506192

[redacted]

QUENTIN

02/07/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 506192

Né(e) le 02/07/2006

Signature

Nom [redacted]

Prénom (s) QUENTIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/07

Numéro de table 007

Exercice 1 :

1) $E_{O_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ O_3 M + M O_3 = O_3 \}$

$= \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \}$

$E_{I_3} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ I_3 M + M I_3 = O_3 \}$

$= \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ 2M = O_3$

$= \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ M = O_3 \}$

2) on procède par caractérisation :

- $E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (par définition)
- $E_C \neq \emptyset$ car $O \in E_C$
- soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(U, V) \in (E_C)^2$

$(\lambda U + V) M + M(\lambda U + V) = \lambda U M + V M + \lambda M U + M V$

$= M(\lambda U + V) + (\lambda U + V) M$ car $(U, V) \in (E_C)^2$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Ainsi, E_C est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

3) Soit $M \in E_A \iff AM + MA = O_3$

$\iff {}^t(AM + MA) = {}^tO_3$

~~$\iff {}^tM\,{}^tA +$~~

Or ${}^tO_3 = O_3$ donc :

$\iff {}^t(AM + MA) = O_3$

et ${}^tA = A$ car elle est symétrique

$\iff {}^tM\,A + A\,{}^tM = 0$

On a montré que ${}^tM \in E_A$ par équivalences.

4a) A est symétrique réelle donc il vient que

A est diagonalisable

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on remarque que

$A^3 - 9A = O_3$ donc $P(x) = x^3 - 9x$ est un polynôme annulateur de A et $Sp(A) \subset \{0, 3, -3\}$

~~Or~~ $\cancel{rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

$=$

Soit $u \in E_0(A) \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_3$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ x = z \\ z = 2y \end{cases}$$

Le système n'est pas de Cramer donc $0 \in Sp(A)$ et

$E_0(A) = vect < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$ et

donc libre, de plus génératrice donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ base de $E_0(A)$

• $v \in E_{-3}(A) \iff (A + 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4y + 4z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = y \\ y = -z \end{cases}$$

car $L_2 = 2L_3$

donc le système n'est pas de Cramer et
$-3 \in Sp(A)$

et $E_{-3}(A) = \text{vect} < \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > = \text{vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} >$

de la même manière $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ base de $E_{-3}(A)$ car libre et génératrice

- $w \in E_3(A) \iff (A - 3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y = 2z \end{cases}$$

donc le système n'est pas de Cramer et $3 \in Sp(A)$
(car $A - 3I$ non inversible)

et $E_3(A) = \text{vect} < \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$. Cette famille est libre est génératrice donc comme libre car non nulle, alors base de $E_3(A)$

on a montré que $\lambda \in Sp(A) \iff \lambda^3 - 9\lambda = 0$
comme on a montré l'équivalence, alors on a montré l'implication de gauche

Si $\lambda \in Sp(A)$ alors $\lambda^3 - 9\lambda = 0$

Numéro d'inscription 50192

Né(e) le 02/07/2004

Signature

Nom ALBERGNE

Prénom (s) QUENTIN

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiqie

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/07

Numéro de table 007

e) En notant $B = (u, v, w)$ cette famille est libre car concaténation de vecteurs propres associés à des valeurs propre différentes.

Elle est de bon cardinal car $\text{card } B = \dim M_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$

donc c'est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. En notant P la matrice de passage de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à B on

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ (tous coefficients diagonaux égaux à 1)

alors A est diagonalisable et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

5) $$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

donc $P^2 = 9I_3$, comme $P \in M_3(\mathbb{R})$

P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{9} P$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6a) on raisonne par équivalence

$N \in E_D \iff DN + ND = 0_3$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \begin{cases} -6a = 0 \\ -3b = 0 \\ c \in \mathbb{R} \\ -3d = 0 \\ e \in \mathbb{R} \\ 3f = 0 \\ g \in \mathbb{R} \\ 3h = 0 \\ 6i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b = d = f = h = i = 0 \\ c \in \mathbb{R} \\ g \in \mathbb{R} \\ e \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\iff$ N est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) donc $E_D = \text{vect} < \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix} >$

par un test de liberté rapide on trouve que cette famille (*) est libre car $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
comme elle est génératrice, alors c'est une base de E_D (*) que l'on note B.
donc $\dim E_D = \text{card } B$
$= 3$

7a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $N = P^{-1}MP$

$M \in E_A \iff AM + MA = 0$

$\iff PDP^{-1}PNP^{-1} + PNP^{-1}PDP^{-1} = 0$

$\iff PDNP^{-1} + PNDP^{-1} = 0$

$\iff P(DN + ND)P^{-1} = 0$

$\iff DN + ND = 0$ car P et P^{-1} sont inversibles

$\iff N \in E_D$

---

b) donc $P^{-1}MP \in E_D \iff$

$\iff P^{-1}MP = a\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}_{R} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}}_{S} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}}_{T}$

$\iff M = aPRP^{-1} + bPSP^{-1} + cPTP^{-1}$

$\iff M \in \text{vect} < PRP^{-1}, PSP^{-1}, PTP^{-1} >$

on fait de la même manière que avant un test de liberté et on trouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

donc la famille est libre et génératrice, c'est une base de E_A

Ainsi, $E_A = \text{vect} \langle P\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}P^{-1} \rangle$

et une base est $\langle P\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}P^{-1} \rangle$

---

8) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$(A+M)^2 = A^2 + AM + MA + M^2$$

donc $(A+M)^2 = A^2 + M^2$ ssi AM et MA sont nuls

donc l'ensemble recherché est

$$\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad AM + MA = 0_3 \}$$

cad E_A.

---

9) $M \in \text{Ker}\, \varphi \iff \varphi(M) = 0_3$

$\iff AM + MA = 0_3$

$\iff M \in E_A$

or une base de E_A est $(PRP^{-1}, PSP^{-1}, PTP^{-1})$
donc c'est aussi une base de $\text{Ker}\, \varphi$,
et $\dim \text{Ker}(\varphi) = 3$

Numéro d'inscription 506192

Né(e) le 02/07/2004

Nom ALBERGNE

Prénom (s) QUENTIN

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématique

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/07

Numéro de table 007

Par le théorème du rang,

$\dim \ker \varphi + \dim(\operatorname{Im} \varphi) = 3$

cad $rg(\varphi) = 3-3$
$= 0$

Exercice 2:

1a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$

par croissance comparée donc $t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $(t \to +\infty)$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ comme intégrale de Riemann de

paramètre $\alpha = 2 > 1$ et $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ continues et positives sur cet intervalle $[1, +\infty[$

alors le critère de convergence par négligeabilité s'applique, $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt$ converge

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

comme $t \mapsto e^{-t} t^n$ continue sur $[0,1]$
alors $\int_0^1 e^{-t} t^n dt$ existe

Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ est convergente

b) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

Soit $A>0$, $\int_0^A e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A$

$= -e^{-A} + 1$

Or $\lim_{A \to +\infty} -e^{-A} = 0$ donc

$I_0 = 1$

$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$

Soit ~~$A>0$,~~ | $u'(t) =$ | $u(t) =$

On reconnaît l'espérance de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc I_1 CV
donc $I_1 = E(X)$
$= \frac{1}{1} = 1$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $\cancel{\frac{e^{-t}}{1+xt} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{xt}}$

or $\frac{t^3 e^{-t}}{1+xt} \sim \frac{t^3 e^{-t}}{xt}$ $(t \to +\infty)$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} = 0$ par croissance comparée

cad $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^3 e^{-t}}{1+xt} = 0$ sans indétermination

et $\frac{e^{-t}}{1+xt} = o\left(\frac{1}{t^3}\right)$ $(t\to+\infty)$

$t \mapsto \frac{1}{t^3}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ étant positifs sur $[1,+\infty[$ et

continues sur ce même intervalle, et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ converge

comme intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 3 > 1$,

alors le critère de convergence par négligeabilité s'applique encore et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ converge

$t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotients de fonctions bien définies donc elle est continue sur $[0,1]$

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ est convergente

3) Soit $x \geqslant 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$

donc $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = I_0 = 1$

4) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tels que $x \leq y$

$x \leq y \Rightarrow xt \leq yt$ car $t \geq 0$,

$\Rightarrow 1+xt \leq 1+yt$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+yt} \leq \dfrac{1}{1+xt}$ par stricte décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\Rightarrow 0 \leq \dfrac{e^{-t}}{1+yt} \leq \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$ car $e^{-t} \geq 0$

Comme tout est positif, les fonctions sont continues sur $[0;+\infty[$, par croissance de l'intégrale,

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt}\,dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$

$\Rightarrow$ <u>$F(y) \leq F(x)$</u> donc par définition

de la croissance d'une fonction, <u>F est décroissante.</u>

5a) Soit $x \geq 0$,

- si $x=0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \int_0^1 1\,dt = 1$
- si $x>0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \int_0^1 \frac{1+x-x}{1+xt}\,dt$

$\displaystyle = \int_0^1 \frac{x}{1+xt}\,dt + \int_0^1 \frac{1-x}{1+xt}\,dt$

Numéro d'inscription 50192

Né(e) le 02/07/2004

Signature

Nom ALBERGNE

Prénom (s) QUENTIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 07

Numéro de table 007

si $x>0$,

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq t \leq 1$

comme $t \geq 0 \Rightarrow -t \leq 0$

$\Rightarrow e^{-t} \leq e^0$ par stricte croissance

$\Rightarrow e^{-t} \leq 1$ de $t \mapsto e^t$ sur $\mathbb{R}^+$

et comme $0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{xt+1}$ (cas d'égalité)

alors $\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt}$ car $e^{-t} \leq 1$

les fonctions étant continues et positives sur $[0,1]$ et $1 \geq 0$, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

c) Soit $x \geq 0$,

$$t \geq 1 \Rightarrow tx \geq x \Rightarrow tx+1 \geq x+1 \geq x \Rightarrow \frac{1}{tx+1} \leq \frac{1}{x}$$

$(e^{-t} \geq 0, xt+1 \geq 0)$ $\Rightarrow 0 \leq \dfrac{e^{-t}}{tx+1} \leq \dfrac{e^{-t}}{x}$

les fonctions étant continues sur $[1, +\infty[$, comme tout est positif, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

d)

or $\displaystyle\int_1^A e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_1^A$

$= -e^{-A} + e^{-1}$

et $\lim\limits_{A \to +\infty} -e^{-A} = 0$ donc

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{e}$$

cad que dans la 5c) on remplace et on a,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}e^{-1}$$

et donc $\quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{xt+1}dt$

$+ \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ par Chasles en sommant 5b) et 5c)

comme tout est positif,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}dt + 0$$

car $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}e^{-1} = 0$

et on admet que $\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{xt+1}dt = 0$

donc par encadrement,

$$\underline{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$$

6a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt$$

comme les deux intégrales convergent,

$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\right)dt$ par linéarité

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-t}(1-xt)(1+xt)}{1+xt}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\left[1-(1-xt)(1+xt)\right]}{1+xt}dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\left(1-(1-x^2t^2)\right) dt$$ (par identité remarquable)

$$= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\, dt$$

---

b) on a déjà, $F(x) - I_0 + xI_1 \geqslant 0$
car tout est positif, (i)

de plus, d'après 6a),

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\, dt$$

comme tout converge,

$$F(x) - I_0 + xI_1 = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\, dt \leqslant x^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$$

donc par transitivité,

$$F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2 \quad (ii)$$

En mettant (i) et (ii) bout à bout,

$$\underline{0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2}$$

7a) donc $I_0 - xI_1 \leqslant F(x) \leqslant x^2 I_2 + I_0 - xI_1$
en recentrant sur F.

$$1 - x \leqslant F(x) \leqslant x^2 I_2 \quad 1 - x$$

Or

Numéro d'inscription 506192

Né(e) le 02 / 07 / 2006

Signature

Nom Albergne

Prénom (s) Quentin

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 007

Or $I_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt$

on reconnait le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc

I_2 converge et

$I_2 = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$ par Koenig-Huygens

$= 1 + 1$

$= 2$

donc $1 - x \leq F(x) \leq 2x^2 + 1 - x$

cad qu'au voisinage de 0, $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = 1 - x$

cad $F(x) = 1 - x + o(x)$ (en tronquant le membre de droite car le développement limité d'un polynôme est lui même)

donc $F(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

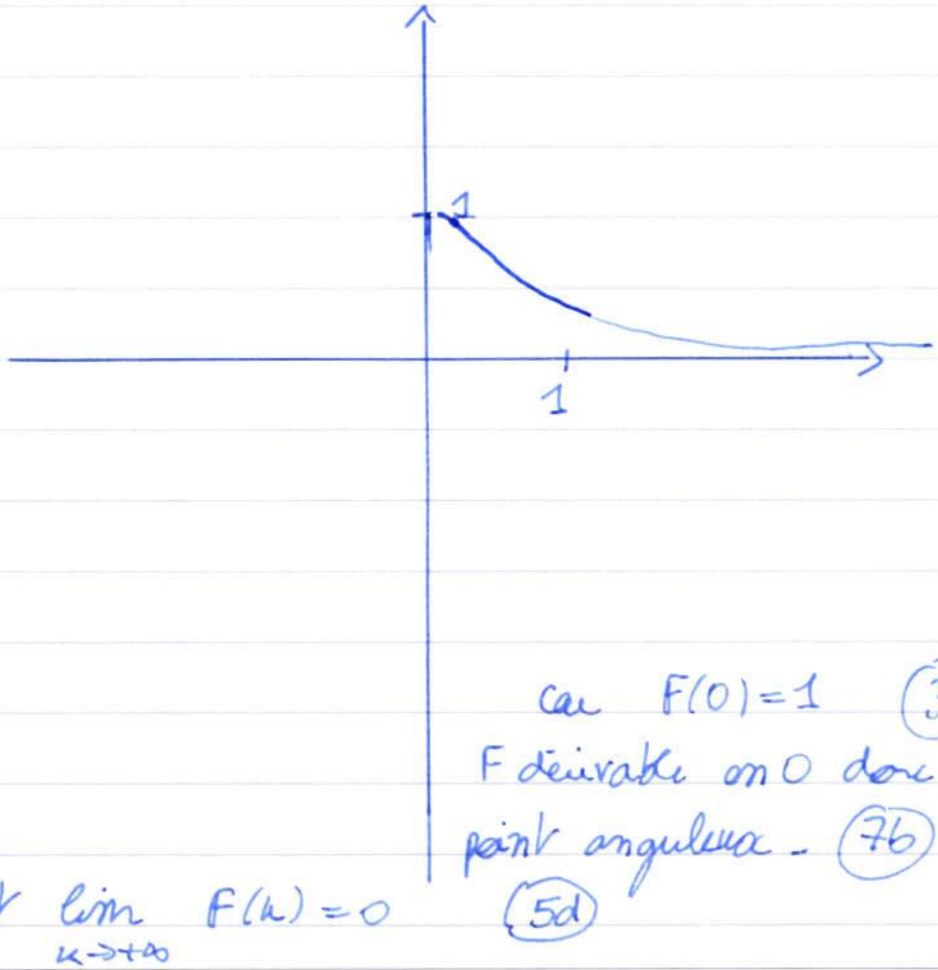
b) $$\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{1-x+o(x)-1}{x}$$

$$= -1 + o(1)$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = -1$ car $o(1)\to 0$

cad que F est dérivable car son taux d'accroissement admet une limite finie en 0
et la dérivée en ce point est cette limite,
cad $F'(0) = -1$

8)



car $F(0)=1$ (3)
F dérivable en 0 donc pas de point anguleux. (7b)

et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$ (5d)

Exercice 3 :

I) 1) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- f_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1
- f_i est définie et positive sur $\mathbb{R}$ (car $i \geqslant 1$ et $x \geqslant 1$ donc $\frac{i}{x^{i+1}} \geqslant 0$ et $0 \geqslant 0$)

- $$\int_{-\infty}^{1} f_i(x)\,dx = 0$$

et soit $A \geqslant 1$, $\int_1^A \frac{i}{x^{i+1}}\,dx = i\left[\frac{x^{-i-1+1}}{-i-1+1}\right]_1^A$

$$= i\left(-\frac{1}{A^i i} + \frac{1}{i}\right)$$

or $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{-1}{A^i} = 0$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A f_i(x)\,dx = 1$

cad que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = 1$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ f_i est une densité de probabilité

2a) X_i admet une espérance ssi $\int_1^{+\infty} x \frac{i}{x^{i+1}}\,dx$ converge absolument donc converge ici,

cad ssi $\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}\,dx$ donc cette intégrale

converge ssi $i > 1$ (par critère de Riemann...)
donc X_i admet une espérance ssi $i > 1$
donc $\forall i \in [\![2, n]\!]$.

et dans ce cas, $\mathbb{E}(X_i) = \lim\limits_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{i}{x^i} dx$

$$= \lim_{A \to +\infty} i \left[\frac{x^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^A$$

$$= \lim i \left(\frac{A^{-i+1}}{-i+1} - \frac{1}{-i+1} \right)$$

or $\lim\limits_{A \to +\infty} \frac{A^{1-i}}{1-i} = 0$ et donc

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{i}{i-1}$$

b) donc on aura

$$\mathbb{E}(X_2) = 2$$
$$\mathbb{E}(X_3) = \frac{3}{2}$$
$$\mathbb{E}(X_4) = \frac{4}{3}$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{n-1}$$

donc $\mathbb{E}(X_2) \geq \mathbb{E}(X_3) \geq \dots \geq \mathbb{E}(X_n) \geq 0$

$\Rightarrow X_2 \geq X_3 \geq \dots \geq X_n \geq 0$

par croissance de l'espérance

donc le moins élevé seront les X_n puis la $(n-1)^e$ catégorie et ainsi de suite..

celle avec le meilleur revenu sera la 2nde catégorie

Numéro d'inscription 506192

Né(e) le 02/07/2004

Signature

Nom ALBERGNE

Prénom (s) QUENTIN

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/07

Numéro de table 007

3) Soit $X_i(\Omega) = [1, +\infty[$

• si $x < 1$, $F_i(x) = 0$

• si $x \geq 1$, $F_i(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x)$

$= \int_1^x f_i(u)\,du$

$= 1 - \frac{1}{x^i}$ d'après la question (1) déja calculée en changeant A et x.

donc $F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

4a) $U(\Omega) =]0, 1[$ $V_i = \frac{1}{U^{1/i}}$

donc $V_i(\Omega) = [1, +\infty[= X_i(\Omega)$ d'une part,

et • si $x < 1$, $F_{V_i}(x) = 0$

• si $x \geq 1$, $F_{V_i}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right)$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

$= \mathbb{P}\left(U^{1/i} \geq \frac{1}{x} \right)$ car $x \geq 0$

$= 1 - \mathbb{P}\left(U^{1/i} \leq \frac{1}{x} \right)$

$= 1 - \mathbb{P}\left(U \leq \left(\frac{1}{x}\right)^i \right)$ par croissance de $x \mapsto x^i$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$= 1 - F_U\left(\left(\frac{1}{x}\right)^i\right)$

$= 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^i$ car $\left(\frac{1}{x}\right)^i \in [0,1]$

donc comme la fonction de répartition caractérise la loi,

$$F_{V_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} = F_{X_i}(x)$$

Vi et Xi suivent la même loi

b) ⊕

```
def simulX(i):
    u = rd.random()
    return 1/(u**(1/i))
```

⊕ import numpy.random as rd.

II] 5) Y egale au numéro de la categorie socio professionnelle de l'individu
et $Y-1 \sim B(n-1, p)$

```
def simul Y (n,p):
    T= rd.binomial (p)
    return T+1
```

6)

```
def loi Y(n,p):
    N = 1000
    loi =[0] * n
    for k in range (1; 10001):
        y = simul Y(n,p)
        loi [y+1] / 10000
    return loi
```

7)

```
def hist (n,p)
    np. linspace (1, n+1 , n)
    t= loi Y(n,p)
    plt . hist ()
    plt .show()
```

8) a) Elle doit permettre de pouvoir retrouver les individus de manière précise via quelque chose d'unique.

b) La clé primaire de la table individu est i_insee
celle de la table département est d_numéro

ccee a ce la table profession est p-pcs

c) individu = (i_nom (TEXT) ; i_prénom (TEXT) ; i_departement (INTEGER) ; i_insee (INTEGER) ; i-code-profession (INTEGER)) ;

departement = (#d_numero (INTEGER) ; d_nom (TEXT) ; d-population (INTEGER)) ;

profession = (#p-pcs (INTEGER) ; p-categorie (INTEGER) ; p-intitule (TEXT)) ;

d) SELECT DISTINCT i-code-profession FROM i_department WHERE i_department = 28

e)

III] $p \in]0,1[$, Y numéro de la catégorie choisie, et $Y-1 \hookrightarrow B(n-1, p)$

Soit $x < 1$,

9) $G_n(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x)$

$$\cancel{= \sum_{k=0}^{x} \mathbb{P}(Z_n = k)} \quad = \mathbb{P}(X_i \leq x)$$

$$= F_i(x) = 0$$

Numéro d'inscription 506192

Né(e) le 02 / 07 / 2004

Nom ALBERGNE

Prénom (s) QUENTIN

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 007

Commencez à composer dès la première page.

10 a) Soit $x \geq 1$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$$\mathbb{P}_{Y=i}(Z_n \leq x) = F_i(x)$$

Car sachant $[Y=i]$ réalisé alors on se trouve dans la catégorie i. et la probabilité que le revenu mensuel (qui est en millier d'euros) soit plus petit que x revient exactement à calculer la probabilité $\mathbb{P}(X_i \leq x)$ qui correspond à calculer la probabilité du même événement sachant $(Y=i)$ que $(Z_n \leq x)$

b) Soit $x \geq 1$,

$$G_n(x) = \mathbb{P}(Z_n \leq x)$$

$[Y=k]_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, par la formule des probabilités totales

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_n \leq x \cap Y=k)$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y=k)\ \mathbb{P}_{Y=k}(Z_n \leq x)$

$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} F_k(x)$ car $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1,p)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k-1} F_{k+1}(x)$ changement indice $j = k-1$

c) binome de newton...

11) G_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ (sauf eventuellement en 1)

G_n continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme sommes de telles fonctions

en 1 : $\lim_{x \to 1^-} G_n(x) = G_n(1) = 0$

donc Z_n est une variable aléatoire à densité

12)

13a)

$$G_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)x\right)^{n-1}}{x^n} & si\ x \geq 1 \\ 0 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

$= 1 -$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$

il faut calculer limite

$\lim\limits_{x \to -\infty} G_n(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = 1$ car

$\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)}$

$\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{x-1}{nx}$

$(n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(n-1)(1-x)}{nx}$

$\sim \frac{1-x}{x}$

et par continuité de l'exponentielle en $\frac{1-x}{x}$

$\frac{1}{x}\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} \longrightarrow 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = 1$

7m cv en loi vers X v.a. ~~sgn~~ certaine égale à 1