Mathématiques appliquées

Conception emlyon BS

Session 2025

I Présentation du sujet

Suivant le format habituel, le sujet consistait en trois exercices portant sur les trois thèmes au programme : analyse, algèbre linéaire, probabilités. Les questions ont permis d'évaluer les candidats sur leurs connaissances, leur technique calculatoire, leur capacité à raisonner, et la qualité de leur rédaction.

Le premier exercice portait sur la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Dans les premières questions on déterminait assez simplement la monotonie et la limite de (u_n). On étudiait ensuite la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = xe^{1/x}$, en utilisant notamment le développement en série entière de l'exponentielle. Dans la dernière partie on exploitait les résultats établis précédemment afin d'obtenir un équivalent de u_n, ceci *via* des sommes télescopiques. Cet exercice faisait la part belle aux inégalités.

Le deuxième exercice se divisait en deux parties indépendantes. Dans la première partie on diagonalisait dans une même base toutes les matrices d'un sous–espace vectoriel $\mathscr{E}$ de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$. Si cette partie ne présentait pas de grande difficulté, elle requérait une compréhension claire des relations entre vecteurs propres, matrice de passage et matrice semblable. La deuxième partie était consacrée à la programmation d'un algorithme de coloration des graphes.

Le troisième exercice mélangeait probabilités continues et probabilités discrètes autour d'une question d'évaluation du coût des sinistres par une compagnie d'assurance. On y retrouvait un grand nombre de questions classiques, la partie centrale abordait le problème de la convergence en loi de $\max(V_1, \ldots, V_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, où (V_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Pareto.

Le début de chaque exercice se voulait abordable, le sujet dans son ensemble brassait un grand nombre de notions.

II Répartition des points et distribution des notes

Répartition des points

Les points se répartissent de manière équilibrée entre les trois exercices :

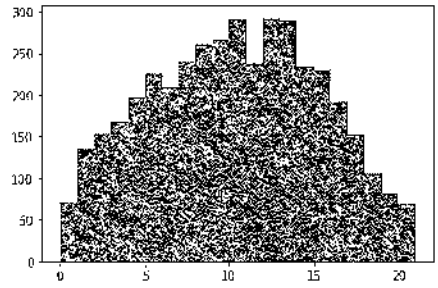
Exercice 1	33%
Exercice 2	33%
Exercice 3	32%
Présentation et rédaction	2%

Insistons sur le fait que nous tenons compte de la qualité de la rédaction dans l'évaluation de chaque question. De plus, des points sont attribués à la qualité globale de la rédaction et de la présentation selon les critères suivants :

- Rédaction : clarté des raisonnements, souci d'expliquer la démarche, qualité de la langue.
- Présentation : propreté de la copie, bonne numérotation des questions, mise en valeur des résultats (encadrés, soulignés ou surlignés), lisibilité, réalisation des tableaux à la règle.

Distribution des notes

Voici l'histogramme représentant la répartition des notes ainsi que quelques données statistiques :



- Nombre de copies : 4096
- Moyenne : 10,3
- Écart-type : 5
- Quartiles : 6,3 – 10,4 – 14,1

III Commentaires généraux

La plupart des candidats ont abordé les trois exercices du sujet, mais peu d'entre eux ont traité les questions relatives au programme d'informatique. Les candidats sont visiblement plus à l'aise en analyse qu'en algèbre ou probabilités. On trouve de bonnes réponses aux questions théoriques dans un nombre non négligeable de copies, même si les candidats marquent généralement une préférence pour les questions calculatoires.

Malheureusement un grand nombre de copies montrent une mauvaise maîtrise de la langue française. Très peu de candidats savent écrire correctement le nom de « Riemann » ou de « Bernoulli », beaucoup écrivent u_n au lieu de (u_n), et $f(x)$ au lieu de f.

IV Commentaires par exercices

Exercice 1

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

(Q1) a) Le raisonnement par récurrence fait encore défaut chez certains candidats, qui écrivent « $\forall n \in \mathbf{N}$ » dans la preuve de l'hérédité.
b) Les candidats étudiant la position de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 afin de déterminer le sens de variation de la suite doivent préciser que (u_n) est à termes strictement positifs.
c) Le fait que la suite (u_n) admette nécessairement une limite est rarement justifié. Le principe du raisonnement par l'absurde n'est pas toujours bien acquis. Beaucoup de candidats écrivent « $\frac{1}{\ell} = 0 \iff \ell = 0$ ».

(Q2) Question plutôt bien traitée, mais il y a des erreurs sur la syntaxe np . exp, et beaucoup de candidats renvoient u à la place de n.

Partie B : Étude de la fonction f

(Q3) Les candidats ne justifiant pas leurs résultats ne reçoivent aucun point. L'expression « par croissances comparées » n'est pas une formule magique, les candidats doivent se ramener à la forme donnée dans le cours pour l'utiliser.

(Q4) On relève des erreurs sur le calcul de la dérivée de f. Un grand nombre de candidats oublient de mentionner la valeur interdite dans la partie variations du tableau.

(Q5) Un grand nombre de candidats n'ont pas vu que $x^{-k} = \left(\frac{1}{x}\right)^k$. Les candidats doivent respecter les notations : la somme de la série n'est pas la série. Quelques candidats confondent $e^{1/x}$ avec e^{-x}.

(Q6) Le a) demandait de l'initiative, les réponses partielles étaient valorisées.

(Q7) Question bien traitée, mais certains candidats ne comprennent pas le sens de $o(1)$, on voit même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = x+1$.

(Q8) Très peu de candidats sont capables de réaliser un dessin propre faisant apparaître les propriétés de f établies dans les questions précédentes. Très peu de candidats savent tracer la droite d'équation $y = x+1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(Q9) Un grand nombre de candidats ont répondu correctement à ces deux questions (par télescopage ou par récurrence concernant le b).

(Q10) Dans le a) les candidats devaient vérifier que $u_k \geqslant 1$ pour pouvoir appliquer $(*)$ avec $x = u_k$.

(Q11) Dans le a), la référence indispensable à $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ est rarement évoquée.

(Q12) Question plus technique qui a été très peu abordée.

Exercice 2

Partie A : Rédaction simultanée et spectre

(Q1) Certains candidats oublient de mentionner le caractère générateur de la famille (I, J, K). On relève d'importantes confusions : on évoque la dimension d'une famille, ou le cardinal d'un sous–espace vectoriel.

(Q2) Question très bien réussie.

(Q3) b) On trouve des erreurs dans l'écriture du polynôme annulateur, par exemple $J(J-\sqrt{2})(J+\sqrt{2})$. De nombreux candidats perdent beaucoup de temps à étudier les sous–espaces propres, ce qui n'était pas demandé.

(Q4) a) Très bien réussie.
b) Les opérations sur les lignes sont trop rarement précisées.

(Q5) a) Nous rappelons que la caractérisation des matrices diagonalisables à l'aide de la somme des dimensions des sous–espaces propres n'est plus au programme.

(Q6) Il était inutile de chercher des vecteurs propres de K, ceux–ci étaient proposés par l'énoncé.

(Q7) Beaucoup de candidats perdent du temps à calculer P^{-1}.

(Q8) b) Peu de candidats, parmi ceux ayant déterminé S, ont utilisé cette matrice pour établir la bijectivité de s.

Partie B : Un algorithme de coloration des graphes

(Q9) Question très peu réussie.

(Q10) De nombreux candidats confondent l'opérateur d'égalité == et l'opérateur d'inclusion in.

(Q11) Question très peu réussie.

(Q12) Idem

Exercice 3

Partie A : La variable aléatoire V

(Q1) c) Des candidats vérifient toutes les conditions justifiant que F est une fonction de répartition d'une variable à densité sans remarquer qu'on sait déjà que F est une fonction de répartition.

(Q2) Un grand nombre de candidats ont fait un effort de rédaction sur cette question. Cependant, il convient d'éviter tout abus de l'expression « sous réserve de convergence ».

Partie B : Loi du sinistre le plus coûteux

(Q3) a) Question plutôt réussie.
b) Beaucoup de candidats ne pensent pas à la disjonction de cas entre $x < 1$ et $x \geqslant 1$.
c) Les réponses ne sont généralement pas assez argumentées.

(Q4) Question plutôt réussie lorsqu'elle est abordée.

Partie C : Manipulation d'une base de données

(Q5) Question réussie de la part des candidats ayant travaillé SQL.

(Q6) Question très peu réussie.

Partie D : Nombre de sinistres graves

(Q7) On attend des candidats qu'ils précisent le support $N(\Omega)$.

(Q8) Beaucoup d'incompréhensions.

(Q9) a) La phrase type avec tous les arguments indispensables pour justifier une loi binomiale est peu maitrisée. Le deuxième paramètre $\frac{1}{A^2}$ est souvent donné sans justification.
b) Question largement réussie

(Q10) La question était peu guidée, mais un certain nombre de candidats ont bien avancé dans les calculs, parfois avec des erreurs d'indices.

(Q11) Cette question permettait de valoriser les candidats ayant correctement répondu à la question précédente.