507114

EYROULET

PAUL

30/08/2006

Note de délibération : 17.43 / 20

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/08/2006

Nom EYROULET

Prénom (s) PAUL

Signature

17.43 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/11

Numéro de table 025

EXERCICE 1

1) On a :

$$\cancel{\forall \varepsilon \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})},\ E_{0_3} = \{ M\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid 0_3M + M0_3 = 0_3 \}$$

$$\underset{(1)}{=} \{ M\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid 0_3 + 0_3 = 0_3 \}$$

$$= \{ M\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid 0_3 = 0_3 \}$$

$$= \{ M\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \}$$

(1) : par absorbance de la matrice nulle.

Donc,

$$\boxed{E_{0_3} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

On a :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

$$E_{I_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid I_3 M + M I_3 = 0_3 \}$$

$$\underset{(1)}{=} \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M + M = 0_3 \}$$

$$= \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid 2M = 0_3 \}$$

(1) : par neutralité de I_3 dans le produit matriciel

Donc,

$$\boxed{E_{I_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid 2M = 0_3 \}}$$

Soit $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

2) • $E_C = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid CM + MC = 0_3 \}$

Donc, par définition de E_C,

$\underline{E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

• $\underline{0_3 \in E_C}$ d'après 1)

• Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Soit $(N, P) \in (E_C)^2$

Alors,

$\forall C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(\lambda N + \mu P) + (\lambda N + \mu P)C$

$$= \lambda(CN + NC) + \mu(CP + PC)$$

$$= \lambda \times 0 + \mu \times 0$$
$$= 0$$

Donc,

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (N, P) \in (E_C)^2, \lambda N + \mu P \in E_C$.

ie : E_C est stable par combinaison linéaire

Donc,

en vertu des 3 points précédents et la "caractérisation pratique en 3 points" : par théorème :

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } C \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \text{ l'ensemble } E_C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

3) On a : $M \in E_A$

Donc,

$AM + MA = O_3$. Or, ${}^tM = M$: M est symétrique

~~Or, par théorème,~~ Donc, $AM = {}^tA\,M$

$\cancel{{}^t(AM + MA) = {}^t(MA) + {}^t(AM)}$ $\quad MA = M\,{}^tA$

$\cancel{= {}^t(AM) + {}^t(MA)}$ Donc, par somme,

$\cancel{= {}^tM\,{}^tA + {}^tA\,{}^tM}$

$\cancel{= O_3}$. On a : $A\,{}^tM + {}^tM\,A = O_3$

Donc,

$$\boxed{{}^tM \text{ appartient à } E_A}$$

4)(a) ~~D'après 3)~~, ~~${}^tA \in E_A$~~

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc,

A est symétrique

Donc, en vertu du théorème spectral,

$$\boxed{\text{A est diagonalisable}}$$

4)(b) On a :

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times A \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$9A = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

Donc, $A^3 = 9A$

Donc,

$A^3 - 9A = 0_3$: $P = X^3 - 9X$ est un polynôme annulateur de A

Or, par théorème,

les valeurs propres de A sont incluses dans les racines de P.

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/08/2006

Signature

Nom EYROULET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/

Numéro de table 025

Donc, on a bien montré que :

$\boxed{\text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } A, \text{ alors } \lambda^3 - 9\lambda = 0}$

4)(c) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; x^3 - 9x = 0 \iff x(x^2-9) = 0$$
$$\overset{(1)}{\iff} x = 0 \text{ ou } x^2 - 9 = 0$$
$$\overset{(2)}{\iff} x = 0 \text{ ou } (x-3)(x+3) = 0$$
$$\overset{(1)}{\iff} x = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \text{ ou } x+3=0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -3$$

(1) : d'après la règle du produit nul dans $\mathbb{R}$

(2) : d'après une identité remarquable

Donc, par théorème,
$Sp(A) \subset \{0;-3;3\}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

~~Soit~~ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Par théorème,

"λ est valeur propre de A" $\Leftrightarrow$ $\exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ tel que : $AX = \lambda X$

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

~~AX~~

Alors,

$$AX = \lambda X$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \lambda x \\ -2x + 2z = \lambda y \\ 2y - z = \lambda z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S) : \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y = 0 \\ -2x - \lambda y + 2z = 0 \\ 2y + (-1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Donc, appliquons ce système à nos <u>potentielles</u> valeurs propres

- On a : "pour $\lambda = 0$",

$$\cancel{(S)} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x = 2z \\ 2y = z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = z \end{cases}$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc, puisque $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}$,

0 est valeur propre de A, et :

$E_0(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, et $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est libre en tant que famille réduite à une unique vecteur non nul, donc, $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A)$

- On a : "pour $\lambda = -3$",

$\begin{cases} (1+3)x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + (-1+3)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2y \\ 3y + 2z = 2x \\ 2y = \cancel{5}2z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 3y + 2z = 2x \\ y = \cancel{5}z \end{cases}$

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y \end{cases}$~~

$\Leftrightarrow X = \cancel{\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 2x \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cancel{= \frac{x}{2}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Donc,

-3 est valeur propre de A, et :

$E_{-3}(A) = \cancel{Vect\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$
$= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

. comme précédemment, on montre que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-3}(A)$

• Enfin, pour "$\lambda = 3$":

$$\begin{cases} (1-3)x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y + (-1-3)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 2y \\ -3y + 2z = 2x \\ 2y = 4z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x = y \\ -3y + 2z = 2x \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ -3y + 2z = 2x \\ z = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

$$\iff X = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{y}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc,
3 est valeur propre de A et:
$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$. De même, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_3(A)$

Donc, A étant diagonalisable d'après 4)(a),
par théorème (diagonalisation effective),

on dispose d'une matrice diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant:

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible P de $M_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1:

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/08/2006

Signature

Nom EYROVLET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03 /

Numéro de table 025

~~$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$~~

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

tels que ~~$D = P =$~~ $A = PDP^{-1}$

Donc, que : $P^{-1}A = \underbrace{P^{-1}P}_{=1} DP^{-1}$

Donc,

$P^{-1}AP = DP^{-1}P$

Donc, $\boxed{P^{-1}AP = D}$

5) D'après 4)(c), $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Donc, $P^2 = PP$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

6)(a) On a : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. ~~Soit $M = \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$~~

Donc,

$\cancel{N \in E_D \iff NM + MC = 0_3}$

$\cancel{\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{pmatrix}}$

$N \in E_D \iff DN + ND = 0_3$

$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$

$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3$

$\iff (1) \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ 3f = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3h = 0 \\ 6i = 0 \\ 3f = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = d = f = i = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) : par identification 2 à 2 des coefficients.

Donc,

$$\boxed{N \text{ appartient à } E_D \text{ si et seulement si } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d'après 6)(a),

On a : $E_D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c,e,g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \left\{ c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (c,e,g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ (*)

Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$$\lambda\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre dans E_D (**)

Donc, en vertu de (*) et (**),

$$\boxed{\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_D}$$

De plus, $\mathcal{B}$ est une famille composée de 3 vecteurs (de cardinal 3)
Donc, ~~par théorème~~ ($\mathcal{B}$ étant une base de E_D),

$$\boxed{\dim(E_D)=3}$$

7) (a) On a : $N=P^{-1}MP$ Donc, $PNP^{-1}=M$

Donc,

$$M\in E_A \Leftrightarrow AM+MA=0_3$$
$$\Leftrightarrow A(PNP^{-1})+(PNP^{-1})A=0_3$$
$$\Leftrightarrow D\cancel{A}+ND=0_3 \Leftrightarrow N\in E_D$$

car d'après 6(a), $N\in E_D \Leftrightarrow N=\begin{pmatrix}0&0&c\\0&e&0\\g&0&0\end{pmatrix}$

Donc,

$$\boxed{\text{"}M\in E_A\text{"} \Leftrightarrow \text{"}N\in E_D\text{"}}$$

Numéro d'inscription 50714

Né(e) le 30/08/2006

Nom EYROULET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques appliquées Sujet ☐1 ou ☐2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction. Feuille 04/

Numéro de table 025

Signature

7) (b)

D'après 7)(a), $\begin{cases} N = P^{-1}MP \\ M \in E_A \iff N \in E_D \end{cases}$

De plus, d'après 6)(b),

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_D.

Donc,

$M \in E_A \iff P^{-1}MP \in E_D$

8) On a : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $(A+M)^2 = \cancel{A^2}\,(A+M)(A+M)$
$= A^2 + AM + MA + M^2$

Donc,

$\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $(A+M)^2 = A^2 + M^2 \iff AM + MA = 0_3$

Donc,

$\boxed{\text{l'ensemble des matrices } M \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } (A+M)^2 = A^2 + M^2 \text{ est } E_A}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

EXERCICE 2

1)(a)

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : " $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente "
Montrons que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence.

⊙ Initialisation :

$\int_0^{+\infty} t e^{-t}$ est convergente en tant que espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, donc de valeur $\frac{1}{1} = 1$

⊙ Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons P_n, montrons P_{n+1}
D'après l'hypothèse de récurrence, on a :
$\int_0^{+\infty} r^n e^{-r}\, dr$ est convergente.

Réalisons une intégration par partie.

Posons, $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $\begin{cases} u(r) = \frac{r^{n+1}}{n+1} \\ v(r) = e^{-r} \end{cases}$

Alors, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ a fortiori dérivables et :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} u'(r) = r^n \\ v'(r) = -e^{-r} \end{cases}$$

Donc, en vertu de la formule d'intégration par parties,

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\int_0^{\cancel{+\infty}} r^n e^{-r} dr = \int_0^{\cancel{+\infty}} u'(r) v(r)\, dr$

$$= [uv]_0^x - \int_0^{\cancel{+\infty}} u v'\, dr$$

$$= \left[\frac{r^{n+1}}{n+1} e^{-r}\right]_0^x - \int_0^x \frac{r^{n+1}}{n+1} (-e^{-r})\, dr$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $\int_0^{+\infty} r^n e^{-r} dr$ converge.

Donc, $\int_0^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1} \times (-e^{-r})\, dr$ converge

Donc,
$\int_0^{+\infty} r^{n+1} e^{-r}\, dr$ converge

Donc, P_{n+1} est vraie

~~Etape~~

⊙ Conclusion

En vertu du principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt \text{ est convergente}}$$

1) (a) On a : Soit $x \in \mathbb{R}$

~~Soit $x \in$~~

$$\cancel{I_0 =} \int_0^{x} t^0 e^{-t}\,dt$$

$$= \int_0^{x} e^{-t}\,dt$$

$$= \left[-e^{-t}\right]_0^{x}$$

$$= -e^{-x} + e^{-0}$$

$$= -e^{-x} + 1$$

Or, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0 \end{cases}$

Donc, par composition,

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc,

$$\lim_{x \to +\infty} -e^{-x} + 1 = 0 + 1$$
$$= 1$$

Donc,

$$\boxed{I_0 = 1}$$

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/07/2006

Nom EYROUCET

Prénom (s) PAUL

Signature

17.43 / 20

Écricome Épreuve : Maths appli

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/

Numéro de table 025

De plus, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^1 e^{-r}\,dr = \int_0^{+\infty} r e^{-r}\,dr$$
$$= 1$$

comme justifié précédemment : espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1

Donc,

$$\boxed{I_1 = 1}$$

2) On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall r \in [0, +\infty[$,

$$1 + xr \geq 1 \geq 0$$

Donc, par passage à l'inverse (décroissance de $r \mapsto \frac{1}{r}$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall r \in [0, +\infty[$,

$$\frac{1}{1+xr} \leq 1$$

Donc, par positivité de exp sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall r \in [0; +\infty[$,

$$0 \leq \frac{e^{-r}}{1+xr} \leq e^{-r}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

$\cancel{\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} e^{-t} = [-e^{-t}]_0^x}$

$\cancel{=}$

Or, comme démontré précédemment,

$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge de valeur 1

Donc, d'après un critère de comparaison (dans le contexte des intégrales à intégrandes positives)),

$$\boxed{\forall x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \text{ est convergente.}}$$

3) On a :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+0t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

$$= 1 \quad \text{, comme démontré précédemment}$$

Donc,

$$\boxed{F(0) = 1}$$

On a :

$x \leq y$

Donc,

$\forall r \in [0,+\infty[,$

$$\cancel{\frac{x}{1+x+}} \quad 1+xr \leq 1+xy$$

Donc, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall r \in [0;+\infty[, \frac{1}{1+xr} \geq \frac{1}{1+yr}$$

Donc, par positivité de exp sur $\mathbb{R}$,

$$\forall r \in [0;+\infty[, \frac{e^{-r}}{1+xr} \geq \frac{e^{-r}}{1+yr}$$

Donc,

par croissance de l'intégrale (les intégrales mises en jeu convergentes et les bornes sont rangées dans l'ordre croissant)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-r}}{1+xr}\,dr \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-r}}{1+yr}\,dr$$

Donc,

$$F(x) \geq F(y)$$

Ainsi,

$$\boxed{F(y) \leq F(x)}$$

De plus, on a :

$$x \leq y \Rightarrow F(y) \leq F(x)$$

Donc,

$$\boxed{F \text{ est décroissante sur } [0;+\infty[}$$

5)(a) ~~Soit $x > 0$~~

Soit $x \geq 0$

Raisonnons par disjonction des cas :

- 1er cas : $x = 0$

Alors,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+0t}\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1\times(1-0) = 1$$

Donc, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = 1$

- 2e cas : $x > 0$

Alors,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \left[\ln(1+xt)\right]_0^1$$

$$= \ln(1+x\times 1) - \ln(1+x\times 0)$$

$$= \ln(1+x) - \ln(1)$$

$$= \ln(1+x) - 0$$

$$= \ln(1+x)$$

Donc,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \ln(1+x)$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30 / 08 / 2006

Nom EYROULET

Prénom (s) PAUL

Signature

17.43 / 20

Écricome Épreuve : Maths appli

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 /

Numéro de table 025

5)(b) On a : $\forall x > 0$,

$$\cancel{\forall t \in [0,1]}, \ \forall t \in [0,1]$$

$$\cancel{e^{-0} = 1 \leq e^{-t} \leq e^{-1}} \quad e^{-t} \leq 1 \ (= e^{0})$$

Donc, par positivité de exp, et car $\forall t \in [0,1]$, $1+xt > 0$,

$\cancel{\forall x > t}$ $\forall t \in [0,1], 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt.}$$

5)(c) On a : $\forall x > 0$, $\forall t \in [1; +\infty[$,

$$1 + xt \geq x \geq 0$$

Donc, comme raisonné auparavant (décroissance sur $]0;+\infty[$ de $t \mapsto \frac{1}{t}$),

$\forall x > 0, \forall t \in [1;+\infty[, 0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$

Donc, par positivité de exp,

$\forall x > 0, \forall t \in [1;+\infty[, 0 \leq \frac{\exp(-t)}{1+xt} \leq \frac{\exp(-t)}{x}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{\cancel{1+xt}} dt$$

Donc, par linéarité de l'intégration sur un segment,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt}.$$

5)(a) Soit $x \in [0, +\infty[$

On a : ~~par linéarité de~~ d'après la relation de Chasles (les intégrales mises en jeu sont convergentes) $(*)$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

$$\underset{(*)}{=} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

Or, d'après 5)(b), et 5)(a),

$$\begin{cases} 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt \\ \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt = \ln(1+x) \text{ si } x > 0 \\ \end{cases}$$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} = 2$ (admis)

De plus, d'après 5)(c),

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \cancel{\frac{1}{1+x}} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$$

Or, d'après ce qui précède (déjà démontré),

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = 0$

Donc, en vertu du théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt = 0$$

Donc, en vertu de ce qui précède,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1}$$

6)(a) On a : $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt) dt$$

$$\cancel{= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} - e^{-t} xt \, dt}$$

$$\underset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1-xt)(1+xt)}{1+xt} dt$$

$$\underset{(2)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1+(xt)^2)}{1+xt} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-r} x^2 r^2}{1+xr}\, dr$$

$$\underset{(3)}{=} x^2 \int_0^{+\infty} \frac{r^2 e^{-r}}{1+xr}\, dr$$

(1) : d'après la linéarité de l'intégrale généralisée

(2) : d'après une identité remarquable

(3) : par linéarité de l'intégrale

Donc, on a bien montré que :

$$\boxed{F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-r}(1-xr)\, dr = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-r}}{1+xr}\, dr.}$$

~~6) (b) On a : $F(x) - I_0 + xI_1 = F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-r} dr + x\int_0^{+\infty} e^{-r} dr$~~

~~$= F(x) - 1 + x1$~~

~~$\underset{(1)}{=} F(x) - x$~~

~~(1) : d'après 2)(a)~~

~~De plus,~~

~~$$x^2 I_2 = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{r^2 e^{-r}}{1+xr}\, dr$$~~

~~On, d'après 6)(a),~~

~~$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-r}(1-xr)\, dr = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{r^2 e^{-r}}{1+xr}$$~~

~~Donc, $F(x)$~~

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/08/2006

Nom EYROUCET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

Écricome Épreuve : Maths Appli

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/

Numéro de table 025

6) b)

On a : $F(x) - I_0 + x I_1$

$$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t} dt + x \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$$

$$= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - xt) dt.$$

$$= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \quad \text{d'après 6)(a)}$$

On,

$$x^2 I_2 = x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

On,

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

par un raisonnement similaire aux questions précédentes :

$\forall t \in [0; +\infty[,\ 1 + xt \geq 1 \geq 0$

Donc, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ $\forall t \in [0; +\infty[,\ \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$

Donc, $\forall t \in [0; +\infty[, 0 \leq \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} \leq t^2 e^{-t}$

Donc, par croissance de l'intégrale

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}$$

Ainsi,

en vertu de ce qui précède,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

$$\boxed{0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2}$$

7)(a) On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{1 - x + o(x)} = 0$$

car : d'après 6)(a), , $0 \leq F(x) - I_0 + x I_1 \leq x^2 I_2$

Donc, $F(x) - 1 + x \leq x^2 I_2$ car $\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_1 = 1 \end{cases}$

Donc, $F(x) \leq x^2 I_2 + 1 - x$

~~Donc, $F(x) \leq x^2($~~

~~Donc, f~~ ~~Donc, $F(x)$~~

On, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

Donc,

$$\cancel{\lim_{x \to 0} 0 \leq \frac{F(x)}{1-x} \lim}$$

Par passage à la limite des inégalités,

$$\lim_{x \to 0} 0 \leq \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{1 - x + o(x)} \leq \lim_{x \to 0} x^2$$

On, $\begin{cases} \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \to 0} 0 = 0 \end{cases}$

Donc, par encadrement,

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{1-x+o(x)} = 0$$

Donc, par théorème,

$$\boxed{F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)}$$

On pourrait également raisonner à l'aide de la Formule de Taylor - Young à l'ordre 1 :

7)(a) : F admet un développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 donné par :

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} F'(x_0)(x-0) + o(x)$$

$$= \cancel{\underset{x \to 0}{=} 1(x-0) + o(x)} \underset{x \to 0}{=} \left(1 + \frac{1}{x}\right)(x-0) + o(x)$$

$$\underset{x \to 0}{=} x + 1 + o(x)$$

$$\underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$$

Car d'après le théorème fondamental de l'intégration, $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \frac{e^{-x}}{1+x}$. admis...

Or, $F(0) = \frac{e^{-x}}{1+x} \ldots = 1$

Ainsi,

$$\boxed{F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)}$$

7)(b) On a :

d'après le ~~théorème~~ théorème fondamental de l'intégration,

f est ~~de classe C^1 et~~ dérivable en 0 et :

$F'(0) = \frac{e^{-x}}{1+0x} = e^{-x}$ ~~$F'(0) =$~~

~~Donc, en particulier "pour $x = 0$"~~

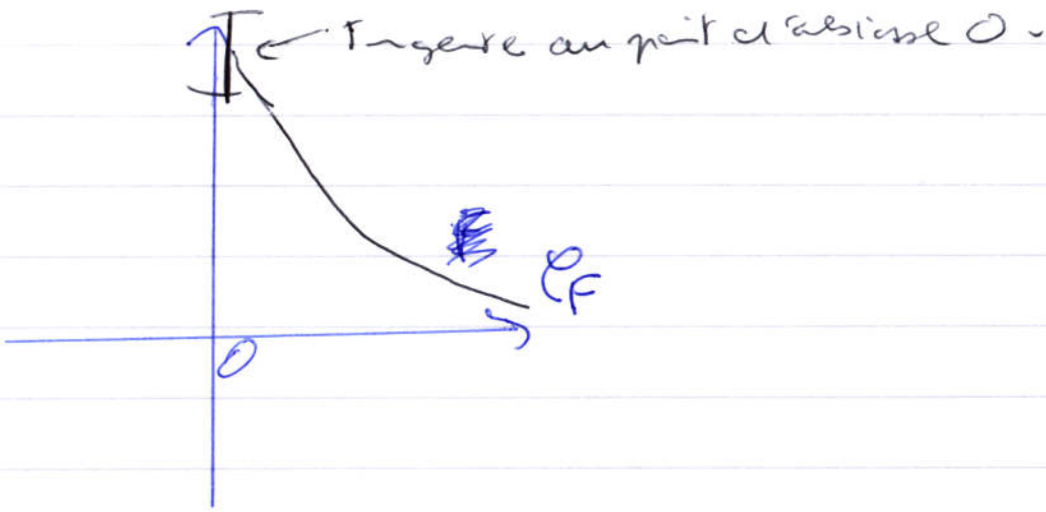
~~$F'(0) = e^{-0} = 1$~~

Donc,

$\boxed{F \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } F'(0) = e^{-x}}$ ~~$= 0$~~

$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{-x} =$

8) On a : d'après ce qui précède :



Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/08/2006

Nom EYROULET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

Écricome Épreuve : Maths Appli

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 /

Numéro de table 025

Commencez à composer dès la première page

$\boxed{\text{EXERCICE 3}}$

Partie I

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

1) • f est bien définie sur $\mathbb{R}$

• Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1

soit $x \in \mathbb{R}$.

Raisonnons par disjonction des cas :

• 1er cas : $x < 1$

Alors, $f_i(x) = 0$

Or, $t \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty ; 1[$

Donc, f_i est continue sur $]-\infty, 1[$

• 2e cas : $x > 1$

Alors, $f_i(x) = \frac{i}{x^{i+1}}$

Or,

$\begin{cases} t \mapsto i \text{ est continue sur }]1 ; +\infty[\text{ car constante} \\ t \mapsto x^{i+1} \text{ est continue sur }]1 ; +\infty[\text{ (puissance spécialisée)} \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

Donc, par quotient de telles fonctions,

f_i est continue sur ~~$\mathbb{R}$~~ $]1;+\infty[$

• Montrons que f_i est positive sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Raisonnons par disjonction des cas

• 1er cas : $x < 1$

Alors, $f_i(x) = 0$

Or, $0 \geq 0$

Donc, f_i est positive sur ~~$\mathbb{R}$~~ $]-\infty;1[$

• 2e cas : $x \geq 1$

Alors, $f_i(x) = \frac{i}{x^{i+1}}$

Or, $\begin{cases} i \geq 1 \geq 0 \\ x^{i+1} \geq 0 \text{ (par positivité de exp sur } [1;+\infty[\\ \text{en réécrivant la puissance généralisée : } \\ x^{i+1} = e^{(i+1)\ln(x)} \end{cases}$

Donc, par quotient de fonctions positives,

f_i est positives sur $[1;+\infty[$.

• Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\,dt$ converge de valeur 1

On a :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\,dt$ converge

si et seulement si

(1)

$\int_1^{+\infty} \frac{i}{t^{i+1}} dt$ converge

(2) : car f_i est identiquement nulle sur $]1;+\infty[$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors, $t \mapsto \frac{i}{t^{i+1}}$ est continue sur $[1,x]$, l'intégrale n'est pas impropre

Or, $\int_1^x \frac{i}{t^{i+1}} dt \underset{(1)}{=} i \int_1^x \frac{1}{t^{i+1}} dt$ par linéarité de l'intégrale

$= i \int_1^x t^{-(i+1)} dt$

$= i \left[\frac{t^{-(i+1)+1}}{-(i+1)+1} \right]_1^x$

$= i\left(\frac{x^{-(i+1)+1}}{-(i+1)+1} - \frac{1^{-i+1+1}}{-(i+1)+1} \right)$

$= i\frac{x^{-i}}{-i} - i\frac{1}{-i} = i\frac{x^{-i}}{-i} + 1$

Or, $\lim_{x \to +\infty} i\frac{x^{-i}}{-i} = 0$

($\forall x \in \mathbb{R}$, car $x^{-i} = e^{-i\ln(x)}$)

et $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} -i\ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \end{cases}$ par composition : $x^{-i} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc,

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) dt$ converge et :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)\, dt = \int_1^{+\infty} f_i(t) dt$
$= 1$

Donc, en vertu des 4 points "⊙" précédents et par théorème,

$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], f_i \text{ est une densité de probabilité}}$

2)(a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

X_i admet une espérance

si et seulement si

$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_i(t)\,dt$ converge absolument

si et seulement si
(1)
$\int_{1}^{+\infty} t f_i(t)\,dt$ converge absolument

si et seulement si
(2)
$\int_{1}^{+\infty} t \frac{i}{t^{i+1}}\,dt$ converge

(1) : car f_i est identiquement nulle sur $]-\infty;1[$

(2) : par <u>positivité</u> de l'intégrande : $\forall t \in [1;+\infty[$, $t\frac{i}{t^{i+1}} \geq 0$

Or, $\int_{1}^{+\infty} t \frac{i}{t^{i+1}}\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{t^{i}}\,dt$

Or, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$

Donc, $\int_{1}^{+\infty} \frac{i}{t^{i}}$ est une intégrale de Riemann à une constante multiplicative (non nulle) près

(<u>intégrale de Riemann</u>)

~~On, $i+1 > 1 \iff i > 0$~~

~~Donc, si $i > 0$,~~

~~alors, $\int_{1}^{+\infty} \frac{i}{t^{i+1}}\,dt$ converge.~~

~~Donc, (à l'aide d'une intégration par partie), on peut montrer que :~~

~~si $i > 0$, alors $\int_{1}^{+\infty} t\frac{i}{t^{i+1}}$ converge.~~

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/08/2006

Nom EYROULET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

Signature

Écricome Épreuve : Maths appli.

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09 /

Numéro de table 025

De même, on montre que :

si $i < 0$, alors, $\int_{1}^{+\infty} t \frac{i}{t^{i+1}}$ diverge

si $i = 0$, alors, $\int_{1}^{+\infty} t \frac{i}{t^{i+1}} = 0$

[illegible] Donc, $\int_{1}^{+\infty} t f_i(t)\,dt$ converge

Donc,

$\forall i \in [\![1, n]\!]$

X_i admet une espérance si et seulement si $\cancel{i \geq 0}$ $i > 1$

De plus, si $i \geq 0$,

alors,

$$E(X_i) = \int_{1}^{+\infty} t \frac{i}{t^{i+1}} dt$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{t^{i}} dt$$

$$= i \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{i}} dt$$

Soit $x \in [1, +\infty[$.

Alors,

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

$$\int_{1}^{x} \frac{1}{r^i}\,dr = \int_1^x r^{-i}\,dr$$

$$= \left[\frac{r^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^x$$

$$= \frac{x^{-i+1}}{-i+1} - \frac{1^{i-1}}{-i+1}$$

$$= \frac{x^{-i+1}}{-i+1} + \frac{1}{i-1}$$

Or,
comme démontré précédement,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{-i+1}}{-i+1} = 0$$

Donc,

$$E(X_i) = i \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^i}\,dr$$

$$= i \times \left(\frac{1}{i-1}\right)$$

$$= \frac{i}{i-1}$$

Ainsi,

$$\boxed{E(X_i) = \frac{i}{i-1}}$$

2) (b) D'après 2)(a),

$$E(X_i) = \frac{i}{i-1}$$

~~Or, Ainsi,~~
Posons $g : x \longmapsto \frac{x}{x-1}$
Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et :

$$g'(x) = \frac{1(x-1) - \cancel{}(-1)\times x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1+x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Or, par positivité de $t \mapsto t^2$ et parallèlement,

g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Donc,

~~Conclusion~~.

la catégorie socioprofessionnelle possédant le plus grand revenu mensuel moyen est la numéro ~~1~~ 2 (plus petite valeur pour laquelle x_i est bien définie), et ceci jusqu'au plus bas revenu pour la numéro n.

3) On a :

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Alors,

$\forall x \in \mathbb{R}, F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Raisonnons par disjonction des cas :

⊙ 1^{e} cas : $x < 1$

Alors, $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt$ car f_i est identiquement nulle sur $]-\infty, 1[$

$= \int_{-\infty}^{x} 0\,dt$

$= 0$

⊙ 2^{e} cas : $x \geq 1$

Alors, $F_i(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\,dt$

$= \int_{1}^{x} f_i(t)\,dt$

$= \int_{1}^{x} \frac{i}{t^{i+1}}\,dt$

$= i \int_{1}^{x} \frac{1}{t^{i+1}}\,dt$ par linéarité de l'intégrale

$= i \int_{1}^{x} t^{-(i+1)}\,dt$

$= i \left[\frac{t^{-(i+1)+1}}{-(i+1)+1} \right]_{1}^{x}$

$= i \frac{x^{-(i+1)+1}}{-(i+1)+1} - i \frac{1^{-(i+1)+1}}{-(i+1)+1}$

$= i \frac{x^{-i}}{-i} - i \frac{1}{-i}$

$= -\frac{1}{x^{i}} + 1$

$= 1 - \frac{1}{x^{i}}$.

Numéro d'inscription 507114

Né(e) le 30/08/2006

Signature

Nom EYROULET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

Ecricome Épreuve : maths appli

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 /

Numéro de table 025

Commencez à composer dès la première page

Donc, on a bien montré que :

$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall x \in \mathbb{R},$

$$\boxed{F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

4) On a : $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, [V_i = x] = \left[\frac{1}{U^{1/i}} = x\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x^{1/i}} = x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\cancel{= \left[\frac{1}{e^{1/i \ln(u)}} = x\right]}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

Donc, en vertu de ce qui précède,

V_i suit la même loi que X_i

4)(b) En utilisant 4)(a) : et car $V_i = \dfrac{1}{U^{1/i}}$

~~Ba~~

```
import numpy.random as rd
def simulX(i):
    u = rd.random()          # simule une uniforme à densité sur ]0,1[
    return 1/(u**(1/i))
```

Partie II

5)

```
import numpy.random as rd
def simulY(n,p)
    ~~return~~
Y_binomiale = rd.binomial(n-1,p)
return Y_binomiale + 1
```

6)

```
def loiY(n,p):
    N = 10 000
    loi = [0] * n
    for k in range(10000):
        Y = simulY(n,p)
    for k in range(10000):
        Y = simul Y(n,p)
        loi(k) = Y
    return loi
```

7)

```
def diagramme_en_barres_Y(n,p):
    absc = loiY(n,p)
    ordo =
    absc = [k for k in range(n)]
    ordo = loi Y(n,p)

    plt.bar(absc,ordo)
    plt.show()
```

8)(a) La clé primaire d'une table de données doit pouvoir identifier de manière unique chaque attribut de la table

8) (b)

- pour individu : "i_insee".
  ↳ personne n'a le même numéro de sécurité sociale

- pour departement : "d_numero"

- pour profession : "p_pcs"

8) (c)

```
CREATETABLE individu
    (i_nom :TEXT ,
     i_prenom TEXT,
     i_departement INTEGER,
     i_insee INTEGER PRIMARY KEY,
     i_code_profession INTEGER) ;

                 (IF NOT EXISTS)
CREATE TABLE departement
    (d_numero INTEGER PRIMARY KEY
     d_nom TEXT,
     d_population INTEGER) ;

CREATE TABLE profession
    (p_pcs INTEGER PRIMARY KEY,
     p_categorie INTEGER,
     p_intitule TEXT) ;
```

(!) Il faudra de plus avoir des "foreign keys"

Numéro d'inscription 50 ~~7~~114

Né(e) le 30/08/2006

Signature

Nom EYROUCET

Prénom (s) PAUL

17.43 / 20

Écricome Épreuve : Maths Appli

Sujet □1 ou □2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 11/11

Numéro de table 025

8)(d) SELECT DISTINCT p_pcs
FROM profession
WHERE d_numero = 28

Remarque : possible avec "intersect" ?

8)(e) SELECT i_insee
FROM individu
AND p_categorie
FROM profession

Partie III

9) Z_n est la variable aléatoire égale au revenu mensuel d'un individu que l'on a choisi avec équiprobabilité dans la catégorie choisie à l'étape précédente.

Donc, ~~$\forall x \geq 1$~~ $\forall x < 1$

$$\boxed{\begin{aligned} G_n(x) &= P(Z_n \leq x) \\ &= 0 \end{aligned}}$$

car $(Z_n = x) = \emptyset$ pour $x < 1$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

17.43 / 20

10)

On a :

$\forall i \in [\![1, n]\!]$

$\forall x \geq 1 \quad \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = \dfrac{\mathbb{P}([Y=i] \cap (Z_n = x))}{\mathbb{P}(Y=i)}$

$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ \cancel{0 \text{ si } x < 1} \end{cases}$ car $Y-1 \hookrightarrow B(n-1, p)$

Donc, $\boxed{\forall x \geq 1, \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leq x) = F_i(x)}$

10)(b) D'après 10)(a) et en vertu de la formule des probabilités totales.

(relativement au système complet d'événements $\{\cancel{[X=i], i \in}\ \{[Y-1=i], i \in [\![0, n-1]\!]\}$

$G_n(x) = \mathbb{P}_n(Z_n \leq x)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[Y-1=k]}(Z_n \leq k) \times \mathbb{P}(Y=i)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x)\, \mathbb{P}(Y=i)$ d'après 10)(a)

$= \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$

car $Y-1 \hookrightarrow B(n, p)$

Donc, on a bien montré que :

$$\boxed{G_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1} F_{\ell+1}(x) \binom{n-1}{\ell} r^\ell (1-r)^{n-1-\ell}}$$

10)(c)

Donc selon 10)(b)

$$G_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n-2} \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) \binom{n-1}{\ell} r^\ell (1-r)^{n-2-\ell}$$

par linéarité de Σ

$$= \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-1}{\ell} r^\ell (1-r)^{n-2-\ell}$$

$$\cancel{= \left(1 - \frac{1}{x_i}\right)(\cdots)} = 1 - \frac{(r+(1-r)x)^{n-1}}{x^n}$$

d'après la formule du Binôme de Newton

Donc,

$$\boxed{G_n(x) = 1 - \frac{(r+(1-r)x)^{n-1}}{x^n}}$$

11) On a : $G_n(x) = 1 - \frac{(r+(1-r)x)^{n-1}}{x^n}$

Or, $r \mapsto 1 - \frac{(r+(1-r)x)^{n-1}}{x^n}$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et continue sur $\mathbb{R}$ (en tant que combinaison linéaire et quotient de telles fonctions (dont puissance généralisée)

Donc,

Z_n est une variable aléatoire à densité

$\forall x \in \mathbb{R}$

13)(a) On a : si $x \geq 1$

$\cancel{G_n(x) = \{ 1 - \frac{1}{x}(1 - \frac{x-1}{\quad}}$

d'après 10(c),

$$G_n(x) = 1 - \frac{(r+(1-r)x)^{n-1}}{x^n}$$

Ici, « $r = \frac{1}{n}$ », donc $r = \frac{1}{n}$

$$G_n(x) = 1 - \frac{\left((\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})x\right)^{\frac{1}{r}-2}}{x^{\frac{1}{r}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1}$$

Ainsi,

$$\boxed{G_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}}$$

car si $x < 1$,
$G_n(x) = 0$

13)(b),

On calcule la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $G_n(x)$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{x}\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = 0$ car $1-\frac{x-1}{nx} \in]-1;1[$

Donc $\boxed{Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}}}$ (loi certaine égale à 1)