507719

GARREAU

GAUTHIER

09/06/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 50719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/10

Numéro de table 025

Exercice 1 :

1)a)

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car c'est une série de Riemann avec $2>1$

b) ~~$\forall n\geq 1$ $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$ $\frac{1}{n^2}$~~

. $\forall n \geq 1$, $0 \leq \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (1.a)

par critère de comparaison, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument, donc converge

c) . $\forall n \geq 0$ $\frac{1}{(2n+1)^2} \geq 0$

. $\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$

. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (1.a) donc $\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

par critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

2). $A - B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2}$ (car ce sont les séries convergentes)

décomposition pairs/impairs

Soit $N \geq 0$, $\sum_{n=1}^{2N} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1-\overbrace{(-1)^{2n}}^{=1}}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1-\overbrace{(-1)^{2n+1}}^{=-1}}{(2n+1)^2}$

$= 2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^2}$

par passage à la limite quand $N \to +\infty$ (on a bien ~~l'existence~~ la convergence des séries)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

donc $\underline{A - B = 2C}$

Soit $p \geq 0$

$\sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{(2n+1)^2}$

par passage à la limite quand $p \to +\infty$ (on a bien l'existence des séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc $\underline{A = \frac{1}{4}A + C}$

3)a) on seient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ (car $x \mapsto \cos(x)$ est paire et $x \mapsto \sin(x)$ est impaire)

donc $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$

doc $\underline{\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit $P(n)$: " $\forall t \in [0,\pi[,\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos(\frac{2n+1}{2}t)}{2\cos(\frac{t}{2})}$ "

pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{1}(-1)^k\cos(kt) = \cancel{\cos(nt)} = -\cos(t)$

et $-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^1\cos(\frac{2+1}{2}t)}{2\cos(\frac{t}{2})} = -\frac{1}{2} - \frac{\cos(\frac{3t}{2})}{2\cos(\frac{t}{2})}$

$= -\frac{2\cos(\frac{t}{2}) - 2\cos(\frac{3t}{2})}{4\cos(\frac{t}{2})}$

$= -\frac{(\cos(\frac{t}{2}) + \cos(\frac{3t}{2}))}{2\cos(\frac{t}{2})}$ ...

admettons que P(1) vraie

soit $n \geq 1$, supposons $P(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) = (-1)^{n+1}\cos((n+1)t) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos(kt)$$

par hypothèse, $$= (-1)^{n+1}\cos((n+1)t) - \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\cancel{=(-1)^{n+1}} \cos(\cancel{(n+1)t)} - \frac{1}{2} + \cancel{(-1)^n / \cos}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos((n+1)t) + (-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

d'après 3)a) $$= (-1)^{n+1}\left(\cos\left(\frac{t}{2} + (n+1)t\right) + \cos\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right) + (-1)^n \cancel{\left(\frac{2n+1}{2}\right.} \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right.$$

$$- \frac{1}{2}$$

$$= (-1)^{n+1}\left(\cos\left(t\left(n+\frac{3}{2}\right)\right) + \cos\left(t\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) + (-1)^n\left(\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right)\right.$$

$$- \frac{1}{2}$$

---

5)a) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ / $a < b$, et f $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc continue sur $[a,b]$

f est continue sur un segment donc d'après le théorème des valeurs extrémales, ~~f est b~~ f y est borné (et y atteint ses bornes)

donc $\underline{\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall t \in [a,b],\ |f(t)| \leq M}$

de même, f' est continue sur un segment, donc y est borné

donc $\underline{\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall t \in [a,b],\ |f'(t)| \leq M}$

les deux fonctions sont bornées sur $[a,b]$, donc finalement,

Numéro d'inscription 50719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/10

Numéro de table 025

~~il existe un~~

$\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall t \in [a,b],\ |f(t)| \leq M$ et $|f'(t)| \leq M$

b)

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|$$

par inégalité triangulaire $\leq \dfrac{1}{|\lambda|}\displaystyle\int_a^b |f'(t)|\,|\sin(\lambda t)|\,dt$

d'après 4a) $\leq \dfrac{1}{|\lambda|}\displaystyle\int_a^b M\,dt$

$$\leq \frac{(b-a)M}{\lambda}$$

et $\dfrac{(b-a)M}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$

c) Soit $I = \displaystyle\int_a^b f^{3}(t)\cos(\lambda t)\,dt$

on réalise une intégration par parties avec les fonctions $\mathcal{C}^1$ suivantes

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$u(t) = f(t)$ $\qquad v(t) = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t)$

$u'(t) = f'(t)$ $\qquad v'(t) = \cos(\lambda t)$

donc $I = \left[f(t) \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt$

or, $\forall t \in [a,b]$, $\left| f(t) \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) \right| \underset{\text{q. 4a}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{|\lambda|} M}_{\xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0}$

donc par encadrement, ~~f(t)~~ $\forall t \in [a,b]$, $f(t) \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

& ceci est vrai en particulier pour $t = a$ et $t = b$,

et en utilisant le resultat de 4b,

$$\underline{\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \right) = 0}$$

5) a)

~~$\forall t \in [0$~~ $\forall t \in]0, \pi]$, $\frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}]$

et $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \in]0, 1]$

donc φ est définie ~~et comme $\forall t \in]0, \pi$~~ est $\underline{\mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, \pi]}$ (car $x \mapsto \sin(x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$)

donc $\forall t \in]0, \pi]$, $\varphi'(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - t \times \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$

b) $\cancel{\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^3}{3!} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)}$

$\cancel{= \frac{t}{2} - \frac{1}{6 \times 8} t^3 + \underset{t \to 0}{o}(t^3)}$

or, $\dfrac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t}{\frac{t}{2}} = 2$

donc $\displaystyle\lim_{t \to 0} (\varphi(t)) = 2$

comme φ est continue ~~en~~ sur $]0, \pi]$, et φ a une limite finie en 0, on peut prolonger φ par continuité en 0

(on pose alors $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ 2 & \text{si } t = 0 \end{cases}$)

c) $\varphi'(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$ (q. 5a)

$\cancel{\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)}$

$\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \dfrac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$

donc

$\frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{t^3}{2} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$

et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \dfrac{\left(\frac{t}{2}\right)^3}{3!} = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$

donc $\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} + \underset{t \to 0}{o}(t^3) - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{8} + o(t^3)$

$= t^3\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{48}\right) + o(t^3) = t^3\left(\frac{5}{48}\right) + o(t^3)$

et comme $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^2}{4}$

alors $\dfrac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{\frac{5}{48} \times t^3}{\frac{t^2}{4}} = \underbrace{\frac{4 \times 5}{48} \times t}_{\xrightarrow[t \to 0]{} 0}$

donc $\varphi'(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

donc comme
- φ est continue sur $[0, \pi]$ (4.5b)
- φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ (4.5a)
- φ' tend vers une limite finie en 0,

d'après le <u>théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$</u>,

<u>φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$</u>

d) ~~on opère de la même façon~~ :
$\forall t \in [0, \pi[$, $f(t) = \varphi(\pi - t)$
comme φ est prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$
(en prolongeant en 0),

comme $\pi - t \xrightarrow[t \to \pi]{} 0$, ~~alors φ est p~~

alors <u>f est prolongeable (en π) vers une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$</u>

en effet, on a bien φ $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, donc f $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$

(si $t \in [0, \pi]$, $\pi - t \in [0, \pi]$)

Numéro d'inscription 507719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/10

Numéro de table 025

6)a) ~~Supp~~ Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

Supposons que k est pair,

$$\int_0^\pi (\pi - t)\cos(kt)\,dt \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de l'intégrale}}}{=} \pi \int_0^\pi \cos(kt)\,dt - \int_0^\pi t\cos(kt)\,dt$$

$$= \underbrace{\pi \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{=0} - \underbrace{\int_0^\pi t\cos(kt)\,dt}_{=I}$$

on réalise une intégration par parties sur I avec les fonctions C^1 suivantes :

$u(t) = t \qquad v(t) = \frac{\sin(kt)}{k}$

$u'(t) = 1 \qquad v'(t) = \cos(kt)$

$$I = \left[\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{k}\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi = -\frac{1}{k}\left(-\frac{\overbrace{\cos(\pi k)}^{=(-1)^k}}{k} + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ -\frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

donc $\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(kt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t)\cos(kt)\,dt$$

décomposition pairs/impairs $= \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{2k} (\pi - t)\cos(2kt) + \sum_{k=0}^{N} (-1)^{2k+1} (\pi - t)\cos((2k+1)t)\,dt$

par linéarité de l'intégrale $= \sum_{k=1}^{N} \left(\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(2kt)\,dt\right) - \sum_{k=0}^{N} \int_0^{\pi} (\pi - t)\cos((2k+1)t)\,dt)$

d'après 6)a) $= -2 \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}$

donc $\int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t)\cos(kt)\,dt = -2 \sum_{m=0}^{2N+1} \frac{1}{(2m+1)^2}$

7)a)

b) avec la question 2),

$A = C + \frac{1}{4} C$ donc $A = \frac{4}{3} C$

donc $A = \frac{\pi^2}{6}$

et $B = A - 2C$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{4\pi^2 - 6\pi^2}{24}$$

$$= -\frac{\pi^2}{12}$$

donc $\underline{B = -\dfrac{\pi^2}{12}}$

Exercice 2 :

Partie I :

1)a)

$$\cancel{M^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=M} \underbrace{\begin{pmatrix} 16 & 6 & 16 \\ 24 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & 14 \end{pmatrix}}_{=M^2} \begin{pmatrix} 92 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}$$

on a $\underline{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$,

c'est une famille de 10 éléments, et comme $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$

est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ~~alors~~ et que le cardinal de ~~cette~~ la base canonique est 9,

alors toute famille libre est de cardinal inférieur ~~a~~ ou égal à 9

donc $\underline{(I_3, M, \dots, M^9) \text{ est liée}}$

b) Toute matrice carrée admet un polynome annulateur,

donc M admet un polynome annulateur (donc un polynome non nul)

~~Supposons qu'il soit~~

~~Soit~~ Supposons que P est un polynome annulateur de degré d supérieur ou égal à 10.

alors $P(M) = 0_{M_3(\mathbb{R})}$ donc $\sum_{i=0}^{d} \lambda_i M^i = 0$

or, comme $(I_3, \dots, M^9)$ est liée, alors ..

2) a)

```
def PolyAnn(M):
    if M**3 - 4*M**2 - 12*M - 28 == 0 :
        return True
    else :
        return False
```

b) φ est annulateur de M

~~donc $A^3 - 4A^2 - 12$~~

$M^3 - 4M^2 - 12M - 28 I = 0$

donc $\frac{1}{28}(M^3 - 4M^2 - 12M) = I_n$

donc $M\left(\frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_n)\right) = I_n$

comme M est une matrice carrée, M est inversible

et $M^{-1} = \frac{1}{28}(M^2 - 4M - 12I_n)$

3) a) ~~on sait~~ que si ~~$AX = \lambda X$~~ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$),

~~on a $\varphi(AX) = \varphi(\lambda)X$~~

Numéro d'inscription 507719

Né(e) le 09/06/2005

Signature

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/10

Numéro de table 025

~~donc~~

Soit λ une valeur propre de A

alors $\exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\} \ / \ AX = \lambda X$

donc $\varphi(AX) = \varphi(\lambda)X$

$= 0$ (car φ est annulateur de A)

donc Si λ est valeur propre de M, alors $\varphi(\lambda) = 0$

5) φ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,

$\varphi'(x) = 3x^2 - 8x - 12$

$\varphi'(x) \geq 0 \iff 3x^2 - 8x - 12 \geq 0$

donc $\Delta = 64 - 4 \times 3 \times (-12)$

$= 64 + 144 = 208$

en notant (x_1, x_2) les racines, on a

donc $x_1 = \dfrac{8 - \sqrt{208}}{2 \times 3} = \dfrac{4 - \sqrt{208}}{3} < 0$ (admis)

$x_2 = \dfrac{8 + \sqrt{208}}{2 \times 3} = \dfrac{4 + \sqrt{208}}{3} > 0$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

comme $3>0$ ~~on~~

$$\varphi'(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, \frac{4-2\sqrt{13}}{3}] \cup [\frac{4+2\sqrt{13}}{3}, +\infty[$$

d'où

x	$-\infty$		$\frac{4-2\sqrt{13}}{3}$		$\frac{4+2\sqrt{13}}{3}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

$\varphi(x) \xrightarrow[-\infty]{} -\infty$

$\varphi(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

(par équivalences avec degrés supérieurs)

~~or, $\varphi(\alpha) < 0$~~
~~et comme $\varphi(\beta) =$~~ erreur ...
~~donc~~

c) Supposons que M soit diagonalisable,
alors l'unique valeur propre possible λ est telle que

$$\dim \mathrm{Ker}(M - \lambda I_3) = 3$$

donc $\exists ! P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et $D = \cancel{\beta} \lambda I_3$

tel que $M = PDP^{-1} = \lambda I_3$
absurde car M n'est pas diagonale

donc $\underline{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

<u>Partie 2</u> :

4) ${}^tS = {}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$

donc $\underline{S \text{ est symétrique}}$

5) Soit λ une valeur propre de S

alors $\exists!\ X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{M_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, $SX = \lambda X$

6) S est symétrique donc diagonalisable et d'après le théorème spectral,

$\exists P \in M_3(\mathbb{R})$ orthogonale et $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$\underline{S = PD{}^tP}$

7)a) Soit $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \alpha_2 & \\ (0) & & \alpha_3 \end{pmatrix}$

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & (0) \\ & \alpha_2^2 & \\ (0) & & \alpha_3^2 \end{pmatrix}$$

donc $\Delta^2 = D \iff \begin{cases} \alpha_1^2 = 1 \\ \alpha_2^2 = 16 \\ \alpha_3 = 49 \end{cases}$

or, $\alpha_1^2 = 1 \iff \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \text{ou} \\ \alpha_1 = -1 \end{cases}$ et $\alpha_2^2 = 16 \iff \begin{cases} \alpha_2 = 4 \\ \text{ou} \\ \alpha_2 = -4 \end{cases}$ et $\alpha_3^2 = 49 \iff \begin{cases} \alpha_3 = 7 \\ \text{ou} \\ \alpha_3 = -7 \end{cases}$

Ainsi, il y a 8 ~~pon~~ matrices diagonales telles que $\Delta^2 = D$

b) Δ est une matrice diagonale avec des coefficients non nuls (car $\Delta^2 = D$), et en regardant les matrices possible en 7b)

donc Δ est inversible

8) ~~Soit R symétrique réelle~~

~~alors~~ avec les mêmes ~~arguments~~ qu'en

Posons R symétrique réelle telle que $\exists P$ ~~AM~~ orthogonale, tel que

$$R = P \Delta {}^tP$$

alors $R^2 = P\Delta \underbrace{{}^tP P}_{= I} \Delta {}^tP = P\Delta^2 {}^tP = PD{}^tP = S$

donc ~~$\exists$~~ il existe matrice symétrique ~~réelle~~ réelle telle que $R^2 = S$

9) ~~Δ n'~~ Δ n'a pas de coefficients nuls (sur sa diagonale),

et comme R est symétrique et diagonalisable, les valeurs propres de R sont sur la diagonale de la matrice Δ,

donc 0 n'est pas valeur propre, donc $\dim \mathrm{Ker}(R) = 0$
et par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(R) = 3$

Numéro d'inscription 507719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/10

Numéro de table 025

donc $\underline{R \text{ est inversible}}$

~~$R \times R = P\Delta^2\,{}^tP$~~

Δ est ~~donc~~ inversible (7b)

$R = P\Delta\,{}^tP$ donc ${}^tPR = \Delta\,{}^tP$

donc $\Delta^{-1}\,{}^tPR = {}^tP$

donc $P\Delta^{-1}\,{}^tPR = I_n$

comme R est une matrice carrée, $\underline{R^{-1} = P\Delta^{-1}\,{}^tP}$

10) ${}^tUU = {}^t(MR^{-1})(MR^{-1})$

$= {}^t(R^{-1})\,{}^tM \times MR^{-1}$

$= {}^t(R^{-1})\,SR^{-1}$

$= {}^t(P\Delta^{-1}\,{}^tP)\,P\Delta\,{}^tPP\Delta^{-1}\,{}^tP$

$= P\Delta^{-1}\,{}^tPP\Delta\,{}^tPP\Delta^{-1}\,{}^tP$

$= P\Delta^{-1}\Delta\,\Delta^{-1}\,{}^tP$

$= P\Delta(\Delta^{-1})^2\,{}^tP$ (car Δ^{-1} et Δ sont des matrices diagonales, donc commutent

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

or, $\cancel{\Delta}$ $\Delta^2 = D$

donc $\Delta = D\Delta^{-1}$

donc $I_n = D(\Delta^{-1})^2$

donc ${}^tUU = P{}^tP = I_n$

donc U est orthogonale

Partie III :

11) $R = P\Delta{}^tP$

et Δ ~~a ses~~ diagonale avec des coefficients diagonaux strictement positifs, qui sont les valeurs propres de R

donc ~~R~~ R a des valeurs propres strictement positives

12) $M = VT$

~~donc ${}^tVM = T$ (car V est orthogonale)~~

~~donc $T^2 = ({}^tVM)({}^tVM) =$~~

$S = {}^tMVT$

~~donc~~ admettons que $T^2 = S$

$N^2 = {}^tP\,T P\,{}^tP\,T P = {}^tP S P$

or, $S = P D\,{}^tP$

donc $D = {}^tP S P$

donc $\underline{N^2 = D}$

13) $\cancel{ST = S^t}$

$\cancel{M = VT}$ donc $T = \cancel{{}^tVM}$ ~~(V orthogonale)~~

~~donc $TS = {}^tVM\,{}^tMM$~~

~~donc $T^2S = {}^tVM\,{}^tMMS$~~

~~or $S^2 = {}^tV$~~

$S^2 = T^2S = S^2 = ST^2$

donc $T^2S = ST^2$

14)a) Soit $i \in [\![1,3]\!]$

~~$\begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,3} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{3,1} & \cdots & P_{3,3} \end{pmatrix}$~~

~~$(PE_i)_{k,l} = \sum_{k=1}^{3} (P)_{k,k}(E_i)_{k,l}$~~

$(PE_i)_{l,1} = \sum_{k=1}^{3} (P)_{l,k} \underbrace{(E_i)_{k,1}}_{\begin{cases} = 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}} = [P]_{l,i} = C_i$

donc $\underline{P E_i = C_i}$

b) $\cancel{Si}$ $C_i \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

$S C_i = S P E_i$

c) $S C_i = \lambda_i C_i$

doc $S T C_i \underset{\substack{\uparrow \\ q.13}}{=} T S C_i \underset{\substack{\uparrow \\ q.14b)}}{=} T \lambda_i C_i = \lambda_i T C_i$

donc $\underline{T C_i \in \mathrm{Ker}(S - \lambda_i I_3)}$

d)

15) $\cancel{N^2 = \Delta}$

admettons que $N = \Delta$

alors $\Delta = {}^tP T P$

doc $T = P \Delta {}^tP = R$

donc $\underline{T = R}$

<u>Problème</u>

<u>Partie I</u>

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

a) $\underline{t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}}$

Numéro d'inscription 507719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06 / 10

Numéro de table 025

b) . $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$, $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \geq 0$

. $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$

. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}} dx$ converge si et seulement si $1-x < 1 \iff x > 0$ (intégrale de Riemann)

par critère d'équivalence, $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$

c) Soit $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

on réalise le changement de variable affine $s = 1-t$

donc les intégrales sont de même nature :

quand $t = 1$, $s = 0$ $\qquad dt = -ds$

quand $t \to \frac{1}{2}$, $s \to \frac{1}{2}$

donc on obtient $\int_{\frac{1}{2}}^{0} (1-s)^{x-1} s^{y-1} (-ds) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-s)^{x-1} s^{y-1}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

donc I et $\int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\,ds$ sont de même nature

d) d'après b) et c),

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ converge si et seulement si $y>0$,

alors comme $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ converge si et seulement si $x>0$,

$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ converge si et seulement si $x>0$ et $y>0$

2) Soient $(x,y)\in\,]0,+\infty[^2$,

Soit $I = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = B(x,y)$

on réalise le changement de variable affine $s = 1-t$ (les intégrales convergent)

quand $t=1$, $s=0$ $\qquad dt = (-ds)$

quand $t=0$, $s=1$

les intégrales convergent donc sont égales,

$$I = \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1}\,ds = B(y,x)$$

donc $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad \underline{B(x,y) = B(y,x)}$

3) Soit $x > 0$,

$$B(x,1) = \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x}$$

donc $\underline{B(x,1) = \frac{1}{x}}$

4) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$

a)

$$B(x+1,y) + B(x,y+1) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt$$

par linéarité de l'intégrale,

$$= \int_0^1 t^{x-1}\times(1-t)^{y-1}\left(t + (1-t)\right) dt$$

$$= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

donc $\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*, \quad B(x+1,y) + B(x,y+1) = B(x,y)}$

b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x B(x,y+1) = x \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y}\,dt$$

on réalise une intégration par parties avec les fonctions $\mathcal{C}^1$ suivantes :

$u(t) = \frac{t^x}{x} \qquad v(t) = (1-t)^{y}$

$u'(t) = t^{x-1} \qquad v'(t) = -y(1-t)^{y-1}$

donc $x B(x,y+1) = x\underbrace{\left[\frac{t^x}{x}(1-t)^y \right]_0^1}_{=0} - x\int_0^1 \frac{t^x}{x}\times(-y)(1-t)^{y-1}\,dt$

$= y\int_0^1 t^x (1-t)^{y-1}\,dt$

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*}$, $yB(x+1,y) = x B(x,y+1)$

c) avec b),

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y} B(x,y+1) \qquad (y \neq 0)$$

$$= \frac{x}{y}\left(B(x,y) - B(x+1,y)\right) \quad (q.\ 4a)$$

donc $B(x+1,y)\left(1 + \frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} B(x,y)$

donc $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$

5) ~~Soit~~ $(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$,

$$\cancel{B(p,q) = \frac{p+q}{p} B(p+1,q)}$$

$$\cancel{B(p+q} \quad B(p+1,q) = \frac{p}{p+q} B(p,q)$$

$$= \frac{p}{p+q} \times \frac{p-1}{p-1+q} B(p-1,q)$$

$\vdots$

$$= \frac{p}{p+q} \times \frac{p-1}{p-1+q} \times \dots \times \cancel{p}.\frac{1}{q} B(1,q)$$

et $B(1,q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}\,dt = \left[-\frac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 = \frac{1}{q}$

Numéro d'inscription 507719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07/10

Numéro de table 025

Soit $q \in \mathbb{N}^*$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, soit $P(p)$: " $B(p,q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$ "

$$B(1,q) \underset{?}{=} \frac{1}{q} = \frac{(q-1)!}{q!}$$

1.3, même raisonnement

donc $P(1)$ vraie

soit $p \geq 1$, supposons $P(p)$:

$$B(p+1,q) = \frac{p}{p+q} B(p,q) = \frac{p}{p+q} \times \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

$$= \frac{p!\,(q-1)!}{(p+q)!}$$

donc $P(p+1)$ vraie

par récurrence, $\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $B(p,q) = \frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$

Partie 2 :

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

~~Soit $n \in \mathbb{N}$~~

6)a)

$\forall n \in \mathbb{N}$, soit $P(n)$: " $\Gamma(n+1) = n!$ "

$\cancel{P(0) =}\ \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$

avec $A > 0$, $\int_0^A e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^A = \underbrace{-e^{-A}}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 0} + 1$

donc $\Gamma(1) = 1 = 0!$

donc $P(0)$ vraie

soit $n \geq 0$, supposons $P(n)$.

$\cancel{P(n+1) =}\ \Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1)$

$= (n+1)n!$ (~~hyp~~ par hypothèse)

$= (n+1)!$

$P(n+1)$ vraie

donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

b) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt$

on réalise le changement de variable $u = \sqrt{2t} \Leftrightarrow t = \frac{u^2}{2}$

$t \mapsto \sqrt{2t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc réalise une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$. Les intégrales convergent ($\frac{1}{2} > 0$) donc sont égales

9

$$\cancel{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int^{+\infty}}$$

quand $t \to +\infty$, $u \to +\infty$

quand $t = 0$, $u = 0$

$dt = u\,du$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{u^2}{2}} u\,du$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{u}{|u|}}_{= u \text{ car } u \geq 0} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$= 2\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du$$

comme $t \mapsto \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ est paire, avec le changement de variable affine $u = -t$, on obtient

$$= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,du$$

$$= \sqrt{\pi}$$

car on reconnaît une densité d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

donc $\underline{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

7) a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$$

$$= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt}\,dt$$

on réalise le changement de variable affine $u = bt$

quand $t \to +\infty$, $u \to +\infty$ (car $b > 0$)

quand $t = 0$, $u = 0$

$dt = \cancel{\frac{1}{b} du}\ \frac{1}{b} du$

on obtient $\cancel{\frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{b}\right)^{a-1} e^{-u} \frac{1}{b} du}$

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{bt}{b}\right)^{a-1} e^{-u} \frac{1}{b} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = 1$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt$ converge et vaut 1

b) . $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$

. $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = 1$ (q. 7a)

donc $f_{a,b}$ est une densité de probabilité

8) a)

$$f_{a,1} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Numéro d'inscription: 507719

Né(e) le: 09/06/2005

Nom: GARREAU

Prénom (s): GAUTHIER

Signature

20 / 20

Écricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 10

Numéro de table 025

on reconnait une densité de loi gamma de paramètre a,

donc $X \hookrightarrow \gamma(a)$

on a alors $E(X) = a$ et $V(X) = a$

b)

$\cancel{f_{1,b} : t \mapsto \left\{ \frac{b}{\Gamma(a)} t \; e^{-bt} \right.}$

$$f_{1,b} : t \mapsto \begin{cases} b\, e^{-bt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

on reconnait la densité d'une loi exponentielle de paramètre b,

donc $X \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$

donc $E(X) = \frac{1}{b}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

d'après le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{b,1}(t)\,dt$ converge absolument

(ici, la convergence absolue équivaut à la convergence car les termes sont positifs).

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{b,1}(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2 b e^{-bt} dt$ $\quad u = bt$

on réalise le même changement de variable qu'en 7(a) et

on obtient $\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{b}\right)^2 b e^{-u} \frac{1}{b} du = \frac{1}{b^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du}_{= \Gamma(3) = 2 \ (4.6a)}$

$= \frac{2}{b^2}$

donc $E(X^2)$ existe et vaut

d'après la formule de Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \frac{1}{b^2}$ ~~donc donc, il faut~~ $\cancel{\frac{2}{b^2}}$

donc X admet une variance, qui vaut $\frac{1}{b^2}$

9) Soit $t \leq 0$,

X à valeurs positives donc bX à valeurs positives $(b>0)$

$P(bX \leq t) = 0$

Si $t > 0$,

$P(bX \leq t) = P(X \leq \frac{t}{b}) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{b}} f_{a,b}(u)\,du$

$F_{bX}(t) = P(bX \leq t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\frac{t}{b}} f_{a,b}(u)du \\ 0 \text{ si } t<0 \end{cases}$

F_{bX} est ~~continue sur $\mathbb{R}^*$~~ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$

$$\int_{-\infty}^{\frac{t}{b}} f_{a,b}(u)du \xrightarrow[t\to 0]{} \int_{-\infty}^{0} f_{a,b}(u)du = 0$$

donc $F_{bX}(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc F_{bX} est continue sur $\mathbb{R}$, donc ~~c'est une densité~~

bX est continue :

la fonction suivante est positive sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_{bX}(x) = f_{bX}(x)$

donc c'est une densité de bX,

$$f_{bX}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b} f_{a,b}\left(\frac{t}{b}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-(b-1)t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

donc $f_{bX}(t) = \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right)$

~~donc bX suit une loi de densité~~

b) $E(X)$ existe $\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t f_{bX}(t)}_{\geq 0} dt$ converge absolument donc la convergence suffit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{bX}(t)dt = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^a e^{-(b-1)t} dt$$

on réalise le changement de variable affine $u = (b-1)t$ comme en 8b) et 7a),

et on obtient $\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(b-1)^a} \times e^{-u} \frac{1}{(b-1)} dt$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)(b-1)^{a+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^a e^{-u} dt}_{= \Gamma(a+1)}$$

$$= \frac{a}{(b-1)^{a+1}}$$

donc $E(X)$ existe et vaut $\frac{1}{(b-1)^{a+1}}$

de même, $E(X^2)$ existe $\Leftrightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t^2 f_{bX}(t)}_{\geq 0} dt$ converge absolument

$$I = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} t^{a+1} e^{-(b-1)t} dt$$

on réalise le même changement de variable et on obtient,

$$I = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{a+1}}{(b-1)^{a+1}} e^{-u} \frac{1}{b-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)(b-1)^{a+2}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{a+1} e^{-u} du}_{= \Gamma(a+2)}$$

$$= \frac{(a+1)a}{(b-1)^{a+1}}$$

donc $E(X^2)$ existe et vaut $\frac{(a+1)a}{b^{a+1}}$

donc $V(X)$ existe

d'après la formule de Huygens,

~~V(X) existe.~~ $V(X) = \frac{(a+1)a}{(b-1)^{a+2}} - \left(\frac{a}{(b-1)^{a+1}}\right)^2$

$\cancel{= \frac{a^2}{(b-1)^{a+}}}$

Numéro d'inscription 577719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

Signature

20 / 20

Ecricome Épreuve : Math appro

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 09/10

Numéro de table 025

10) X_1 et X_2 sont indépendantes, on utilise la formule du produit de convolution,

si $x > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(x-t) f_{a_2,b}(t)\,dt = \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \int_{0}^{+\infty} (x-t)^{a_1-1} e^{-b(x-t)} t^{a_2-1} e^{-bt}\,dt$$

$$= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}$$

si $x \leq 0$, $x-t \leq 0$, donc $f_{a_1}(x-t) = 0$

donc la densité est nulle sur $\mathbb{R}^-$.

b) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$,

d'après a), $\cancel{\int_0^{+\infty} \frac{b^{x+y} B(x,y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}}$

t $\subseteq$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$\forall b>0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^{x+y} B(x,y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)} t^{x+y-1} e^{-bt}\,dt = 1 \quad (\text{car c'est une densité})$$

donc, $\forall b>0$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{B(x,y)} = b^{x+y}\int_0^{+\infty} t^{x+y-1} e^{-bt}\,dt$$

pour $b=1$, on a $\cancel{\Gamma(x+y)}$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{B(x,y)} = \Gamma(x+y)$$

donc $\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^{*2}$, $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

c) $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi$ (9b)

Partie III :

11) Soit $(x,y)\in]0,+\infty[^2$,

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1[$,

alors en notant f_X sa densité, on a $f_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Soit $X = U^{x-1}(1-U)^{y-1}$

donc $E(X)$ existe $\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t^{x-1}(1-t)^{y-1} f_X(t)}_{\geq 0} dt$ converge absolument

d'après la formule de transfert.

~~d'après~~ $\wedge$, $I = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = B(x,y)$

donc $E(U^x(1-U^{y-1}))$ existe et vaut $B(x,y)$

b)

```
def Simul(x, y):
    U = rd.random()
    Y = U**(x-1)*(1-U)**(y-1)
    return Y
```

~~b) les $(U_n)_{n\geq 1}$ ~~sont~~ sont indépendantes, et ont la ~~même~~ espérance $B(x,y)$ et variance σ^2, donc d'après la loi faible des grands nombres,~~

Les $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes donc par le lemme des coalitions,

les $(U_n^{x-1}(1-U_n)^{y-1})_{n\geq 1}$ sont indépendantes, et suivent la même loi

donc ont la même espérance $B(x,y)$ (q. 11a) et variance σ^2.

d'après la loi faible des grands nombres,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k^{x-1}(1-U_k)^{y-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} B(x,y)$$

donc $(R_n)_{n\geq 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} B(x,y)$

d)

```
def Rn(x, y, n):
    U = rd.random(n)
    X = U ** (x-1) * (1-U) * (y-1)
    return np.mean(X)
```

e) on illustre le resultat en 10c, que $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$

12) a) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

alors sa densité est $f_X(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{a-1} f_X(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\,dt = \Gamma(a)$$

donc $E(X^{a-1})$ existe et vaut $\Gamma(a)$ (idem qu'en 8)a),b)...)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2a-2} f_X(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^{2a-2} e^{-t}\,dt = \Gamma(2a-1)$$

donc $E(X^2)$ existe et vaut $\Gamma(2a-1)$ $(a>1)$

donc $V(X)$ existe

donc d'après la formule de ~~Hay~~ Huygens,

$$V(X) = \Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2$$

Numéro d'inscription 507719

Né(e) le 09/06/2005

Nom GARREAU

Prénom (s) GAUTHIER

20 / 20

Ecricome Épreuve : Maths appro

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 10 / 10

Numéro de table 025

b) $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$,

indépendante de $P(a)$,

donc M_n est un estimateur de $P(a)$

$E(X_n^{a-1}) = P(a)$ donc, ~~$E(X_n^{a-1})$~~ X_n^{a-1} est un estimateur sans biais de $P(a)$

q.Ra $\quad E(M_n) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^{a-1}) = P(a)$

linéarité de l'espérance

~~$V(X_n)$~~

$$V(M_n) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{n} V(X_n^{a-1}) = \frac{P(2a-1) - P(a)^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

par indépendance des $(X_n)_{n \geq 1}$, le lemme des coalitions donne l'indépendance des $(X_n^{a-1})_{n \geq 1}$

donc M_n est un estimateur convergent

c) Myst renvoie n simulations de la variable aléatoire

$X = -\ln(1-U)$, avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}[0,1]$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

d)

```
def Approx(n,a):
    ~~X = myst~~
    X = ~~m~~ Myst(n)
    M =                    # on utilise la méthode d'inversion de
    ;                      # la fonction de repartition ~~...~~

    return np.mean(M)
```