AM+MA) = {}^t(0_3)$
$\iff {}^tM\,{}^tA + {}^tA\,{}^tM = 0_3$
$\iff {}^tMA + A{}^tM = 0_3$
$\iff A{}^tM + {}^tMA = 0_3$

Ainsi, ${}^tM \in E_A$

4) (a) A est symétrique, donc d'après le cours A est diagonalisable.

(b) $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

λ est valeur propre de A ssi $(A-\lambda I)$ est non inversible.

<u>Par la méthode du pivot de Gauss:</u>

- $L_1 \leftrightarrow L_2$: $\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

- $L_2 \leftarrow \underbrace{2}_{\neq 0} L_2 + (1-\lambda) L_1$ $\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2-\lambda-4 & 2(1-\lambda) \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

- $L_3 \leftarrow \underbrace{(\lambda^2-\lambda-4)}_{\neq 0} L_3 - 2L_2$ $\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2-\lambda-4 & 2(1-\lambda) \\ 0 & 0 & -\lambda^3+9\lambda \end{pmatrix}$

(c) D'après la question précédente : λ est valeur propre de $A \iff \lambda^3 - 9\lambda = 0$

Or, $\lambda^3 - 9\lambda = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda^2 - 9 = 0$

$\iff \lambda = 0$ ou $\lambda = -3$ ou $\lambda = 3$

donc $Sp(A) = \{-3 ; 0 ; 3\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• $AX = 0 \iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$

donc $\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)}$, avec $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ unique vecteur non nul donc base de E_0.

• $(A + 3I)X = 0 \iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases}$

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Signature

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 08

Numéro de table 020

donc $\underline{E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)}$, avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ unique vecteur non nul donc base de E_{-3}.

• $(A - 3I)X = 0 \iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \end{cases}$

donc $\underline{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$ avec $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ unique vecteur non nul, donc base de E_3.

Puisque A est diagonalisable (question 4)(a)), dont le spectre vaut $\{-3; 0; 3\}$: il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$, avec :

$$\underline{D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \underline{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

5) Par calcul matriciel, on a :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on en déduit : $P \cdot P = I \iff \boxed{P^{-1} = P}$

6) (a) $N \in E_D \iff DN + ND = 0_3$

Or : $DN = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$

et $ND = \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix}$

Ainsi, $DN + ND = 0_3 \iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = 0_3$

$\iff a = b = d = f = h = i = 0$

donc $\boxed{N \in E_D \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

(b) $E_D = \{ N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,,\ DN + ND = 0_3 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } c, e \text{ et } g \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque, clairement, les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont non proportionnels, on en déduit qu'ils forment une famille libre de trois vecteurs de E_D.

Ainsi, on a $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \mathcal{B}}$ une base de E_D.

De fait, $\boxed{\dim(E_D) = 3}$

7)(a) $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1} M P$. $\iff$ $M = P N P^{-1}$.

$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff AM + MA = 0_3 \\ &\iff P^{-1}(AM + MA)P = P^{-1}(0_3)P \\ &\iff P^{-1}AMP + P^{-1}MAP = 0_3 \end{aligned}$$

Or, $A = PDP^{-1}$ (cf. question 4)(c))

donc
$$\begin{aligned} M \in E_A &\iff P^{-1}(PDP^{-1})MP + P^{-1}M(PDP^{-1})P = 0_3 \\ &\iff D(P^{-1}MP) + (P^{-1}MP)D = 0_3 \\ &\iff DN + ND = 0_3 \\ &\iff N \in E_D \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{M \in E_A \iff N \in E_D}$

(b) Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E_D telle que :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \right)$$

et d'après la question précédente, on en déduit une base $\mathcal{A}$ de E_A telle que :

$$\boxed{\mathcal{A} = \left(P\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}P^{-1} \right)}$$

(on rappelle que $\underline{A = PDP^{-1}}$)

8) Soit $E_K = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), (A+M)^2 = A^2 + M^2 \}$

$$\begin{aligned} M \in E_K &\iff (A+M)^2 = A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M \\ &\iff AM + MA = 0 \\ &\iff M \in E_A \end{aligned}$$

Donc $\boxed{M \in E_K \iff M \in E_A}$

9) $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM + MA$

Puisque $\underline{\dim(E_A) = 3}$ (car $\mathcal{A}$, une base de E_A, est formée de 3 vecteurs), on en déduit :

$$\boxed{rg(\varphi) = 3}$$

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

Signature

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/08

Numéro de table 020

Exercice 2 :

1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• $t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(t^{-2})$

Or, d'après Riemann (cours), on a : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ convergente (car $2>1$).

Ainsi, d'après le critère de négligeabilité, on a : $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ convergente.
Puis, comme $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0;1]$, on en déduit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt \text{ convergente}}$$

(b) • $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ ($t \mapsto e^{-t}$ continue sur $[0;+\infty[$)

Soit $A>0$: $\int_0^A e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^A = -e^{-A}+1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

Or, $\lim_{A \to +\infty} -e^{-A} + 1 = 1$

donc $\boxed{I_0 = 1}$

- $I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} \, dt$

$t \mapsto te^{-t}$ continue sur $[0; +\infty[$.

Soit $A > 0$: $\int_0^A te^{-t} \, dt$.

<u>Intégration par parties</u> : $u(t) = t$ $\quad u'(t) = 1$

$v(t) = -e^{-t}$ $\quad v'(t) = e^{-t}$

avec u, v C^1 sur $[0; +\infty[$

donc $\int_0^A te^{-t} \, dt = \left[-te^{-t}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-t} \, dt$

$$= -Ae^{-A} + \int_0^A e^{-t} \, dt$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = 1$$

donc $\boxed{I_1 = 1}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0;+\infty[$.

$$t \geq 0$$
$$\Rightarrow 1+xt \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+xt} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

(car l'intégrale est positive et que $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ sont continues sur $[0;+\infty[$)

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge (il s'agit de I_0)

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \text{ converge, ceci } \forall x \in \mathbb{R}_+.}$$

3) $\underline{F(0)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \underline{1}$

4) $x \leq y \Rightarrow tx \leq ty$ (car $t \in [0;+\infty[$)

$$\Rightarrow 1+tx \leq 1+ty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+ty} \leq \frac{1}{1+tx}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+ty} \leq \frac{e^{-t}}{1+ty}$$

Puis, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

Ainsi, $\boxed{x \leq y \Longrightarrow F(y) \leqslant F(x)}$

On en déduit donc que F est décroissante.

5) (a) • si $x=0$: $\int_0^1 1\,dt = [t]_0^1 = 1$

• si $x>0$: $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \left[\frac{1}{x}\ln(1+xt)\right]_0^1$

$$= \frac{1}{x}\ln(1+x) - \frac{1}{x}\ln(1)$$

$$= \frac{\ln(1+x)}{x}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+xt}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}}$

(b) $\forall\ t \in [0;1]$: $e^{-t} \leqslant 1$

$$\Longrightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant \frac{1}{1+xt}$$

D'autre part, $\forall t \in [0;1]$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$: $\frac{e^{-t}}{1+xt} \geqslant 0$
et $\frac{1}{1+xt} \geqslant 0$

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Signature

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/08

Numéro de table 020

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$

Et par positivité de l'intégrale $(0<1)$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt}$$

(c) Soit $x > 0$.

On a :

$$t \geqslant 1$$
$$\Rightarrow xt \geqslant x$$
$$\Rightarrow 1+xt \geqslant 1+x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}$$

De plus, $\forall x > 0$ et $\forall t \geqslant 1$: $\frac{e^{-t}}{1+xt} \geqslant 0$ et $\frac{e^{-t}}{x} \geqslant 0$

19.57 / 20

Ainsi, on a :

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}$$

Puis, par positivité de l'intégrale :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt$$

càd $\forall t \geq 1$ et $\forall x > 0$:

$$\boxed{0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt}$$

(d) D'après Chasles : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$

Ainsi, on a d'après les questions précédentes :

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

Or, on sait que $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge et vaut e.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0$

De plus, lorsque $x > 0$: $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$

Or, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (par croissances comparées pour $\frac{\ln(x)}{x}$)

Ainsi, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0$

Et de fait, par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$$

6) (a) $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1-xt)(1+xt)}{1+xt}\,dt$$

(par linéarité de l'intégrale)

$$\dots = \int_0^{+\infty} \frac{\cancel{e^{-t}} - \cancel{e^{-t}} + e^{-t}x^2t^2}{1+xt}\,dt$$

d'où $\boxed{F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\,dt}$

(b) • $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$

$$= \underline{F(x) - I_0 + xI_1}$$

• $I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$

• $\forall\ t \geq 0$: $\quad 0 \leq \dfrac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leq t^2e^{-t}$

(car $\quad 1+xt \geq 1$)

Ainsi, <u>par positivité de l'intégrale</u> on a :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$$

(car $x^2 \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2}$$

7)(a)

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Signature

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/08

Numéro de table 020

(b) $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \dfrac{F(x) - 1}{x}$

Puisque $F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$, on en déduit :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} -1$$

Ainsi, F est dérivable en 0 et $\boxed{F'(0) = -1}$

NE RIEN ÉCRIRE

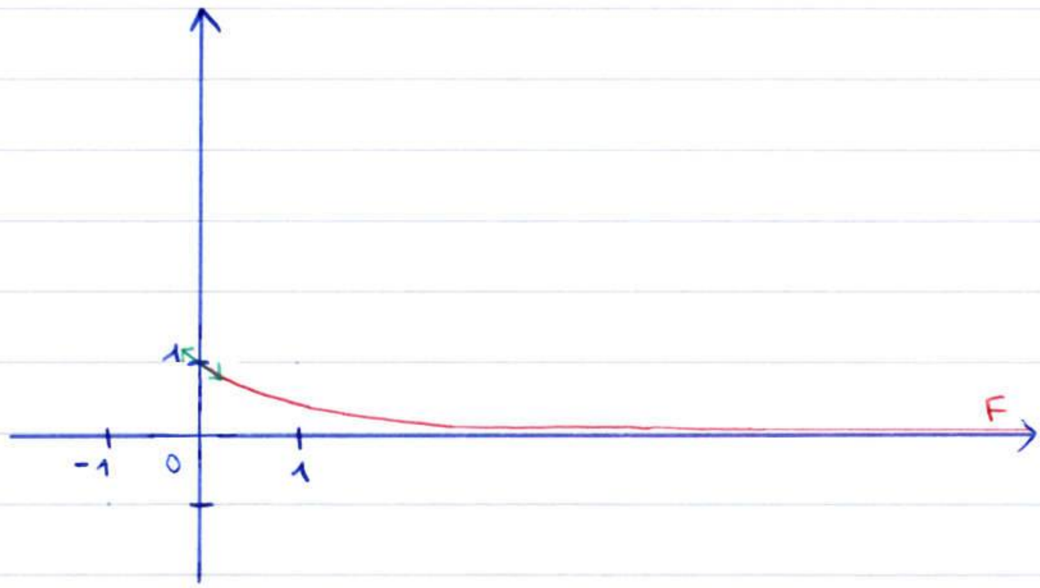
DANS CE CADRE

19.57 / 20

8) $T_0 : y = F'(0)(x-0) + F(0)$

$\boxed{T_0 : y = -x}$

Allure de la courbe représentative de F :



Exercice 3 :

Partie I)

1) Soit $i \in [\![1;n]\!]$.

• $i \geq 1$.

Si $x \geq 1 \Rightarrow x^{i+1} \geq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^{i+1}} \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \frac{i}{x^{i+1}} = f_i(x)$

Si $x < 1$: $f_i(x) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\boxed{f_i(x) \geq 0}$

• f_i est continue sur $[1;+\infty[$ et sur $]-\infty;1[$.

...

Ainsi, ~~puisque f_i n'est exprimée en fonction de i que sur $[1;+\infty[$, et que f_i est continue sur $[1;+\infty[$, on en déduit que f_i est continue~~

Ainsi, f_i est continue au moins sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ceci vrai pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

$\bullet \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f_i(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} f_i(x)\,dx$

$= 0 + \int_{1}^{+\infty} i \cdot x^{-i-1}\,dx$

Soit $A > 1$: $\int_{1}^{A} i\, x^{-i-1}\,dx = \left[-x^{-i}\right]_{1}^{A}$

$= -A^{-i} + 1$

$\xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge et vaut 1, ceci

pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

• Au total, f_i est une densité de probabilité, ceci vrai pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

2) (a) X_i admet une espérance ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge absolument.

$\bullet \int_{-\infty}^{1} x f_i(x)\,dx$ converge et vaut 0

• Soit $x \geqslant 1$: $x f_i(x) = x \times \frac{i}{x^{i+1}} = \frac{i}{x^i} > 0$

Or, d'après Riemann : $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge ssi $\alpha > 1$

donc on en déduit que $\int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^i}\,dx$ converge ssi $i > 1$

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Signature

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 08

Numéro de table 020

De fait, on en déduit que Xi admet une espérance ssi $i \geqslant 2$.

Et $\forall i \geqslant 2$, on a alors :

$$\int_1^A \frac{i}{x^i}\,dx = \left[-i^2 x^{-i-1}\right]_1^A$$

$$= -i^2 A^{-i-1} + i^2$$

$$\xrightarrow[A \to +\infty]{} i^2$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}\,dx$ converge et vaut i^2

De fait, $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge et vaut i^2

$\Rightarrow \boxed{E(X_i) = i^2}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

(b) Tout d'abord :

- $E(X_1) = 1^2 = 1$

donc le revenu mensuel moyen d'un individu de la catégorie socioprofessionnelle n° 1 est de 1000 €.

- $E(X_2) = 2^2 = 4$

donc le revenu mensuel moyen d'un individu de la catégorie socioprofessionnelle n° 2 est de 4000 €.

- ...

- $E(X_n) = n^2$

donc le revenu mensuel moyen d'un individu de la catégorie socioprofessionnelle n° n est de $n \times 1000$ €.

Ainsi, on en déduit le classement suivant :

$$E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n) \qquad (\text{car } n \geqslant 1)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{catégorie n°1, catégorie n°2, ..., catégorie n°n}}$

3) Soit $i \in [\![1;n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt$$

• <u>si $x < 1$</u> :

$$\boxed{F_i(x) = \int_{-\infty}^{1} f_i(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} 0\,dt = 0}$$

• <u>si $x \geqslant 1$</u> :

$$F_i(x) = \int_{-\infty}^{1} f_i(t)\,dt + \int_{1}^{x} f_i(t)\,dt$$

$$= 0 + \int_{1}^{x} \frac{i}{t^{i+1}}\,dt$$

$$= \left[-t^{-i}\right]_{1}^{x}$$

$$= -x^{-i} + 1$$

$$\boxed{F_i(x) = 1 - \frac{1}{x^i}}$$

<u>d'où, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall i \in [\![1;n]\!]$:</u>

$$\boxed{F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

4) $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$

$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\quad V_i = \dfrac{1}{U^{1/i}}$

(a) • $U(\Omega) =]0;1[$

$\Rightarrow (U^{1/i})(\Omega) =]0;1[$

$\Rightarrow \boxed{V_i(\Omega) = [1;+\infty[\quad = X_i(\Omega)}$

• Soit F_{V_i} la fonction de répartition de V_i

• si $x < 1$: $\boxed{F_{V_i}(x) = 0 \quad = F_i(x)}$ (car $x \notin V_i(\Omega)$)

• si $x \geq 1$: $F_{V_i}(x) = P(V_i \leq x)$

$= P(1/U^{1/i} \leq x)$

$= P(U^{1/i} \geq \frac{1}{x})$

$= P(U \geq \frac{1}{x^i})$

$= 1 - P(U \leq \frac{1}{x^i})$

$\boxed{F_{V_i}(x) = 1 - \dfrac{1}{x^i} = F_i(x)}$ (car $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$)

De fait, on a bien V_i qui suit la même loi que X_i

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Signature

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

19.57 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/08

Numéro de table 020

(b)

```
import numpy as np.
import numpy.random as rd.
def simulX(i):
        U= rd.random()
        X= 1/ U ** (1/i)
        return(X)
```

Partie II)

5)

```
import numpy as np.
import numpy.random as rd.

def simulY(n, p):
        Z = rd.randint(n-1, p)
        Y = Z + 1
        return(Y)
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

6)

```
def loiY(n, p):
        N = 10000
        loi = [0] * n
        for k in range(N) :
                y = simulY(n, p)
                loi[i] = y
        return loi
```

7)

```
import matplotlib.pyplot as plt.

def affichage_en_batons(n, p):
        x = simulY(n, p)
        y = loiY(n, p)
        plt.bar(x, y)
        plt.show()
```

8) (a) Il faut que la clé primaire d'une table dans une base de donnée puisse assurer la distinction entre cette table et les autres tables. Il doit donc s'agir d'un élément uniquement présent dans cette table.

(b) • Pour individu : insee
 • Pour departement : population
 • Pour profession : pcs

(c) individu — departement — profession

individu	departement	profession
• nom	• numero	• pcs
• prenom	• nom	• categorie
• departement	• population	• intitule
• insee		
• code_profession		

Donc chaque table est au moins reliée à l'une des deux autres tables.

(d)
```
SELECT DISTINCT i_code_profession
WHERE i_departement = 28
FROM individu
```

(e)
```
SELECT i_insee , i_code_profession FROM individu
SELECT p_categorie FROM profession WHERE
p_categorie = p_categorie. i_code_profession
```

Partie III)

9) Tout d'abord : $Z_m = X_Y$

Soit $x < 1$: $G_m(x) = P(Z_m \leqslant x) = P(X_Y \leq x)$

Or, $(X_Y \leq x) = \emptyset$ donc $\boxed{G_m(x) = 0}$

10) <u>Soit $x \geqslant 1$.</u>

(a) <u>Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$.</u>

$$F_i(x) = P(X_i \leqslant x)$$

Or, $P(Z_n \leq x) = P(Y=i) P_{(Y=i)}(Z_n \leq x)$

(d'après la formule des probabilités totales associée au s.c.e $(Y=i)_{i \in [\![1 ; n]\!]}$).

Or, on a également (parce que $Z_n = X_Y$) :

$$P(Z_n \leq x) = P(Y=i)\, P(X_i \leqslant x)$$

<u>D'où, $\forall\, i \in [\![1 ; n]\!]$:</u>

$$\boxed{P_{(Y=i)}(Z_n \leqslant x) = P(X_i \leqslant x) = F_i(x)}$$

(b) /

(c) /

Numéro d'inscription 502218

Né(e) le 21/07/2006

Signature

Nom KELLER

Prénom (s) EVARISTE

19.57 / 20

Écricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/08

Numéro de table 020

11) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

• G_n est continue et C^1 sur $]-\infty ; 1[$ et $[1;+\infty[$.
Qu'en est-il de la continuité de G_n à gauche en 1 ?

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} G_n(x) = 0 = G_n(1)}$$

donc G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

De plus, en tant que produit de fonctions de mêmes monotonie : $x \mapsto \dfrac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}$ est croissante sur $[1;+\infty[$

$$\Rightarrow 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n} = G_n(x) \text{ est croissante sur } [1;+\infty[$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.57 / 20

Puisque G_n est constante sur $]-\infty; 1[$, on en déduit qu'elle est croissante sur $]-\infty; 1[$.

Au total, G_n est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

- $\boxed{\lim_{x \to -\infty} G_n(x) = 0}$
- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} G_n(x) = 1}$

Donc de fait, Z_n est bien une variable aléatoire à densité.

12) /

13) (a) Soit $p = \frac{1}{n}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^n}\left(\dfrac{1 + xn - x}{n}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$