500765

THOBOIS

ARTHUR

02/11/2004

Note de délibération : 18.77 / 20

Numéro d'inscription: 500765

Né(e) le: 02/11/2004

Signature

Nom: THOBOIS

Prénom (s): ARTHUR

18.77 / 20

Ecricome

Épreuve : Maths appliquée ecricome

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 10

Numéro de table: 4

exercice 2.

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} e^{-t}$$

or par croissance comparée

$$t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc $t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

or on reconnaît une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc convergente.

alors par critère de négligeabilité des intégrales à termes positives, $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ converge.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

De plus, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc $\int_0^1 t^n e^{-t} dt$ converge.

Par la relation de Chasles,

$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge.

b) avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$. On reconnait une loi exponentielle de paramètre $\varepsilon = 1$.

Donc I_0 converge et $I_0 = 1$.

$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$. On reconnait l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre $\varepsilon = 1$.

Donc I_1 converge et $I_1 = 1$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

3) $\forall x \in [0, +\infty[$. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} \, dt$.

$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt$

$F(0)$ converge (selon 1)b))

Donc $F(0) = 1$.

4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $x \leq y$.

$xt \leq yt$ $\quad \downarrow xt > 0$

$\quad \downarrow +1$ $\quad$ car t

$xt + 1 \leq yt + 1$

$\quad \downarrow x \mapsto \frac{1}{x}$ bijection décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\frac{1}{xt+1} \geq \frac{1}{yt+1}$

D'après 2), on sait que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ converge.

Donc comme est intégrantes (les fonctions) en jeu sont continues ~~et convergente~~ en $[0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ converge.

Alors par croissance de l'intégrale, avec les bornes dans l'ordre croissant.

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{xt+1} \geq \frac{1}{yt+1}$$

passage à l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{xt+1} dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{yt+1} dt$$

$$F(x) \geq F(y).$$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(y) \leq F(x)$

→ on peut donc en déduire que la fonction F est décroissante

Numéro d'inscription S00765

Né(e) le 02/11/2004

Signature

Nom THOBOIS

Prénom (s) ARTHUR

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Maths - appliquée - ecricome

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/10

Numéro de table 4

exercice 2) suite ...

5) a) $\forall x \in \mathbb{R}_+$

→ Si $x=0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+0\times t} dt = \int_0^1 1 \, dt$

$= [x]_0^1 = 1$

Donc si $x=0$, $\int_0^1 1 \, dt = 1$.

→ Si $x>0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \left[\frac{1}{x} \ln(|1+xt|)\right]_0^1$

$= \frac{1}{x} \ln(|1+x|) - 0$

$= \frac{\ln(|1+x|)}{x}$

Donc si $x>0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \frac{\ln(|1+x|)}{x}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

b) $\forall x > 0$.

On a $\quad 0 \leq t \leq 1$

$0 \geq -t \geq -1 \quad) \times -1 < 0$

$e^0 \geq e^{-t} \geq e^{-1} \quad) \; x \mapsto e^x$ bijection croissante sur $\mathbb{R}_+$

Donc $\forall x > 0$,

$0 \leq e^{-t} \leq 1$

$) \times \frac{1}{1+xt} > 0$ car $x > 0$ et $t > 0$

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$$

par croissance de l'intégrale avec les fonctions en jeu continue sur $[0,1]$, avec $0 \leq 1$ (bornes dans le bon ordre !).

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} \, dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} \, dt.$$

d) On suppose que l'on a $\forall x > 0$

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt.$$

avec $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car

$A > 1$, $\int_1^A e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_1^A$

$$= -e^{-A} + e^{-1} \xrightarrow[A \to +\infty]{} e^{-1}$$

Donc $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge et vaut e^{-1}.

alors on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0$

Par encadrement, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

6) a) $\forall x > 0$, on admet que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$ converge.

a) → on sait d'après 2 que $F(x)$ converge

→

→ $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt) \, dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1-xt)(1+xt)}{1+xt} dt.$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1+x^2t^2)}{1+xt} dt$

$= \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t} x^2 t^2}{1+xt} dt$

$= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t} t^2}{1+xt} dt.$

Donc $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt$

Numéro d'inscription 500765

Né(e) le 02/11/2004

Nom THOBOIS

Prénom (s) ARTHUR

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Maths - appliquée - ecricome

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/10

Numéro de table 4

exercice 2. (suite)

On a $\forall x > 0$, $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - xt)\,dt = f(x) - I_0 + x I_1$.

car les intégrales convergent d'après 1)a).
on développe l'intégrale.

On a $t > 0$
$xt > 0$? $x > 0$
$xt + 1 > 1$? $+1$
$\frac{1}{xt+1} \leq 1$? $x \mapsto \frac{1}{x}$ bijection décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$\frac{t^2 e^{-t}}{xt+1} \leq t^2 e^{-t}$? $\times\, t^2 e^{-t} > 0$

les fonctions en jeu sont continues sur $[0, +\infty[$, alors par croissance de l'intégrale avec les bornes dans l'ordre croissant, les intégrales ~~fonctions~~ en jeu sont convergentes

$x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{xt+1}\,dt \leq x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$ avec $x^2 > 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

or comme $x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt = F(x) - I_0 + x I_1$,

alors on a $F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2$.

De plus, $t \mapsto \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}$ est strictement

positif sur $[0, +\infty[$ car $x \geq 0$
et $t \geq 0$

Donc, par positivité de l'intégrale et croissance de l'intégrale (borne ordre croissant), $x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \geq 0$.

Donc $\forall x \geq 0$, $0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2$.

7/a) on suppose que $F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$

b) → avec $F(0) = 1$ d'après 3.

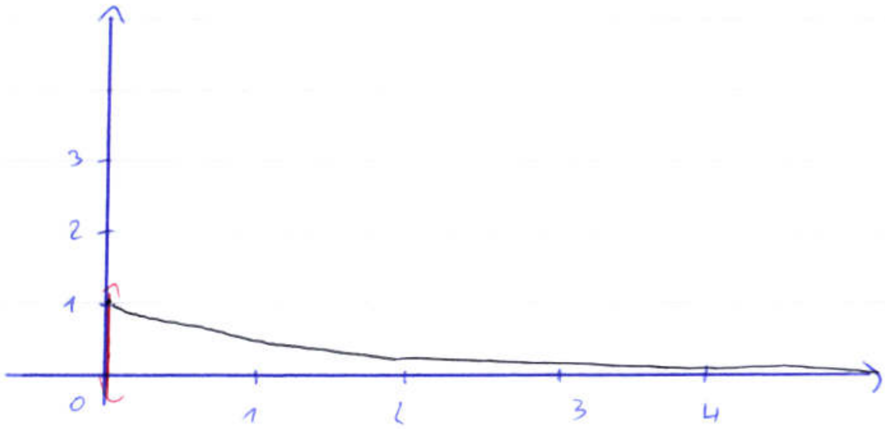
F est dérivable en 0 si $\frac{F(x) - F(0)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.

la limite est alors $F'(0)$.

Donc : $\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{1 - x + o(x) - 1}{x} = -1$

Donc F est dérivable en 0
et $F'(0) = -1$.

8) → $F'(0) = -1$
→ F est décroissante
→ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$
→ $F(0) = 1$



Numéro d'inscription 500765

Né(e) le 02/11/2004

Signature

Nom THOBOIS

Prénom (s) ARTHUR.

18.77 / 20

ecricome Épreuve : Maths - appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 10

Numéro de table 4

exercice 3.

$\forall i \in [1, n]$,

→ f_i est définie sur $\mathbb{R}$

→ . f_i est continue sur $]1, +\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions dont le dénominateur n'est pas nul sur cet intervalle.

. f_i est continue sur $]-\infty, 1[$ car nulle.

Donc f_i est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

→ $\forall i \in [1, n]$, f_i est positive sur $\mathbb{R}$ car nulle sur $]-\infty, 1[$ et quotient de termes positifs sur $[1, +\infty[$.

→ $\int_{-\infty}^{1} f_i(x)dx$ converge car $f_i(x) = 0$ sur cet intervalle. $\int_{-\infty}^{1} f_i(x)dx = 0$

. $A > 1$, $\int_1^A f_i(x)dx = \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}} dx = \left[-x^{-i}\right]_1^A$

$= -\frac{1}{A^i} + 1 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

18.77 / 20

Donc $\int_1^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Par relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Donc : f_i est une densité de probabilité

2) a) $E(X_i)\ \exists \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\,dx$ converge absolument.

on a $\int_{-\infty}^{1} x f_i(x)\,dx$ converge car nulle et vaut 0.

Soit $A > 1$, $\int_1^A x f_i(x)\,dx = \int_1^A \frac{i}{x^i}\,dx$

On reconnait une intégrale de référence,

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^i}\,dx$ CV $\Leftrightarrow i > 1$, intégrale de Riemann

Donc X_i admet une espérance si $i > 1$.

Si $i > 1$, $\int_1^A \frac{i}{x^i}\,dx = \left[\frac{i\,x^{-i+1}}{1-i}\right]_1^A$

$$= \frac{1}{(1-i)A^{i-1}} - \frac{i}{1-i} \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{-i}{1-i}$$

Donc $E(X_i) = \frac{-i}{1-i}$ si $i > 1$.

Si $i \leq 1$, $E(X_i)$ n'existe pas

b) Si $i > 1$,

-> $i = 2$, $E(X_2) = 2$

$i = 3$, $E(X_3) = \frac{3}{2}$

$i = 4$, $E(X_4) = \frac{4}{3}$

$\vdots$

$i = 10$, $E(X_{10}) = \frac{10}{9}$

Donc $\forall i \in]1, n]$,

$$X_2 > X_3 > \dots > X_n.$$

3) Si $x < 1$,

$F_i(x) = 0$

$B < x$

Si $x \geq 1$, $F_i(x) = P(X_i \leq x) = \int_B^x f_i(x)dx$

De plus, avec $\int_B^1 f_i(x)dx = 0$

Par Chasles, on a $F_i(x) = \int_B^1 f_i(x)dx + \int_1^x f_i(x)dx$

$= 0 + \int_1^x f_i(x)dx$

alors $\int_1^x \frac{i}{x^{i+1}}\,dx = \left[-x^{-i}\right]_1^x$

$= \left(-\frac{1}{x^i} + 1\right)$

Donc $F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1. \end{cases}$

4) $U \hookrightarrow U]0,1[$.

$i \in [\![1,n]\!]$. Posons $V_i = \frac{1}{U^{\frac{1}{i}}}$

a) → On a $U(\Omega) =]0,1[$

alors $U \mapsto \frac{1}{U^{1/i}}$ est une bijection

de $]0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

alors $V_i(\Omega) = [1,+\infty[= X_i(\Omega)$.

→ De plus : $F_{V_i}(x) = 0$ si $x < 1$.

si $x \geq 1$, $F_{V_i}(x) = P(V_i \leq x)$

$= P\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right)$

$= P\left(U^{\frac{1}{i}} \geq \frac{1}{x}\right)$ avec $x > 0$.

$= P\left(U \geq \left(\frac{1}{x}\right)^i\right)$

$= 1 - P\left(U \leq \frac{1}{x^i}\right)$ } U a densité.

Numéro d'inscription	500765
Né(e) le	02/11/2004
Nom	THOBOIS
Prénom (s)	ARTHUR

Signature

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Maths - appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/10

Numéro de table 4

exercice 3

4) a) suite.

Si $x \geq 1$, $F_{V_i}(x) = 1 - P(U \leq \frac{1}{x^i})$
$= 1 - \frac{1}{x^i}$

Donc $F_{V_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

et $F_{V_i}(\Omega) = X_i(\Omega)$.

Alors V_i suit la même loi que X_i

b)
```
Simul x (i) :
x = float (input ("valeur de x?"))
if x >= 1 :
    print ( i / x ** (i+1) )
else :
    print ( 0)
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

Partie II

8) a) une clé primaire ne doit pas dépendre des autres tables, elle doit lui être unique

b) table individu : (i_insee)

table departement : (d_numero)

table profession : (P_categorie)

individu	i_nom	i_prenom	i_departement
/	/	/	/ 2

i_insee	i_code_profession
/	/ 1

departement	d_numero	d_nom	d_population
/	/ 2	/	/

profession	p_pcs	p_categorie	p_intitule
/	1 /	/	/

Donc → table individu liée à table profession 1

→ table individu reliée à table departement 2

d)

```
Select distinct i_code_profession
from individu
where i_departement = 28.
```

e)

```
Select distinct p_categorie
from profession
select distinct i_insee
from individu.
```

Partie III

$p \in]0, 1[$.

9) $\forall x < 1$,

10) $\forall x \geq 1$.

a)

→ Sachant que l'on est dans la catégorie i $(Y = i)$, alors on cherche la probabilité que son revenu mensuel soit inférieur ou égal à x.

Cependant, X_i calcul le revenu mensuel, en milliers d'euros, d'un individu choisi au hasard avec équiprobabilité au sein de la catégorie socio-professionnelle numéro i.

Donc $P_{(Y=i)}(Z_n \leq x) = F_i(x)$

$= P(X_i \leq x)$

Numéro d'inscription S00765

Né(e) le 02/11/2004

Nom THOBOIS

Prénom (s) ARTHUR

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Maths-appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 10

Numéro de table 4

Signature

exercice 3, partie III

10) b) Avec le système complet d'évènement $(Y=i)_{i\in[1,n]}$ de probabilité non nulle.

alors d'après la formule des probabilités totales,

$$G_n(x) = \sum_{i=1}^{n} P_{(Y=i)}(Z_n \leq x)\, P(Y=i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, P(Y=i)$$

changement d'indice $k = i-1$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x)\, P(Y=k+1)$$

or $(Y=k+1) = (Y-1=k)$, avec $Y-1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1,p)$

donc $P(Y-1=k) = \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$ avec $(q=1-p)$

Donc $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$

$\forall x \geq 1$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

c) on a $\forall x \geq 1$, $F_{k+1}(x) = \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right)$

alors $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{x^{k+1}}\right) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$

on développe :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{p^k}{x^{k+1}} (1-p)^{n-1-k}$$

$$G_n(x) = (p+1-p)^{n-1} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{p}{x}\right)^k (1-p)^{n-1-k}$$

par la formule du Binôme de Newton

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{p}{x} + 1 - p\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{p + (1-p)x}{x}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}$$

Donc $G_n(x) = 1 - \frac{(p + (1-p)x)^{n-1}}{x^n}$

11) Sachant que G_n est la fonction de répartition de Z_n.

-> G_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que somme et quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annulle pas.

-> G_n est C^1 sur $\mathbb{R}+/\{1\}$ en tant que somme de telles fonctions.

-> ~~$G_n(x) \underset{-\infty}{\sim}$~~

$\forall x \geq 1,$

-> $G_n(x)' = \dfrac{x^n(n-1)(1-p)(p+(1-p)x)^{n-2} - n x^{n-1}(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^{2n}}$

-> $\forall x < 1, \; G_n'(x) = 0.$

Donc Z_n est à densité et

$$Z_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x^n(n-1)(1-p)(p+(1-p)x)^{n-2} - n x^{n-1}(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^{2n}}. & \end{cases}$$

13) a) on suppose $p = \frac{1}{n}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ alors

$G_n(x) = 0$ si $x < 1$

si $x \geq 1$, $G_n(x) = 1 - \dfrac{\left(\frac{1}{n} + (1-\frac{1}{n})x\right)^{n-1}}{x^n}$

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x}{x}\right)^{n-1}$$

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{nx} + \left(\frac{n-1}{n}\right)\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{nx} + \frac{x(n-1)}{nx}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1 + xn - x}{nx}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{nx} + 1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$$

Donc, si $p = \frac{1}{n}$ $G_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1. \end{cases}$

Numéro d'inscription 500765
Né(e) le 02/11/2004
Nom THOBOIS
Prénom (s) ARTHUR

18.77 / 20

Écricome Épreuve : Maths appliquées
Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/10

Numéro de table 004

exercice 3, partie III

(3) b) → $G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $x < 1$.

→ si $x \geq 1$,

$1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$, étudions séparément limite de $\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$

$$\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = e^{n-1 \ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)}$$

avec $(n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \times -\frac{(x-1)}{nx}$

$$\underset{+\infty}{\sim} -\frac{(x-1)}{x}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-(x-1))}{x} = \frac{-(x-1)}{x}$

Par passage à la limite,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}\right) = 1 - \frac{1}{x} e^{-\left(\frac{x-1}{x}\right)}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

Donc $Z_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{L}} X$ qui admet une fonction de répartition F

où $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} e^{-\frac{(x-1)}{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Numéro d'inscription S00765

Né(e) le 02/11/2004

Signature

Nom THOBOIS

Prénom (s) ARTHUR

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Maths Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08/10

Numéro de table 004

exercice 1.

avec $C \in M_3(\mathbb{R})$, $M \in M_3(\mathbb{R})$.

1) $E_{0_3} = \{ 0_3 \}$

$E_{I_3} = \{ I_3 M + M I_3 = 0_3 \}$

$E_{I_3} = \{ 2M = 0_3 \}$

2) $\forall C \in M_3(\mathbb{R})$.

-) $E_C \subset M_3(\mathbb{R})$

-) $E_C \neq \emptyset$ car contient le vecteur nul en effet, $0M + M0 = 0_3$.

-) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (A,B) \in E_C^2$, montrons que $(\lambda A + C) \subset E_C$

$(\lambda A + B) = (\lambda A + B) M + M(\lambda A + B) =$

$= \lambda AM + BM + \lambda MA + MB$ $\quad (A,B) \in E_C^2$

$= \lambda (AM + MA) + BM + MB$

$= 0_3$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (A,B) \in E_C^2, (\lambda A + B) \in E_C$

- Alors E_C est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

3) $M \in E_A$.
Alors $AM + MA = 0_3$.

4) a) A est symétrique, donc diagonalisable

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ est valeur propre de $A \Leftrightarrow (A - \lambda I)$ non inversible

on calcule naturellement, $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix}$

Donc $A^3 - 9A = 0$

Donc $X^3 - 9X = 0$ est un polynôme annulateur de A.

Donc $Sp(A)$ est compris dans les racines, les solutions de $X^3 - 9X = 0$.

Donc si λ est valeur propre de A,

alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$

i) Alors $X^3 - 9X = 0 \iff X(X^2 - 9) = 0$

Donc $Sp(A) \subset \{-3, 0, 3\}$.

$$\rightarrow \cancel{(A+3I) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

$E_0(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0,\ AX = 0\}$

Donc :
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 2y \\ x = 2y \end{cases}$$

Donc $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

or $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est non nul, la famille est donc libre. Donc base de $E_0(A)$.
Donc : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.
Donc 0 est valeur propre de A

$\rightarrow E_3(A) = \{ X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) , (A-3I)X = 0 \}$

$$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \end{cases}$$

Donc $E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

or $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0\right)$, donc $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est famille libre., donc une base de $E_3(A)$

Donc $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est un vecteur propre de A associée à la valeur propre 3.
Donc 3 est valeur propre de A.

$\rightarrow E_{-3}(A) = \{ X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) , (A+3I)X = 0 \}$.

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Numéro d'inscription S00765

Né(e) le 02/11/2004

Signature

Nom THOBOIS

Prénom (s) ARTHUR

18.77 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appliquées.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 / 10

Numéro de table 004

Exercice 1, 4) c)

$\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} z \\ y = -z \end{cases}$$

$E_{-3}(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

or $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$, donc $\left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre

donc base de $E_{-3}(A)$ (libre + générateur).

Donc $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -3.

Alors on a $Sp(A) = \{-3, 0, 3\}$.

Comme A diagonalisable : $\exists P$ inversible

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et $P = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20

-> il faut que les coefficients diagonaux de P soient égaux à 1.

Donc on modifie le vecteur propre de -3.

$\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (multiplie par -2)

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5) $P^2 =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $P^2 = 9 I_3$

alors P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{9} P$$

6) a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

$N \in E_D \iff DN + ND = 0_3$ avec $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification

$$\iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ -3d = 0 \\ 3f = 0 \\ 3h = 0 \\ 6i = 0 \end{cases} \iff a = b = d = f = h = i = 0$$

Donc $N \in E_D \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $E_D = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

faisons un test de liberté. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$aA + bB + cC = 0 \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Donc $((A, B, C))$ est une famille libre + génératrice (vect). Donc

$((A, B, C))$ est une base de E_D

Donc $\dim E_D = 3$

7)a) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. Posons $N = P^{-1}MP$.

On sait que $D = P^{-1}AP$

($\Leftarrow$) Si $N \in E_D \iff DN + ND = 0_3$

$$\iff P^{-1}APP^{-1}MP + P^{-1}MPP^{-1}AP = 0_3$$

$$\iff P^{-1}AMP + P^{-1}MAP = 0$$

$$\iff AMP + MAP = 0$$

$$\iff AM + MA = 0$$

Donc $N \in E_D \Rightarrow M \in E_A$

($\Rightarrow$) Si $M \in E_A \iff AM + MA = 0_3$

$$\iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0_3$$

$$\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0_3$$

$$\iff DNP^{-1} + NDP^{-1} = 0_3$$

$$\iff DN + ND = 0_3$$

Donc $M \in E_A \Rightarrow N \in E_D$

Donc par double implication, $N \in E_D \iff M \in E_A$

Numéro d'inscription S00765

Né(e) le 02/11/2004

Nom THOBOIS

Prénom (s) ARTHUR

Signature

18.77 / 20

écricome Épreuve : Maths appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 10

Numéro de table 004

exercice 1.

7) b) Comme $n \in A \Leftrightarrow N \in ED$,

8) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $M \in M_3(\mathbb{R})$

$(A+M)^2 = A^2 + 2AM + M^2$

on cherche A tel que $A^2 + 2AM = A^2$
$\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}$ $2AM = 0$.

$AM = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.77 / 20