Exercice 1

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}.$$

1. 1.a. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Procédons par récurrence...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  $u_0 = 1 > 0$: l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
  On a :
  $$u_{n+1} = u_n e^{/u_n}$$
  Or :
  - $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence,
  - $e^{1/u_n} > 0$.

  D'où :
  $$u_{n+1} > 0$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0$.

♡ L'avis du chef ! ♡
Un exercice très classique sur l'étude d'une suite récurrente. Presque entièrement du programme de 1A. Un peu trop guidé par moments peut-être, mais il contient quelques questions un peu plus techniques qui permettent de faire la différence.

Petite remarque
L'énoncé aurait pu demander d'établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. On aurait procédé de la même façon...

1.b. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n e^{1/u_n} - u_n \\ &= u_n(e^{1/u_n} - 1) \end{aligned}$$

Or :

- d'une part, $u_n > 0$ d'après la question précédente ;
- et, puisque $u_n > 0$, on a
  $$\frac{1}{u_n} > 0$$
  et donc, par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$:
  $$e^{\frac{1}{u_n}} > 1$$

Par conséquent :

$$u_n(e^{1/u_n} - 1) > 0$$

Autrement dit :

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

♣ Méthode !
Bien-sûr qu'il est inutile de travailler sur $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Ce n'est pas plus simple !

1.c. Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.

- Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème de limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$.
  Et même :
  - si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, cette limite est finie ;
  - si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, cette limite est égale à $+\infty$.
- Montrons donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
  Dans ce cas, d'après ce qui a été dit au-dessus (ou par théorème de convergence monotone), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
  Or :

☞ Rappels...
Théorème de limite monotone : toute suite monotone admet une limite en $+\infty$.
Il se précise dans deux cas :
• Théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.
• Théorème de divergence monotone : toute suite croissante et majorée tend vers $+\infty$; toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

* $u_0 = 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$$

Et donc :

$$\ell \in [1;+\infty[$$

* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$. D'où, en passant à la limite, licite car la fonction $x \longmapsto xe^{1/x}$ est continue sur $[1;+\infty[$:

Mais :

$$\begin{aligned}
\ell = \ell e^{1/\ell} &\iff \ell - \ell e^{1/\ell} = 0 \\
&\iff \ell(1 - e^{1/\ell}) = 0 \\
&\iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ e^{1/\ell} = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{1}{\ell} = 0 \end{cases} \\
&\iff \ell = 0
\end{aligned}$$

D'où $\ell = 0$: absurde (car $\ell \geqslant 1$) !

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, donc par théorème de divergence monotone, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

★ Classique ! ★
Question très classique sur les suites récurrentes. Attention à ne pas s'embrouiller. Le raisonnement doit être bien travaillé pour ne pas perdre le fil. On retient qu'il faut démontrer par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

2. Compléter le programme Python suivant pour qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 10^6$:

```python
import numpy as np
u=1
n=0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Voici :

```python
import numpy as np
u=1
n=0
while u<10**6 :
    u=u*np.exp(1/u)
    n=n+1
print(n)
```

♡ L'avis du chef ! ♡
L'énoncé aurait pu demander une autonomie complète sur cette question...

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = xe^{1/x}.$$

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

   * En $+\infty$:
     On a :
     $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$
     Donc, par composition :
     $$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

Conclusion : par opérations, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- En 0 (par la droite) :
  On a, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

> **♣ Méthode !**
> Il y a une FI. On transforme donc cette FI pour obtenir une CC de la forme $\frac{e^X}{X}$ quand $X \to +\infty$...

Or :

✓ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$;

✓ $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissances comparées.

Ainsi, par composition :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

> **Conclusion :** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

On sait que :

✓ $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$;

✓ exp est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.Par conséquent, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

> **☞ Rappel...**
> **Justification d'un caractère [...]**
> Si :
> ✓ u est [...] sur I **à valeurs dans** J,
> ✓ g est [...] sur J ;
> Alors : $g \circ u$ est [...] sur I.
> Les fonctions u et g ne sont donc, en général, pas dérivables sur les mêmes intervalles. On ne dit donc pas de phrase toute prête du type
> ~~"composée de fonctions dérivables sur I".~~

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1/x} + x \frac{-1}{x^2} e^{1/x} \\ &= e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= e^{1/x} \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

RÉFLEXE !

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

5. Soit $x > 0$.

5.a. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.

On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{x^{-k}}{k!} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^k}{k!}$$

Or la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^k}{k!}$ est une série exponentielle ; elle est donc convergente, de somme égale à $e^{1/x}$.

> **Conclusion :** la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ est convergente et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = e^{1/x}$.

5.b. En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^{1/x} \\ &= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \qquad \text{question précédente} \\ &= x \left(1 + x^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}\right) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}\right) \end{aligned}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$

Conclusion : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$.

6. Soit $x \geqslant 1$.

6.a. Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leqslant \mathrm{e}$$

Petite remarque

Établir une égalité, c'est transformer l'information. Mais établir une inégalité, c'est perdre de l'information. C'est pour cela qu'il est parfois compliqué de le faire : on ne sait pas trop comment procéder et quelle information perdre...

- Remarquons que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} = \frac{x^0}{2!} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \qquad x > 0 \text{ donc } \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \geqslant 0$$

- Pour l'autre inégalité, puisque $x \geqslant 1$, on a déjà :

$$\frac{1}{x} \leqslant 1$$

D'où, our tout $k \in [\![2; +\infty[\![$, puisque $k-2 \geqslant 0$, par croissance de la fonction $.^{k-2}$ sur $\mathbb{R}^+$, licite car $\dfrac{1}{x} > 0$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{k-2} \leqslant 1$$

Puis :

$$\forall k \in [\![2; +\infty[\![, \quad \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{k-2}}{k!} \leqslant \frac{1}{k!}$$

Ainsi, en sommant de 2 à $+\infty$, licite car les séries en jeu sont des troncatures de séries exponentielles, donc convergentes, on a :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{k-2}}{k!} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

Mais :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$$

Important !

Il vient de là ce e. C'est ce qui justifie, *a posteriori*, le début de la démarche.

On a ainsi pour l'instant :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k+2}}{k!} \leqslant \mathrm{e}$$

Conclusion : $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leqslant \mathrm{e}$.

♡ L'avis du chef ! ♡

Sur un sujet classique et relativement simple, cette question (surtout l'inégalité de droite) permet de se démarquer.

6.b. En déduire que :

$$(\star) \quad \frac{1}{2x} \leqslant f(x) - (x+1) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x}$$

D'après la question précédente :

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leqslant \mathrm{e}$$

D'où, en divisant par x, avec $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leqslant \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x}$$

Mais, d'après la question 5.b. : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}$...

Conclusion : $\dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) - (x+1) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x}$.

7. Montrer que $f(x) = x + 1 + \underset{x \to +\infty}{o}(1)$ au voisinage de $+\infty$.

D'après la question précédente :

$$\forall x \geqslant 1, \ \frac{1}{2x} \leqslant f(x) - (x+1) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x}$$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$.

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = 0$$

Autrement dit :

$$f(x) - (x+1) = \underset{x \to +\infty}{o}(1)$$

Conclusion : $f(x) = x + 1 + \underset{x \to +\infty}{o}(1)$.

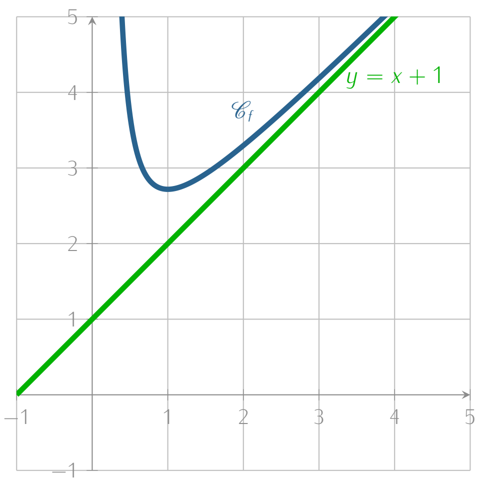
☞ Rappel...

$g = \underset{a}{o}(h) \iff \lim\limits_{a} \dfrac{g}{h} = 0$.

Par conséquent :

$$g = \underset{a}{o}(1) \iff \lim_{a} g = 0$$

8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.



Important !

On fait figurer :

- l'asymptote d'équation $x = 0$ à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0 à droite,
- la tangente horizontale à $\mathscr{C}_f$ en 1,
- le fait que $f(x) - (x+1) \geqslant \dfrac{1}{2x} \geqslant 0$,
- le fait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+1) = 0$: la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. 9.a. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \dfrac{1}{u_k}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= \ln\left(u_k \mathrm{e}^{1/u_k}\right) - \ln(u_k) \\ &= \ln(u_k) - \frac{1}{u_k} - \ln(u_k) \\ &= \frac{1}{u_k} \end{aligned}$$

$u_k > 0$ et $\mathrm{e}^{1/u_k} > 0$

✘ Attention !

La relation $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ n'est valable que si $a, b > 0$.

Si $a, b < 0$, on a $\ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|)$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N}, \ \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \dfrac{1}{u_k}$.

9.b. En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$$

D'où, en sommant de 0 à $n-1$ (licite car $n \geqslant 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \big(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

D'où, par télescopage :

$$\ln(u_n) - \ln(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

Or $u_0 = 1$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

10. 10.a. À l'aide de l'encadrement $(\star)$ montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}}{u_k}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
Appliquons $(\star)$ avec $x = u_k$, licite car $u_k \geqslant 1$ (puisque $u_0 = 1$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante) :

$$\frac{1}{2u_k} \leqslant f(u_k) - (u_k + 1) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{u_k}$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k - 1 \leqslant \frac{\mathrm{e}}{u_k}$$

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ 1 + \dfrac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \dfrac{\mathrm{e}}{u_k}$.

✓ Rigueur !
Quand on utilise un théorème, on vérifie au préalable ses hypothèses. Même chose ici : $(\star)$ n'a été démontrée que pour $x \geqslant 1$...

10.b. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, établir :

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leqslant u_n - 1 \leqslant n + \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

puis :

$$1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - n \leqslant 1 + \mathrm{e}\ln(u_n)$$

- D'après la question précédente :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ 1 + \frac{1}{2u_k} \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \frac{\mathrm{e}}{u_k}$$

  D'où, en sommant de 0 à $n-1$ (licite car $n \geqslant 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2u_k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{\mathrm{e}}{u_k}\right)$$

  Autrement dit, avec un télescopage sur la somme du milieu :

$$n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leqslant u_n - u_0 \leqslant n + \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$$

  D'où le résultat puisque $u_0 = 1$.

- La fin est immédiate puisque, d'après la question **9.b.**, $\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

✘ Attention !
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$...

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ 1 + \dfrac{1}{2}\ln(u_n) \leqslant u_n - n \leqslant 1 + \mathrm{e}\ln(u_n)$.

11. 11.a. Justifier que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

On a :

✓ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ d'après la question **1.c.** ;

✓ $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ par croissances comparées.

Conclusion : par composition, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

♡ L'avis du chef ! ♡
Là encore, l'énoncé est très détaillé. Ce résultat, utile dans la question suivante aurait pu ne pas être demandé...

11.b. En déduire un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
D'après la question précédente, puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n} \leqslant \frac{u_n - n}{u_n} \leqslant \frac{1}{u_n} + \mathrm{e}\frac{\ln(u_n)}{u_n}$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n} \leqslant 1 - \frac{n}{u_n} \leqslant \frac{1}{u_n} + \mathrm{e}\frac{\ln(u_n)}{u_n}$$

Or :

➠ Réflexe !
Il est assez fréquent d'obtenir un équivalent en revenant à la définition et à l'aide d'un encadrement ! Utilisons donc ce qui précède...

Petite remarque
Bien évidemment, il est possible de manipuler encore cet encadrement pour obtenir des membres de gauche et droite qui tendent vers 1... avec $\dfrac{n}{u_n}$ au milieu.

✓ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$;

✓ d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} + \mathrm{e}\frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$$

D'où, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{n}{u_n} = 0$$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

☞ Rappel...
La relation d'équivalence $\sim$ est symétrique... Autrement dit : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \iff w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque $n \to +\infty$.

D'après la question 9.b., on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= \ln(u_n) \\ &= \ln\left(\frac{u_n}{n} \times n\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) + \ln(n)\end{aligned}$$

$\frac{u_n}{n} > 0$ et $n > 0$

D'où, pour $n \geqslant 2$ (pour que $\ln(n) \neq 0$) :

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$, d'où par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$$

et par opérations :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}}{\ln(n)} = 1$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Petite remarque
On peut poursuivre cette égalité en disant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = 0$, donc $\ln\left(\frac{u_n}{n}\right) = \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. Ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$...

Petite remarque
Question plus délicate, qui demande davantage de recul.

Exercice 2

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

> **♡ L'avis du chef ! ♡**
> Deux parties qui n'ont aucun rapport (pourquoi faire un seul exercice ?). La partie A est très classique et très (trop ?) guidée. Peu de chance de réellement se démarquer sur cette partie...
> La partie B est intéressante, elle fait la part belle à `Python`, même si l'énoncé aurait pu ne pas guider autant certaines questions comme les questions 9. ou 10. par exemple.

Partie A : Réduction simultanée et spectre

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On pose :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $E = \mathrm{Vect}(I, J, K)$.

1. Montrer que (I, J, K) est une base de E, en déduire la dimension de E.
   - Montrons que la famille (I, J, K) est une famille libre de E.
     Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons $aI + bJ + cK = 0_3$. On a :
     $$\begin{aligned} aI + bJ + cK = 0_3 &\iff \begin{pmatrix} a+c & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$
     D'où : $a = b = c = 0$. La famille (I, J, K) est donc libre.
   - la famille (I, J, K) est ainsi :
     ✓ génératrice de E, car $E = \mathrm{Vect}(I, J, K)$;
     ✓ libre d'après ce qui précède.

   Conclusion : la famille (I, J, K) est une base de E et $\dim(E) = \mathrm{Card}(I, J, K) = 3$.

2. Justifier sans calcul que les matrices J et K sont diagonalisables.

   Conclusion : les matrices J et K sont symétriques (à coefficients réels), elles sont donc diagonalisables.

3. 3.a. Exprimer la matrice J^3 comme un multiple de J.
   On trouve
   $$J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   puis
   $$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Conclusion : $J^3 = 2J$.

   3.b. En déduire que les valeurs propres de J appartiennent à l'ensemble $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.
   D'après la question précédente, le polynôme $X^3 - 2X$ est annulateur de la matrice J. Le spectre de J est alors inclus dans l'ensemble des racines de $X^3 - 2X$.
   Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} x^3 - 2x = 0 &\iff x(x^2 - 2) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

   Conclusion : $\mathrm{Sp}(J) \subset \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$.

4. On pose :
   $$U_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   4.a. Vérifier que U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de J.
   Remarquons déjà que les vecteurs U_1 et U_2 sont non nuls... Ensuite :

- d'une part

$$\begin{aligned} JU_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}U_1 \end{aligned}$$

> **Conclusion :** $\sqrt{2}$ est valeur propre de J et U_1 en est un vecteur propre associé.

- d'autre part

$$JU_2 = 0_{3,1}$$

> **Conclusion :** 0 est valeur propre de J et U_2 en est un vecteur propre associé.

Petite remarque

L'énoncé devrait être formulé autrement : "Montrer que $-\sqrt{2}$ est valeur propre de J et en déterminer un vecteur propre U_3 associé." En effet, nous ne savons pas encore que $-\sqrt{2}$ est valeur propre de J...

4.b. Déterminer un vecteur propre U_3 de J associé à la valeur propre $-\sqrt{2}$.

On a :

$$J + \sqrt{2}I = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et remarquons que $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En notant $U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a ainsi :

- ✓ $U_3 \neq 0_{3,1}$,
- ✓ $(J + \sqrt{2}I)U_3 = 0_{3,1}$.

Pourquoi ?

Pour trouver "de tête" un vecteur propre, on raisonne ici sur les lignes 2 et 3 de la matrie $J + \sqrt{2}I$: on cherche un vecteur qui sera dans son noyau... et on vérifie avec la première ligne. C'est en général relativement faisable quand la matrice contient quelques zéros, comme c'est le cas ici. Je recommande de s'entraîner ! Bien évidemment, on peut aussi résoudre le système $JX = -\sqrt{2}X$...

> **Conclusion :** $-\sqrt{2}$ est valeur propre de J et le vecteur U_3, avec $U_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé.

5. 5.a. Justifier que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille (U_1, U_2, U_3) est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est :

- ✓ libre car constituée de vecteurs propres de J associés à des valeurs propres distinctes,
- ✓ de cardinal 3, égal à $\dim\left(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$.

> **Conclusion :** la famille (U_1, U_1, U_2) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5.b. Donner une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vers la base (U_1, U_1, U_3) convient (par formule de changement de base). Elle est bien inversible car c'est une matrice de passage.

> **Conclusion :** on prend $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. 6.a. Montrer que (U_1, U_2, U_3) est aussi une base de vecteurs propres de K.

- On sait déjà que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$...
- Ensuite, on trouve :

$$KU_1 = U_1 \quad ; \quad KU_2 = -U_2 \quad ; \quad KU_3 = U_3$$

Par conséquent :

- ✱ 1 est valeur propre de K et les vecteurs U_1 et U_3 en sont des vecteurs propres associés,
- ✱ -1 est valeur propre de K et le vecteur U_2 en est un vecteur propre associé.

> **Conclusion :** (U_1, U_2, U_3) est aussi une base de vecteurs propres de K.

6.b. Déterminer la matrice $P^{-1}KP$.

Puisque P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base (U_1, U_2, U_3), qui est une base de vecteurs propres de K, on en déduit que $P^{-1}KP$ est diagonale, contenant les valeurs propres associées aux vecteurs propres U_1, U_2, U_3 respectivement.

> **Conclusion :** $P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

> **Petite remarque**
> Tout l'enjeu ici est de ne pas effectuer le produit matriciel (qui demanderait de calculer P^{-1}. Il faut donc procéder de façon plus théorique... Ce qui a été fait en question précédente nous guide très fortement !

7. Soit M une matrice de E de coordonnées $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ dans la base (I, J, K).

7.a. Exprimer $P^{-1}MP$ sous la forme d'un tableau de nombres dépendant de a, b et c.

Puisque M a pour coordonnées (a, b, c) dans la base (I, J, K), on a :

$$M = aI + bJ + cK$$

D'où :

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P^{-1}(aI + bJ + cK)P \\ &= aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

questions **5.b.** et **6.b.**

> **Petite remarque**
> Remarquons que toute matrice $M \in E$ est symétrique (combinaison linéaire de matrices symétriques), elle est donc diagonalisable : nous venons de le démontrer dans cette question puisque M est semblable à une matrice diagonale.

7.b. En déduire les valeurs propres de M.

Notons $D = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} + c & 0 & 0 \\ 0 & a - c & 0 \\ 0 & 0 & a - b\sqrt{2} + c \end{pmatrix}$. La matrice D est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Mais, d'après la question précédente, $D = P^{-1}MP$. Donc les matrices M et D sont semblables. Or, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres...

> **Conclusion :** les valeurs propres de M sont $a + b\sqrt{2} + c$, $a - c$ et $a - b\sqrt{2} + c$.

> **Petite remarque**
> Ces valeurs peuvent ne pas être distinctes (prendre $b = 0$ par exemple...). On préfère donc cette conclusion à l'écriture $\mathrm{Sp}(M) = \{a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c\}$ qui n'est pas correcte car un ensemble ne peut contenir deux valeurs identiques.

8. On considère l'application linéaire $s : E \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$s(M) = s(aI + bJ + cK) = (a + b\sqrt{2} + c, a - c, a - b\sqrt{2} + c)$$

> **Vérification**
> L'énoncé permet de vérifier le résultat de la question précédente ! En fait, l'application s associe à une valeur $M \in E$ son spectre.

8.a. Donner la matrice S de s relativement à la base (I, J, K) de E et à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$s(I) = (1, 1, 1) \quad ; \quad s(J) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \quad ; \quad s(K) = (1, -1, 1)$$

> **Conclusion :** $S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

8.b. Montrer que l'application linéaire s est bijective.

Travaillons sur la matrice S, associée à s...

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} SX = 0_{3,1} \quad &\iff \quad \begin{cases} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ x \phantom{+ \sqrt{2}y} - z = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \quad \begin{cases} x + \sqrt{y} + z = 0 \\ - \sqrt{2}y - 2z = 0 \\ - 2\sqrt{2}y = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad X = 0_{3,1} \end{aligned}$$

Par conséquent $\ker(S) = \{0_{3,1}\}$, et la matrice S est carrée…

> **Conclusion :** la matrice S est inversible, donc l'application linéaire s est bijective.

Partie B : Un algorithme de coloration des graphes

Soit $n \geqslant 1$ un entier, on considère un graphe non orienté G donné par sa matrice d'adjacence $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{S} = \{s_0, \dots, s_{n-1}\}$ l'ensemble des sommets de G, dans les programmes informatiques on confondra un sommet s_i avec son numéro i. On dit que deux sommets sont voisins s'ils sont distincts et reliés par une arête.

Une *coloration* de G est une application $c : \mathscr{S} \to \mathbb{N}$ telle que $c(s_i) \neq c(s_j)$ si les sommets s_i et s_j sont voisins. Dans cette définition, $\mathbb{N}$ représente l'ensemble des "couleurs" disponibles, la coloration c attribue à chaque sommet une "couleur" de sorte que deux sommets voisins soient de "couleurs" différentes.

Le graphe G admet la *coloration triviale* donnée par $c(s_i) = i$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il peut cependant admettre une coloration nécessitant moins de n "couleurs". Ainsi, le graphe à cinq sommets ci-dessous admet la coloration à trois "couleurs" définie par : $c(s_0) = 0$, $c(s_1) = 1$, $c(s_2) = 0$, $c(s_3) = 1$, $c(s_4) = 2$.

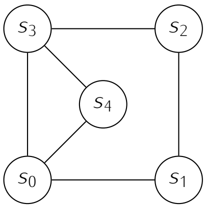


Figure 1 : un graphe d'ordre 5

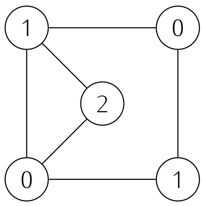


Figure 2 : le graphe colorié avec trois "couleurs" (0,1 et 2)

Les questions suivantes ont pour but de réaliser un programme Python qui renvoie une coloration d'un graphe G quelconque, en essayant de minimiser le nombre de couleurs utilisées. On commence par rédiger deux fonctions auxiliaires, "voisins" et "**min_ext**", qui serviront pour la fonction finale "**coloration**". On suppose que la matrice d'adjacence A de G est définie à l'aide de la commande "**np.array**".

9. Recopier et compléter le programme **Python** ci-dessous de manière à ce qu'il définisse une fonction "**voisins**", prenant en arguments la matrice d'adjacence A et un entier $i \in [\![0; n-1]\!]$, et renvoyant la liste des sommets voisins de s_i.

```python
def voisins(A,i):
    n=len(A[i])
    V=[]
    for j in range(n):
        if j!=i and ... :
            V.append(...)
    return V
```

Voici :

```python
def voisins(A,i):
    n=len(A[i])
    V=[]
    for j in range(n):
        if j!=i and A[i,j]!=0:
            V.append(j)
    return V
```

> ☞ **Rappel…**
> Si **A** est un tableau **numpy** :
> • **A[i]** (ou **A[i,:]**) renvoie la i-ième ligne du tableau **A** (attention : numérotation des lignes qui débute à 0…)
> • **A**[i,j] renvoie le coefficient (i, j) du tableau **A** (même remarque)

10. Rédiger en **Python** une fonction "**min_ext**" qui prend en argument une liste d'entiers naturels L, et qui renvoie le plus petit entier naturel n'appartenant pas à L (par exemple, si $L = [1, 0, 3]$, alors la commande "**min_ext(L)**" renvoie 2). On pourra transcrire en langage **Python** l'algorithme suivant :

> On affecte à une variable m la valeur 0.
> Tant que m appartient à la liste L :
> |On augmente de 1 la valeur de m.
> On renvoie m.

Voici :

```python
def min_ext(L):
    m=0
    while m in L:
        m=m+1
    return m
```

11. À l'aide des fonctions introduites précédemment on rédige maintenant une fonction «coloration» prenant en argument la matrice d'adjacence $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un graphe G, et renvoyant une coloration de G sous la forme d'une liste d'entiers $C = [C_0, \dots, C_{n-1}]$, où C_i désigne la "couleur" du sommet s_i pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

On construit cette fonction selon l'algorithme glouton ci-dessous :

> On affecte à la variable n le nombre de sommets de G.
> On affecte à la variable C la liste $[0, 1, \dots, n-1]$.
> Pour i allant de 1 à $n-1$:
> |On affecte à la variable **`C_voisins`** la liste des "couleurs" des sommets voisins de s_i.
> |On affecte à C_i le plus petit entier naturel qui n'est pas élément de la liste **`C_voisins`**.
> On renvoie la liste C.

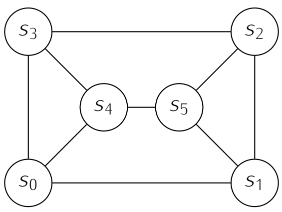
Recopier et compléter la fonction "**`coloration`**" ci-dessous.

```python
def coloration(A):
    n=len(A[0])
    C=...
    for i in range(1,n):
        C_voisins =[... for j in ...]
        C[i]=min_ext (...)
    return C
```

Voici :

```python
def coloration(A):
    n=len(A[0])
    C=[k for k in range(0,n)]
    for i in range(1,n):
        C_voisins=[C[j] for j in voisins(A,i)]
        C[i]=min_ext(C_voisins)
    return C
```

12. On note A la matrice d'adjacence du graphe G représenté figure 3 ci-dessous.



12.a. Donner la liste obtenue en exécutant la commande "**`coloration(A)`**".

Expliquons étape par étape...

- Initialement, $C = [0, 1, 2, 3, 4, 5]$: chaque sommet est colorié par une couleur différente.
- Pour $i = 1$:
  - les voisins du sommet s_1 sont les sommets s_0, s_2 et s_5 dont les couleurs sont 0,2,5 respectivement ;
  - on choisit donc comme couleur pour s_1 le plus petit entier naturel qui n'est pas dans la liste $[0, 2, 5]$ des couleurs des voisins de s_1 : on choisit donc 1.

  Ainsi $C[1] = 1$.
- Pour $i = 2$:
  - les voisins du sommet s_2 sont les sommets s_1, s_3 et s_5 dont les couleurs sont 1,3,5 respectivement ;
  - on choisit donc comme couleur pour s_2 le plus petit entier naturel qui n'est pas dans la liste $[1, 3, 5]$ des couleurs des voisins de s_2 : on choisit donc 0.

  Ainsi $C[2] = 0$.
- Pour $i = 3$:
  - les voisins du sommet s_3 sont les sommets s_0, s_2 et s_4 dont les couleurs sont 0,0,4 respectivement ;
  - on choisit donc comme couleur pour s_3 le plus petit entier naturel qui n'est pas dans la liste $[0, 0, 4]$ des couleurs des voisins de s_3 : on choisit donc 0.

  Ainsi $C[3] = 1$.
- Pour $i = 4$:
  - les voisins du sommet s_4 sont les sommets s_0, s_3 et s_5 dont les couleurs sont 0,1,5 respectivement ;
  - on choisit donc comme couleur pour s_4 le plus petit entier naturel qui n'est pas dans la liste $[0, 1, 5]$ des couleurs des voisins de s_4 : on choisit donc 1.

  Ainsi $C[4] = 2$.

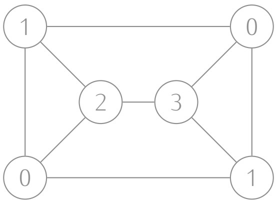
- Pour $i = 5$:
  - ✱ les voisins du sommet s_5 sont les sommets s_1, s_2 et s_4 dont les couleurs sont 1,0,2 respectivement ;
  - ✱ on choisit donc comme couleur pour s_5 le plus petit entier naturel qui n'est pas dans la liste $[1, 0, 2]$ des couleurs des voisins de s_5 : on choisit donc 3.

  Ainsi $C[5] = 3$.

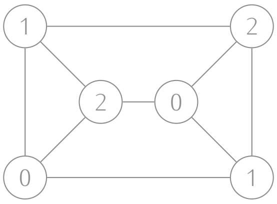
Conclusion : après l'exécution de `coloration(A)`, la liste obtenue est la liste $[0, 1, 0, 1, 2, 3]$.

12.b. Le graphe G admet-il une coloration à trois couleurs ? Si oui, exhiber une telle coloration.

La question précédente a permis d'exhiber une coloration à 4 couleurs :



On voit cependant qu'elle peut être réduite à l'utilisation de 3 couleurs seulement... en voici une :



☞ **Pour info...**
On pourra chercher quelques informations sur le théorème des 4 couleurs...

Exercice 3

> ♡ L'avis du chef ! ♡
> Un exercice très classique avec des VA à densités, des VA discrètes, du max, de la convergence en loi, de SQL : très complet ! Il ne manque qu'un peu de **Python** qui aurait été bienvenu en début de partie A et en partie D par exemple !

Les parties B, C et D de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.
Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie A : La variable aléatoire V

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$, on note V la variable aléatoire définie par

$$V = \frac{1}{\sqrt{U}}$$

1. **1.a.** Justifier que V est à valeurs dans $[1, +\infty[$.

Démontrons :

$$\forall \omega \in \Omega, \;\; V(\omega) \in [1; +\infty[$$

Soit $\omega \in \Omega$. Puisque U suit la loi uniforme sur $]0;1]$, on a

$$0 < U(\Omega) \leqslant 1$$

Ainsi, par stricte croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$0 < \sqrt{U(\omega)} \leqslant 1$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{1}{\sqrt{U(\omega)}} \geqslant 1$$

Autrement dit :

$$V(\omega) \geqslant 1$$

Conclusion : V est à valeurs dans $[1; +\infty[$.

On a même mieux...

On peut en fait démontrer que $V(\Omega) = [1; +\infty[$.
En notant $f = \frac{1}{\cdot}$ et $g = \sqrt{\cdot}$, on a :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= f \circ g\big(U(\Omega)\big) \\ &= f \circ g\big(]0;1]\big) \\ &= f\big(g(]0;1])\big) \\ &= f(]0;1]) && \text{par continuité et stricte croissance de } g \text{ sur } \mathbb{R}^+ : g(]0;1]) =]0;1] \\ &= [1; +\infty[&& \text{par continuité et stricte décroissance de } f \text{ sur }]0;1] \end{aligned}$$

> ★Subtil...★
> • La continuité peret d'affirmer que, si I est un intervalle, alors $f(I)$ également (TVI).
> • La monotonie permet de connaître les bornes : si f est continue et croissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$; si elle est continue et décroissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$...

1.b. Montrer que la fonction de répartition de V est donnée par :

$$F_V(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) && V(\Omega) \subset [1; +\infty[\text{ et } x < 1, \text{ donc } [V \leqslant x] = \varnothing \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Si $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}\big([V \leqslant x]\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{U}} \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{U} \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) && \text{stricte décroissance de } \tfrac{1}{\cdot} \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[U \geqslant \frac{1}{x^2}\right]\right) && \text{stricte croissance de la fonction } \cdot^2 \text{ sur } \mathbb{R}+ \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{x^2}\right]\right) \\ & && U \text{ est à densité} \end{aligned}$$

$$= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{x^2}$$

$U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $x \geqslant 1$, donc $\frac{1}{x^2} \in]0;1]$

> **✘ Attention !**
> Au moment de remplacer $F_U(z)$, il faut se poser la question de l'ensemble auquel appartient z.
> En effet, puisque $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$, on a, pour tout $z \in \mathbb{R}$:
> $$F_U(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ z & \text{si } z \in]0;1] \\ 1 & \text{si } z \geqslant 1 \end{cases}$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_V(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

1.c. En déduire que V est une variable aléatoire à densité, et donner une densité f_V de V.

✓ **Continuité.**

- ✱ Sur $]-\infty;1[$: F_V est continue sur $]\infty;1[$ car constante sur cet intervalle.
- ✱ Sur $]1;+\infty[$: F_V est continue sur $]1;+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles continues sur cet intervalle.
- ✱ En 1 :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F_V(x) = 0 = F_V(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} F_V(x)$$

Donc F_V est continue en 1.

Conclusion : F_V est continue sur $\mathbb{R}$.

> **Petite remarque**
> En fait, on pourrait dire que F_V est continue sur $[1;+\infty[$ par les mêmes arguments, et donc seulement vérifier ensuite que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F_V(x) = F_V(1)$. C'est juste une habitude de travailler sur les intervalles ouverts pour ce qui est fait ensuite sur le caractère $\mathscr{C}^1$ puis le calcul de f_V.

✓ **Caractère $\mathscr{C}^1$.**
Par des arguments similaires à la continuité, la fonction F_V est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1.

Par conséquent, la variable aléatoire V est à densité et admet pour densité la fonction f_V définie sur $\mathbb{R}$ par :

- pour tout $x < 1$:
$$f_V(x) = 0$$
- pour tout $x > 1$:
$$f_V(x) = \frac{2}{x^3}$$
- et (par exemple)
$$f_V(1) = 2$$

> **Important !**
> On dérive sur les intervalles ouverts ; et on pose des valeurs "arbitraires positives" en les réels en lesquels F_V n'est pas nécessairement $\mathscr{C}^1$.
> Ici, deux valeurs de $f_V(1)$ sont naturelles : 0 (pour recoller avec le cas $x < 1$) et 2 (pour recoller avec le cas $x > 1$).

Conclusion : la variable aléatoire V est à densité et admet pour densité la fonction

$$f_V : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2. Déterminer si V admet une espérance et une variance, calculer leurs valeurs éventuelles.

- **Espérance.**
  - ✱ On sait que :

V admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x f_V(x)|\,dx$ est convergente
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x f_V(x)\,dx$ est convergente, car $x \longmapsto x f_V(x)$ est nulle sur $]-\infty;1[$ et positive sur $[1;+\infty[$
si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$ est convergente

  - ✱ Or $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est convergente car d'exposant 2 (et $2 > 1$). C'est donc également le cas de l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx$.
  - ✱ On en déduit que V admet une espérance et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x)\,dx \\ &= 2\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= 2\left[\frac{-1}{x}\right]_1^{x\to+\infty} \\ &= 2 \end{aligned}$$

> **✍ Rédaction**
> On tolère cette rédaction uniquement parce-que la convergence de l'intégrale est déjà connue !

Conclusion : V admet une espérance et $\mathbb{E}(V) = 2$.

- Variance.
  - Par théorème de transfert, licite car la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$:

    V admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2 f_V(x)| dx$ est convergente

    si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x f_V(x) dx$ est convergente, car $x \longmapsto x^2 f_V(x)$ est nulle sur $]-\infty; 1[$ et positive sur $[1; +\infty[$

    si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x} dx$ est convergente
  - Or $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ qui est divergente.
  - On en déduit que V n'admet pas de moment d'ordre 2, donc pas variance.

Conclusion : la variable aléatoire V n'admet pas de variance.

> ☞ **Pour info...**
> Pour traiter des cas généraux de variables aléatoires suivant une loi de Pareto, on pourra aller regarder les exercices `Ecricome 2025 Appli - Exercice 3` ou, encore mieux, `EML 2020 E - Exercice 3`.

La variable aléatoire V suit une *loi de Pareto*, les compagnies d'assurance utilisent cette loi pour modéliser les montants des sinistres. Afin d'établir des prévisions, un actuaire étudie une suite $(V_i)_{i \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi que V, la variable aléatoire V_i représente le coût du i-ième sinistre survenu à partir d'un instant donné.

Partie B : Loi du sinistre le plus coûteux

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire M_n en posant :

$$M_n = \max(V_1, \ldots, V_n)$$

On note F_n la fonction de répartition de M_n.

3. **3.a.** Montrer que $F_n = (F_V)^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

   Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \mathbb{P}\left([M_n \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left([\max(V_1, \ldots, V_n) \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [V_i \leqslant x]\right) \\
&\quad \text{indépendance de } V_1, \ldots, V_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([V_i \leqslant x]\right) \\
&\quad V_1, \ldots, V_n \text{ ont toutes la même loi que } V \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left([V \leqslant x]\right) \\
&= \left(F_V(x)\right)^n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ F_n(x) = \left(F_V(x)\right)^n$.

3.b. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente et la question **1.b.** :

$$F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- Si $x < 1$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = 0$. D'où :
  $$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$$
- Si $x \geqslant 1$:
  On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^n$.
  Or, $1 - \dfrac{1}{x^2} \in]-1; 1[$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n = 0$. D'où :
  $$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0$$

> ☞ **Rappel...**
> Si $q \in]-1; 1[$, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.
> ATTENTION : q ne doit pas dépendre de n, sinon le résultat est en général faux !

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = 0.$

3.c. Justifier que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire.

D'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$$

où $F : x \longmapsto 0$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) \neq 1$, donc la fonction F n'est pas une fonction de répartition.

Conclusion : la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire.

On considère une variable aléatoire W dont la fonction de répartition F_W est définie par $F_W(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$.

4. 4.a. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-1/x^2}$ pour tout $x > 0$.

Pourquoi ?
On se place "pour n suffisamment proche de $+\infty$ car l'objectif est de passer à la limite... et que c'est nécessaire juste en-dessous !

Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, suffisamment proche de $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}([G_n \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right]\right) && \sqrt{n} > 0 \\ &= \mathbb{P}([M_n \leqslant \sqrt{n}x]) \\ &= F_n(\sqrt{n}x) \\ &= \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n && \text{pour } n \text{ suffisamment proche de } +\infty \ (n \geqslant \tfrac{1}{x^2}, \text{ licite car } x > 0), \text{ on a } \sqrt{n}x \geqslant 1 \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right) && n \text{ suffisamment proche de } +\infty, \text{ donc } 1 - \tfrac{1}{nx^2} > 0 \end{aligned}$$

Or :

- ✓ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{nx^2} \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{nx^2} = 0$;
- ✓ $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

D'où :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2}$$

Ainsi :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{x^2}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) = \frac{-1}{x^2}$$

Et par composition de limites :

Petite remarque
Ou continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, donc en $\dfrac{-1}{x^2}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Conclusion : $\forall x > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = e^{-1/x^2}$.

4.b. Conclure quant à la convergence en loi de la suite $\left(\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x > 0$:
  On a déjà, d'après la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = F_W(x)$.
- Si $x \leqslant 0$:
  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right]\right) && M_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } x < 0, \text{ donc } \left[\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leqslant x\right] = \varnothing \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0 = F_W(x)$.

On a finalement établi : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = F_W(x)$.

Conclusion : la suite $\left(\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers W.

Partie C : Manipulation d'une base de données

La compagnie d'assurance tient à jour une table "**sinistres**" contenant des informations sur tous les sinistres qu'elle a indemnisés entre les années 2000 et 2024. Les attributs (colonnes) de cette table sont :

- **id** (de type INTEGER) : numéro d'identification du sinistre,
- **annee** (de type INTEGER) : année durant laquelle est survenu le sinistre,
- **mois** (de type TEXT) : mois durant lequel est survenu le sinistre (on écrit le mois en minuscules),
- **montant** (de type INTEGER) : montant de l'indemnisation versée à l'assuré (en euros).

5. Rédiger une requête SQL permettant d'afficher :

5.a. La liste des montants d'indemnisation des sinistres de l'année 2024.

```
SELECT montant FROM sinistres WHERE annee = 2024;
```

5.b. Le mois et l'année de tous les sinistres dont le montant dépasse un million.

```
SELECT mois, annee FROM sinistres WHERE montant > 1000000;
```

6. Le sinistre numéro 7652 a eu lieu en avril 2025 et a été indemnisé à hauteur de 1540 euros. Rédiger une requête SQL ajoutant à la table "**sinistre**" une ligne correspondant à ce sinistre.

```
INSERT INTO sinistres VALUES (7652, 2025, 'avril', 1540);
```

Partie D : Nombre de sinistres graves

On rappelle que $(V_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi que V (voir partie A). On suppose que le nombre de sinistres se produisant au cours d'une année est donné par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On s'intéresse au nombre de sinistres dont le coût dépasse un certain montant $A > 1$. On note ainsi T la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $\{V_1, \ldots, V_N\}$ prenant une valeur supérieure à A, formellement :

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \left|\ \{i \in [\![1, N(\omega)]\!]\ ;\ V_i(\omega) > A\}\ \right|$$

où la notation $|.|$ désigne le cardinal.

7. Exprimer $\mathbb{P}\big([N = n]\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([N = n]\big) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$.

8. Quel est l'ensemble $T(\Omega)$ des valeurs prises par T ?

Conclusion : $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

9.a. Justifier que la loi conditionnelle de T sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{A^2}\right)$.

Supposons l'évènement $[N = n]$ réalisé. Autrement dit, le nombre de sinistres sur l'année est égal à n. **Sous cette hypothèse :**

✓ l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes dont le succès "le coût du sinistre dépasse A euros" est de probabilité $\mathbb{P}\big([V > A]\big)$ (car les V_i ont toutes la loi de V) ; avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([V > A]\big) &= 1 - \mathbb{P}\big([V \leqslant A]\big) \\ &= \frac{1}{A^2} \quad \text{question 1.b., avec } A > 1\end{aligned}$$

✓ la variable aléatoire T compte alors le nombre de succès sur les n répétitions.

Conclusion : la loi conditionnelle de T sachant $[N = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{A^2}\right)$.

✘ Attention !
Il est important de bien rédiger cette question. La variable aléatoire T ne suit pas une loi binomiale... C'est seulement la loi conditionnelle qui est une loi binomiale. On doit donc voir la supposition que $[N = n]$ est réalisé, et un vocabulaire du type "sous cette hypothèse".

9.b. Donner la valeur de $\mathbb{P}_{[N=n]}\big([T = k]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, vous distinguerez les cas $k \leqslant n$ et $k > n$.

Conclusion : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{[N=n]}\big([T=k]\big) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$

10. Calculer $\mathbb{P}\big([T=k]\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis reconnaître la loi de T.

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, avec $\big([N=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ comme système complet d'évènements, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\big([N=n]\cap[T=k]\big)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T=k]\big) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\cap[T=k]\big) && \text{ } \forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([N=n]\big)\neq 0 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\mathbb{P}_{[N=n]}\big([T=k]\big) && \text{question précédente : } \forall n<k,\ \mathbb{P}_{[N=n]}\big([T=k]\big)=0 \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\mathbb{P}_{[N=n]}\big([T=k]\big) && \text{questions 7. et précédente} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{A^2}\right)^k\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{A^2}\right)^k e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^{n-k} && j=n-k \\
&= \frac{\left(\frac{1}{A^2}\right)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{j+k}}{j!}\left(1-\frac{1}{A^2}\right)^j \\
&= \frac{\left(\frac{1}{A^2}\right)^k}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda\left(1-\frac{1}{A^2}\right)\right)^j}{j!} && \text{série exponentielle} \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda\left(1-\frac{1}{A^2}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{A^2}\right)^k}{k!}e^{-\frac{\lambda}{A^2}}
\end{aligned}$$

Conclusion : T suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{A^2}$.

★ Classique ! ★
Ce conditionnement binomiale / Poisson est très classique et nous rappelle `Ecricome 2003 E - Exercice 3`.

11. En moyenne, combien de sinistres avec un coût supérieur à A surviennent en un an ?

On sait que $\mathbb{E}(T) = \dfrac{\lambda}{a^2}$.

Conclusion : en moyenne, il y a autour de $\dfrac{\lambda}{A^2}$ sinistres avec un coût supérieur à A euros en un an.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★