

504206

HAUSTANT

ADAM

21/10/2004

---

Note de délibération : 19.93 / 20

---



Numéro d'inscription

504206

Né(e) le

21 / 10 / 2004

Signature



Nom

HAUSTANT

Prénom (s)

ANAM

19.93 / 20

Ecricome

Épreuve:

Mathématiques appliquées

Sujet

1

ou

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01

/

11

Numéro de table

00

3

Exercice 1:

1) On a:

$$E_{O_3} = \{ O_3 M + M O_3 = O_3 \mid M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \}$$

$$= \{ O_3 \}$$

1) On résout, avec  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

$$O_3 M + M O_3 = O_3 \quad (\Leftrightarrow) \quad O_3 = O_3$$

Donc on a directement :

$$E_{O_3} = \{ M \mid M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

On résout, avec  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

$$I_3 M + M I_3 = O_3 \Leftrightarrow 2M = O_3$$

$$\Leftrightarrow M = O_3$$

$$\text{Donc } E_{I_3} = \{O_3\}$$

2) On a:

•  $E_c \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  par définition

$$\bullet O_3 M + M O_3 = O_3 \quad (\text{d'après 1})$$

Donc  $O_3 \in E_c$

• Montrons que  $E_c$  est stable pour combinaison linéaire

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $M, N \in E_c$ , on a:

$$C(\alpha M + \beta N) + (\alpha M + \beta N)C = \alpha CM + \beta CN + \alpha MC + \beta NC$$

$$= \alpha CM + \alpha MC + \beta CN + \beta NC$$

$$= \alpha (CM + MC) + \beta (CN + NC)$$

$$= \alpha O_3 + \beta O_3$$

$$= O_3$$

Donc  $E_C$  est stable par combinaison linéaire

D'où d'après le principe de la caractérisation en trois points  $E_C$  est un sous-espace vectoriel de  $M_3(\mathbb{R})$  ( $E_C$  étant).

3) Soit  $M \in E_A$ , on a :

$$AM + MA = O_3$$

$$\Rightarrow {}^t(AM + MA) = {}^t O_3$$

$$\Rightarrow {}^t(AM) + {}^t(MA) = O_3$$

$$\Rightarrow {}^t M {}^t A + {}^t A {}^t M = O_3$$

$$\Rightarrow {}^t M A + A {}^t M = O_3$$

$$\Rightarrow A {}^t M + {}^t M A = O_3$$

↓ linéarité  
de la transposition

↓  $A$  est symétrique  
donc égale à  
sa transposée

D'où :  ${}^t M \in E_A$

4a)  $A$  est symétrique. Donc  $A$  est diagonalisable  
d'après le théorème spectral

4b) Soit  $N \in \mathbb{R}$ , on a les équivalences suivantes: avec  $\vec{x} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$N$  est valeur propre de  $A \Leftrightarrow$  Il existe  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$   
non nulle telle que  
 $AX = NX$

On résout alors, avec  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $N \in \mathbb{R}$ :

$$AX = NX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = Nx \\ -2x + 2z = Ny \\ 2y - z = Nz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = Nx \\ -2x + 2z = Ny \\ 2y = N(z+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = Nx \\ -2x + 2z = \frac{N^2 x (z+1)}{2} \\ y = \frac{N(z+1)}{2} \end{cases}$$

Numéro d'inscription

504206

Signature

Né(e) le

21 / 10 / 2004

Nom

KAVSTAMT

Prénom (s)

ADAM

19.93 / 20



Épreuve : Mathématique appliquées

Sujet  1 ou  2  
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 11

Numéro de table 003

$$P) \begin{cases} x = 2y = N^2 x \\ -2x = N^2 \left( \frac{y+1}{2} \right) - 2y \\ y = \frac{N^2}{2} (y+1) \end{cases}$$

~~$$Q) \begin{cases} x = N^2 \\ y = \frac{N^2}{2} (y+1) \end{cases}$$~~

$$R) \begin{cases} -\frac{N^2}{4} y = \frac{N^2}{4} + y - N(y+1) = -\frac{N^3}{4} y - \frac{N^3}{4} + Ny \\ x = \frac{N^2}{4} y - \frac{N^2}{4} + y \\ y = -\frac{N^2}{2} (y+1) \end{cases}$$

$$S) \begin{cases} \frac{N^3}{4} y + \frac{N^3}{4} - \frac{N^2}{4} y - \frac{N^2}{4} - 2Ny + y - N = 0 \\ x = \frac{N^2}{4} y - \frac{N^2}{4} + y \\ y = \frac{N^2}{2} (y+1) \end{cases}$$

$$T) \begin{cases} y \left( \frac{N^3}{4} - \frac{N^2}{4} - 2N \right) = \frac{N^3}{4} - \frac{N^2}{4} \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

Sans suite

On admet l'équivalence suivante :

$$N \text{ est valeur propre de } A \Leftrightarrow N^3 - 9N = 0$$

Puisque on a :

$$N^3 - 9N = 0 \Leftrightarrow N(N^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow N(N-3)(N+3) = 0$$

On en déduit que 0, 3 et -3 sont les seules valeurs propres possibles de A.

$$\text{D'où } \text{Sp}(A) \subset \{0, -3, 3\}$$

4c) On résout, avec  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  :

$$AX = 0X \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \\ z = 2y \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$$

Il existe bien  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $AX = 0X$ .

Donc 0 est valeur propre de A et on a:

$$E_0(A) = \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Libre (formée d'un vecteur non nul) et génératrice de  $E_0(A)$ , la famille  $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$  forme une base de  $E_0(A)$ .

De même, on a, avec  $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ :

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3x \\ -2x + 2z = 3y \\ 2y - z = 3z \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} y = -x \\ -2x + 2z = -3x \\ -2x = 4z \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} y = 2z \\ 6z = 6z \\ x = -2z \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$$

Comme ce qui précède on déduit que 3 est une valeur propre de  $A$  et on a :

$$E_3(K) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Libre et génératrice de  $E_3(K)$ , la famille  $\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_3(K)$ .

De même, on a, avec  $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$  :

$$AX = -3X \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3x \\ -2x + 2z = -3y \\ 2y - z = -3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -2x + 2z = -6x \\ 4x = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = x \\ z = -2x \end{cases}$$

Numéro d'inscription

504206

Né(e) le

21 / 10 / 2004

Signature

Nom

HAUSTANT

Prénom (s)

ADAM

19.93 / 20

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

1

ou

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03

/ 11

Numéro de table

003

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{pmatrix}$$

De manière analogue à ce qui précède, on déduit que  $-3$  est en effet valeur propre de  $A$  et on a

$$E_{-3}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Libre et génératrice de  $E_{-3}(A)$ , la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_{-3}(A)$ .

Comme  $A$  est diagonalisable d'après 4a), on sait par théorème que  $A$  est semblable à une matrice diagonale  $D \in M_3(\mathbb{R})$  et que  $A$  s'écrit, avec  $D \in M_3(\mathbb{R})$  diagonale et  $P \in M_3(\mathbb{R})$  inversible :

$$A = PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow D = P^{-1}AP$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

D'après ce qui précède, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5) On calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } P^2 = 9I_3.$$

Puisque  $P$  est inversible, on a :

$$P^2 = 9I_3$$

$$\Rightarrow P = 9P^{-1}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{9}P$$

6a) On a les équivalences suivantes, avec  $N \in M_3(\mathbb{R})$ :

$$N \in E_D \Leftrightarrow DN + ND = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a - 3a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3c + 3c = 0 \\ -3d = 0 \\ 0 = 0 \\ 3f = 0 \\ 3g - 3g = 0 \\ 3h = 0 \\ 3i + 3i = 0 \end{cases}$$

~~$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d \end{cases}$$~~

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = d = f = h = i = 0 \\ c = c \\ e = e \\ g = g \end{cases}$$

$$N \in E_0 \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6b) On a alors :

$$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid g, e, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_0 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Liberté ? Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Numéro d'inscription

5 0 4 2 0 6

Signature



Né(e) le

2 1 / 1 0 / 2 0 0 4

Nom

H A U S T A N T

Prénom (s)

A D A M

19.93 / 20



Épreuve : *Mathématiques appliquées*

Sujet  1 ou  2  
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 11

Numéro de table 003

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Libre et génératrice de  $E_D$ , la famille  $B =$   
 $\left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_D$

Et en particulier, on a :  $\dim(E_D) = 3$

7a) Soit  $M \in M_3(\mathbb{R})$ , on a les équivalences suivantes :

$$M \in E_A \Leftrightarrow AM + MA = O_3$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}(AM + MA)P = P^{-1}O_3P$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}AMP + P^{-1}MAP = O_3$$

d'après  
4c),  $A = PDP^{-1}$

$$\Leftrightarrow P^{-1}(PDP^{-1})MP + P^{-1}M(PDP^{-1})P = O_3$$

$\downarrow P^{-1}P = I_3$

$$\Leftrightarrow DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = O_3$$

d'après  
l'énoncé

$$\Leftrightarrow DN + ND = O_3$$

$$M \in E_A \Leftrightarrow N \in E_D$$

7b) On a alors d'après 6b), successivement; sur on a :

$$N = P^{-1} M P \Rightarrow M = P N P^{-1}$$

$$E_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM + MA = O_3 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left( P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right)$$

$P^{-1} = \frac{1}{5} P$   
d'après 5)  
et  $\frac{1}{5} \neq 0$

$$E_A = \text{Vect} \left( P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \right)$$

8) On résout, avec  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ :

$$(A+M)^2 = A^2 + M^2 \Leftrightarrow (A+M)(A+M) = A^2 + M^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2$$

$$\Leftrightarrow AM + MA = O_3$$

Plus, l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant

$$(A+M)^2 = A^2 + M^2 \text{ est } E_A.$$

9)  $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on a:

Admis

Exercice 2:

1a)  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall t > 0$ , on a:

$$\frac{t^n e^{-t}}{1/t^2} = t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par croissance comparées}$$

Il vient alors:

$$t^n e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

De plus,  $\forall t \geq 1$ , on a  $t^{-n} e^{-t} \geq 0$  et  $\frac{1}{t^2} \geq 0$ .

D'après le cours, on sait également que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre  $2 > 1$  (d'après le cours).

D'où: par critère de comparaison (par négligeabilité)

d'intégrales à fonctions positives, il vient que:

$$\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ est convergente,}$$

donc  $t^n e^{-t}$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$ ,  
il vient finalement que:

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ est convergente } (\forall n \in \mathbb{N})$$

1b) On calcule, avec  $A > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-t} dt &= - \left[ e^{-t} \right]_0^A \\ &= - (e^{-A} - e^0) \end{aligned}$$

$$\int_0^A e^{-t} dt = 1 - e^{-A}$$

$$\text{On a } e^{-A} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{par composition}$$


$$\text{D'où on a: } \quad * \left[ \text{Donc } 1 - e^{-A} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 1 \right]$$

$$\underline{I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1}$$

Numéro d'inscription

504206

Signature



Né(e) le

21 / 10 / 2004

Nom

HADSTANT

Prénom(s)

ADAM

19.93 / 20

Ecritome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

ou

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05 /

11

Numéro de table

003

On pose  $u$  et  $v$  de classe  $C^1$  sur  $[0; A]$  (où  $A \geq 0$ ) telles que :

$$u'(x) = x \quad \leadsto \quad u(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$v'(x) = e^{-x} \quad \leadsto \quad v(x) = -e^{-x}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^A x e^{-x} dx = \left[ -x e^{-x} \right]_0^A + \int_0^A e^{-x} dx$$

$$= -A e^{-A} - \left[ e^{-x} \right]_0^A$$

$$= -A e^{-A} - (e^{-A} - e^0)$$

$$\int_0^A x e^{-x} dx = 1 - e^{-A} - A e^{-A}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

Or, on a :

$$Ae^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par croissances comparées}$$

$$e^{-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par comparaison}$$

D'où : on a :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$$

2)  $\forall x > 0$ , on a :

$$\frac{e^{-t}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2 e^{-t}}{xt} = \frac{t^2 e^{-t}}{x}$$

$$\text{Or, } \frac{t^2 e^{-t}}{x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } x > 0)$$

Et, si  $x = 0$ , on a :

$$\frac{e^{-t}}{\frac{1}{x^2}} = t^2 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, dans tous les cas, on a :

$$\frac{e^{-t}}{1+xt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$\forall t \geq 1$ ,  $\frac{e^{-t}}{1+xt}$  est continue (le dénominateur ne s'annule pas) et positive  $\nearrow$  (car  $x \geq 0$ ). De plus,  $\forall t \geq 1$ ,  $\frac{1}{t^2} \geq 0$

On, d'après le cours,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  est convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre  $2 > 1$ .

Donc, par critère de ~~majuscule~~ comparaison (par majorabilité) d'intégrales à fonction positives,

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \text{ converge}$$

$t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$  étant continue sur le segment  $[0, 1]$

(le dénominateur ne s'annule pas), il vient alors que,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \text{ converge}$$

3) On a :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0 \times t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

d'après 1e)

$$= \underline{I}_0$$

$$F(0) = 1$$

4) Soient  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$  tels que  $x \leq y$ ; on a:

$$x \leq y$$

$\downarrow t \geq 0$

$$\Rightarrow tx \leq ty$$

$$\Rightarrow 1 + tx \leq 1 + ty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+tx} \geq \frac{1}{1+ty}$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$  est  
décroissante  
sur  $]0, +\infty[$   
et  $1+tx, 1+ty \in ]0, +\infty[$   
 $\forall t \in [0, +\infty[$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+tx} \geq \frac{e^{-t}}{1+ty}$$

$\downarrow e^{-t} > 0$

croissance  
de l'intégrale  
et les intégrales  
et les intégrales  
convergentes  
d'après 2)

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+ty} dt$$

$$\Rightarrow \underline{F(y)} \leq \underline{F(x)} \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$$

Numéro d'inscription

504206

Signature

Né(e) le

21 / 10 / 2004

Nom

HADSTANT

Prénom (s)

ADAM

19.93 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

ou

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 /

11

Numéro de table

003

$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , comme on a :

$$x \leq y \Rightarrow F(y) \leq F(x)$$

On déduit que  $F$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

5a) Si  $x=0$ , on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+0} dt = \int_0^1 1 dt$$

$$= [t]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+0 \times t} dt = 1$$

Si  $x > 0$ , on a :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{x}{1+tx} dt \quad (\text{car } x > 0)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

$$= \frac{1}{x} \left[ \ln(|1+tx|) \right]_0^1 \quad \left. \begin{array}{l} 1+tx > 0 \\ \text{sur } x > 0 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{x} \left( \ln(1+1 \times x) - \ln(1 \times 0 \times x) \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left( \ln(1+x) - \ln(1) \right)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad , \text{ si } x > 0$$

5b)  $\forall x \geq 0$ , et  $\forall t \in [0, 1]$ , on a:

$$t \geq 0$$

$$\Rightarrow -t \leq 0$$

$t \mapsto e^t$  est strictement  
croissante sur  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{-t} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$

$1+xt > 0$   
 $\forall t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt} \quad \left. \begin{array}{l} \text{sur } \frac{e^{-t}}{1+xt} \geq 0 \\ \text{et } \forall x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt, \forall x > 0$$

(croissance  
de l'intégrale)

5c)  $\forall x > 0$  et  $\forall t \geq 1$ , on a:

$$t \geq 1$$

$$\Rightarrow t-1 \geq 0 \quad \downarrow x > 0$$

$$\Rightarrow x(t-1) \geq 0 \quad \downarrow \text{car } -1 < 0$$

$$\Rightarrow x(t-1) \geq -1$$

$$\Rightarrow xt - x \geq -1$$

$$\Rightarrow 1+xt \geq x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$$

$t \mapsto \frac{1}{t}$  est strictement  
décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$   
et  $\frac{1}{x} > 0$  et  $\frac{1}{1+xt} > 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+xt} \leq \frac{e^{-xt}}{x}$$

$\downarrow e^{-xt} > 0$   
 $\forall x \geq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt$$

(les intégrales  
étant convergentes

et par croissance

de l'intégrale)  $\Rightarrow 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$

$$\forall x > 0,$$

5d) On a  $\forall x \in \mathbb{C}, x > 0$ ,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+tx} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$$

Il vient d'après 5b) et 5c), en sommant les deux inégalités,

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt + \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après 5a)} \\ \text{sur } x > 0 \end{array} \right\}$$

On a:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(x(1+\frac{1}{x}))}{x}$$

Numéro d'inscription 504206

Signature 



Né(e) le 21 / 10 / 2004

Nom HADSTANT

Prénom(s) ADAM

19.93 / 20



Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet  1 ou  2  
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 11

Numéro de table 003

$$= \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} \quad (\text{propriété du logarithme})$$

Or,  $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  par croissance comparées

Donc, par croissance, il vient alors que :

$$\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

De plus,  $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$  étant convergente, il vient nécessairement que :

$$\frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc } \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'où : d'après le théorème d'encadrement par les fonctions, on a, d'après ce qui précède :

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

60) Soit  $x \geq 0$ , on a :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - xt) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - xt) dt$$

les intégrales  
étant toutes  
convergentes,  
par linéarité  
de l'intégrale

$$= \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t} (1 - xt) \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1+xt} - (1 - xt) \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1 - (1 - xt)(1 + xt)}{1 + xt} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1 - (1 - xt)^2}{1 + xt} \right) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{x^2 t^2}{1 + xt} dt$$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - xt) dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + xt} dt$$

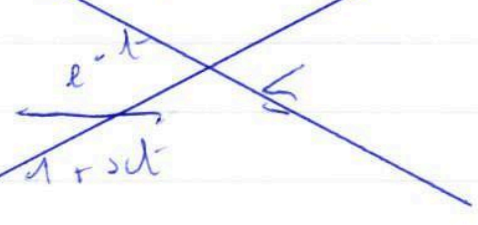
6b) D'après 6a), on a :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} (1 - \alpha t) dt = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + \alpha t} dt$$

$$\Rightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt + \alpha \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + \alpha t} dt$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{\alpha}{s^2} = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + \alpha t} dt$$

~~On, on a, d'après 5c) :  $\forall t \geq 1$  :~~



On,  $\forall t \geq 1$ , on a :

$$\alpha t \geq 0 \quad \text{car } \alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha t + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha t + 1} \leq 1$$

↓ décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\Rightarrow \frac{t^2 e^{-t}}{1 + \alpha t} \leq t^2 e^{-t}$$

↓ les intégrales étant convergentes

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1 + \alpha t} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+xt} dt \leq x^2 I_2$$

-  $x \mapsto x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+xt}$  étant positive sur  $\mathbb{R}_+$ , on peut établir d'après ce qui précède que :

$$0 \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+xt} dt \leq x^2 I_2$$

$$\Rightarrow 0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2, \forall x > 0$$

7a) Comme  $I_2$  est convergente, on a, d'après (6b),  $\forall x > 0$  :

~~$$0 \leq \frac{F(x) - I_0 + xI_1}{x^2} \leq I_2$$~~

$$0 \leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2$$

D'après le théorème d'encadrement, on a :

$$F(x) - I_0 + xI_1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc, il vient :

Numéro d'inscription

504206

Signature



Né(e) le

21 / 10 / 2004

Nom

HAUSTANT

Prénom (s)

ADAM

19.93 / 20

Ecritome

Épreuve :

Mathématique appliquées

Sujet

 1

ou

 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

08 / 11

Numéro de table

003

$$F(x) - I_0 + x I_1 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$$

$$\Rightarrow F(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$$

$$\downarrow I_0 = I_1 = 1 \text{ d'après 1b)}$$

7b) On a :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - x + o(x) - 1}{x}$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} -1 + o(1)$$

d'après 3) et 7a)

Il vient alors que :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} -1$$

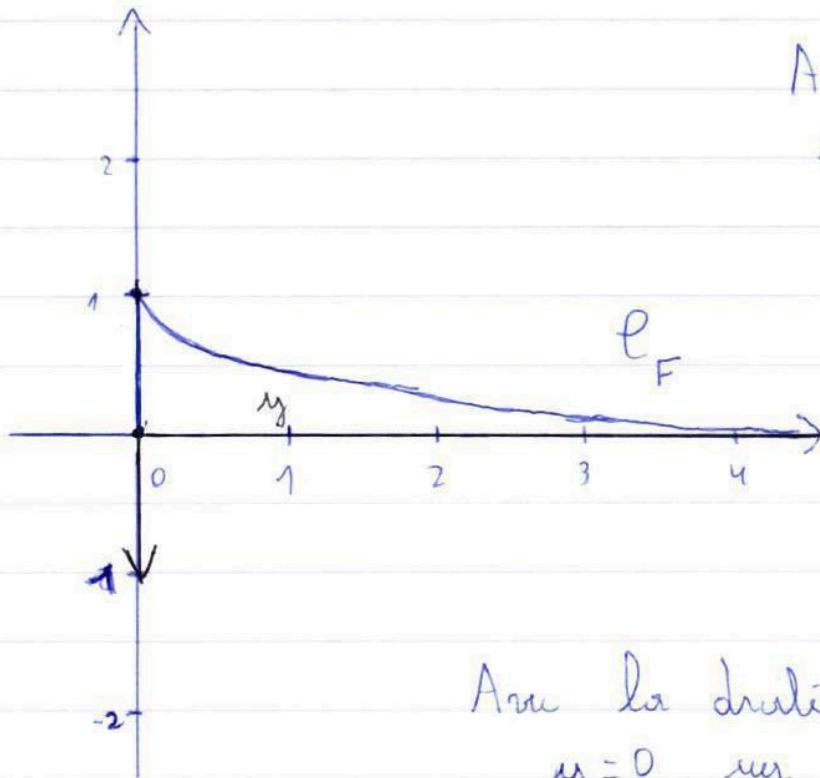
Donc  $F$  est dérivable en 0 et on a  $F'(0) = -1$ .

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

8) On a :



Avec  $f(0) = 1$   
et  $f'(0) = -1$

Et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Avec la droite  $y$  d'équation  
 $y = 0$  sur  $f_F$  admet une  
asymptote horizontale d'équation  
 $y = 0$  en  $+\infty$ .

### Exercice 3:

I-1).  $f_i$  est positive sur  $\mathbb{R}$  (en effet,  $\forall x \geq 1$ ,  $\frac{i}{x^{i+1}} \geq 0$  sur  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ).

•  $f_i$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 1.

• On a, avec  $A \geq 1$ , et  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ :

$$\int_{-\infty}^A f_i(x) dx = \int_1^A f_i(x) dx \quad (\text{Théorème})$$

$$= \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}} dx$$

$$= i \int_1^A x^{-i-1} dx$$

$$= i \left[ \frac{x^{-i}}{-i} \right]_1^A$$

$$= i \left( -\frac{1}{iA^i} - \left( -\frac{1}{1^i i} \right) \right)$$

$$= i \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{iA^i} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{A^i}$$

Or,  $A^i \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$

Donc  $\frac{1}{A^i} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$  par encadrement

Donc  $1 - \frac{1}{A^i} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) dx$  converge et vaut  $0+1=1$ .

D'où:  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f_i$  est une densité de probabilité

2a) On a les équivalences suivantes,

$X_i$  admet une espérance  $(\Leftrightarrow) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x) dx$  converge absolument

$f_i$  nulle en dehors de  $[1, +\infty[$

$(\Leftrightarrow) \int_1^{+\infty} x f_i(x) dx$  converge absolument

$\forall x > 1, x f_i(x) > 0$

$(\Leftrightarrow) \int_1^{+\infty} x f_i(x) dx$  converge

Numéro d'inscription 504206

Signature



Né(e) le 21 / 10 / 2004

Nom HAVSTANT

Prénom(s) ADAM

19.93 / 20



Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet  1 ou  2  
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 11

Numéro de table 003

On a, avec  $A \geq 1$ :

$$\int_1^A x f_i(x) dx = i \int_1^A \frac{1}{x^i} dx$$

Or, d'après le cours, on sait que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

De manière analogue,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i} dx$  converge si et seulement si  $i > 1$ , soit  $i \geq 2$ .

D'où :  $X_i$  admet une espérance si et seulement si  $i \geq 2$ .

On calcule alors, avec  $i \geq 2$  et  $A \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{1}{x^i} dx &= \left[ \frac{x^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^A \\ &= A \left( \frac{1}{A^{i-1}(1-i)} - \frac{1}{(1-i)} \right) \end{aligned}$$

Or,  $A^{i-1} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} +\infty \quad \forall i \geq 2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

$$\text{Donc } \frac{1}{A^{i-1}(1-i)} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Donc } \frac{1}{A^{i-1}(1-i)} - \frac{1}{(1-i)} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-i}$$

D'où: d'après ce qui précède, on a,  $\forall i \geq 2$ :

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x) dx$$

$$= i \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}$$

$$= i \times \frac{1}{i-1}$$

$$E(X_i) = \frac{i}{i-1} \quad \forall i \geq 2$$

3) Comme  $X_i(\Omega) = [1; +\infty[$ , on a:

$$F_i(x) = P(\underbrace{X_i \leq x}_{\text{impossible}}) = 0 \quad \text{si } x < 1$$

$$F_i(x) = P(X_i \leq x) \quad , \text{ si } x \geq 1$$

$$= \int_{-\infty}^x f_i(t) dt$$

$$= \int_1^x f_i(t) dt$$

↓ Charles

$$F_i(x) = 1 - \frac{1}{x^i} \quad , \text{ d'après 1) } , (\text{avec } x = t)$$

D'où:  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a bien:

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

4a) ~~Soit  $U \rightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$~~

4a) On a:

$$U(\Omega) = ]0, 1[$$

$$\text{donc } U^{1/i}(\Omega) = ]0, 1[$$

$$\text{donc } V_i(\Omega) = \frac{1}{U^{1/i}}(\Omega) = ]1, +\infty[$$

Il vient alors :

$$P(\underbrace{V_i \leq x}_\text{impossible}) = 0 \quad \text{si } x < 1$$

$$P(V_i \leq x) = P\left(\frac{1}{U^{1/x}} \leq x\right) \quad \text{si } x \geq 1$$

$$= P\left(\frac{1}{x} \leq U^{1/x}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{x^i} \leq U\right)$$

$$= 1 - P\left(U \leq \frac{1}{x^i}\right)$$

$$= \cancel{1} - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right)$$

$x \mapsto x^i$  est  
strictement croissante  
sur  $[1, +\infty[$

$U$  a densité

sur  $\frac{1}{x^i} \in ]0, 1[$   
 $\forall x \geq 1$

$$P(V_i \leq x) = 1 - \frac{1}{x^i}$$

D'où, d'après ce qui précède  $V_i$  suit la  
même loi que  $X_i$

Numéro d'inscription

504206

Signature



Né(e) le

21 / 10 / 2009

Nom

HAUSTANT

Prénom(s)

ADAM

19.93 / 20

ecricome

Épreuve:

Mathématiques appliquées

Sujet

1

ou

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

10

/

11

Numéro de table

003

48)

```

- import numpy.random as rd
def simul X(n):
    U = rd.random()
    return 1/(U**(1/n))

```

(car  $V_i$  suit la même loi que  $X_i$ )

II - 5)

```

def simul Y(m, p):
    return rd.binomial(m-1, p) + 1

```

6)

```

def loi Y(m, p):
    N = 10000
    loi = [0]*m
    for h in range(N):
        y = simul Y(m, p)
        loi[y] += 1
    return loi Y

```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

7) import matplotlib.pyplot as plt  
plt.bar ( simul Y, lei Y, "+k")  
plt.show()

80) La clé primaire d'une table dans une  
base de données doit identifier  
la table de manière unique.

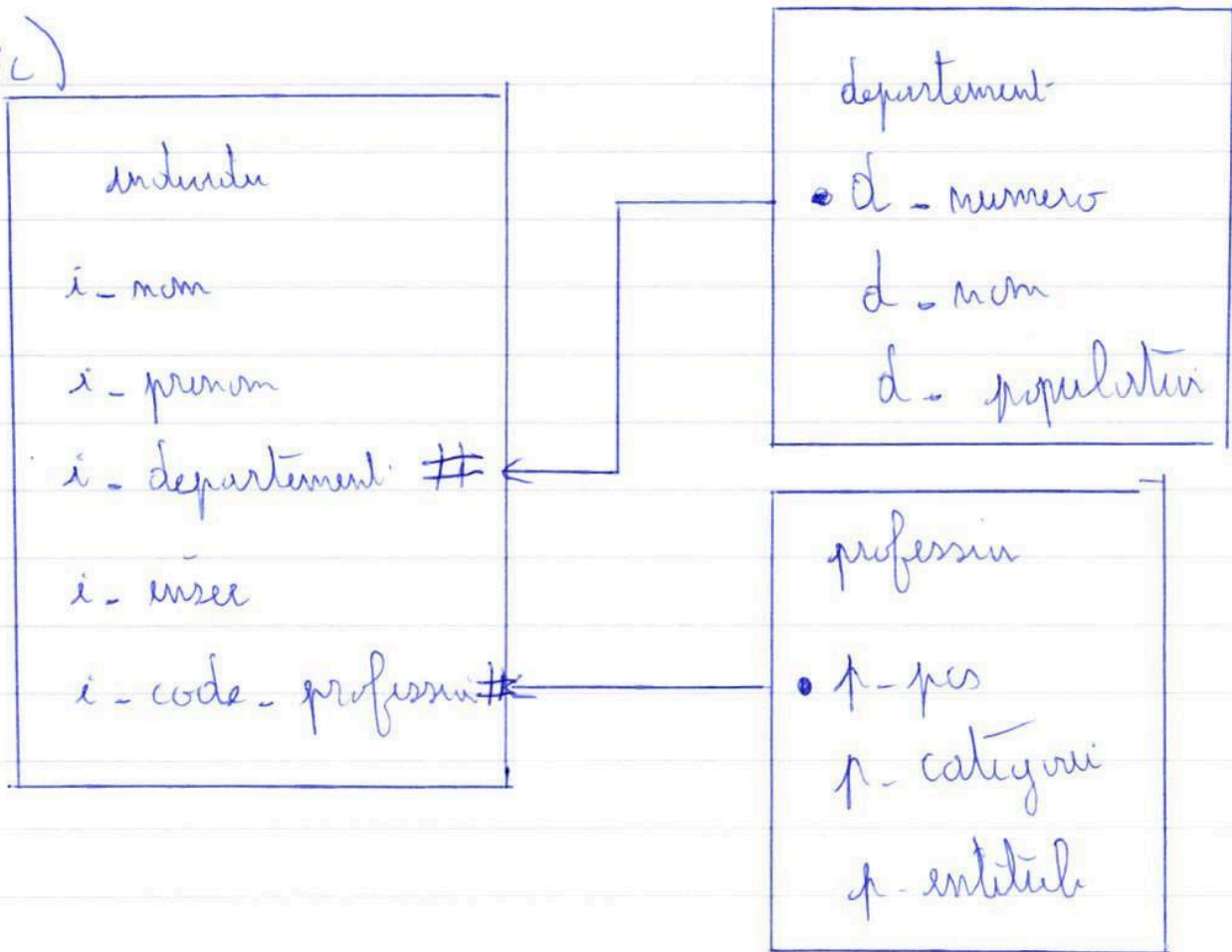
81) Pour ~~dat~~ la table individu, on a:

82) Pour la table individu, on a: e - insce.

Pour la table departement, on a: d - numero

Pour la table profession, on a: p - pos

8c)



Avec # les clés étrangères et • les clés primaires

```
8d) SELECT DISTINCT
      i_code_profession
FROM   individu
WHERE  i_departement = 29;
```

8.e) SELECT

i - insce,  
p - categorie  
FROM

individus  
INNER JOIN

profession

FROM  
GROUP BY

individus . i\_code - profession = profession . p\_pes  
p - categorie ;

III - 9)  $\forall x < 1$ , on a : avec  $Z_m(x) = [y_i + \alpha]$  :

$$G_m(x) = P(Z_m \leq x) = 0$$

impossible

D'où :  $\forall x < 1$ , on a :  $G_m(x) = 0$

10a) Soit  $x \geq 1$ , on a que :

Sachant  $[Y=i]$ , c'est-à-dire sachant qu'on ait choisi un certain numéro de catégorie socio-professionnelle, il vient que le revenu mensuel étudié est celui d'un individu choisi au hasard dans la catégorie socio-professionnelle  $i$ .

D'où :  $\forall i \in \{1, m\}$ , on a :  $P_{[Y=i]}(Z_m \leq x) = P(X_i \leq x) = F(x)$

Numéro d'inscription

504206

Signature

Né(e) le

21 / 10 / 2004

Nom

HAUSTANT

Prénom(s)

ADAM

19.93 / 20



Épreuve: Mathématiques appliquées

Sujet  1 ou  2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11 / 11

Numéro de table 003

10c) On a donné 10b) et on suppose,  $\forall x \geq 1$ :

$$G_m(x) = \sum_{k=0}^{m-1} F_{k+1}(x) \binom{m-1}{k} p^k (1-p)^{m-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{m-1}{k} p^k (1-p)^{m-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} p^k (1-p)^{m-1-k} - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} \binom{m-1}{k} p^k (1-p)^{m-1-k}$$

formule  
du  
binôme

$$= (p + 1-p)^{m-1} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{p}{x}\right)^k \binom{m-1}{k} (1-p)^{m-1-k-1}$$

formule  
du  
binôme

$$= 1^{m-1} - \frac{1}{x} \times \left(\frac{p}{x} + (1-p)\right)^{m-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^m} \times (p + (1-p)x)^{m-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x^m} (p + (1-p)x)^{m-1}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

19.93 / 20

$$G_m(x) = 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{m+1}}{x^m}, \quad \forall x \geq 1$$

11)  $G_m$  est continue sur  $[1, +\infty[$  en tant que combinaison linéaire de fonctions continues sur  $[1, +\infty[$  (le dénominateur ne s'annule pas)

Sans suite



