Dans cet énoncé r est un entier naturel, $r \geqslant 2$ et $[\![1;r]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant r$.
On s'intéresse dans ce problème aux chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini $[\![1;r]\!]$ **réversibles**.
Ce type de chaîne intervient dans les marches aléatoires sur les sommets d'un graphe non orienté, les processus de naissance et mort, la méthode de Métropolis par exemple.
Le problème comporte trois parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes. Seules les questions 1 et 2 de la partie 1 sont utiles pour la partie 2.

Un aide-mémoire Python se trouve à la fin de l'énoncé.
Pour les scripts et fonctions Python, on supposera que les instructions suivantes ont été exécutées :

```
import numpy as np, numpy.random as rd
```

On considère, dans la suite du problème, une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, vérifiant les propriétés suivantes :

(H1) Pour tout $n \geqslant 0$, $X_n(\Omega) = [\![1;r]\!]$.

(H2) Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) \neq 0$. On note S_i l'ensemble des entiers positifs n tels que $\mathbb{P}\big([X_n = i]\big) \neq 0$.

(H3) Pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, la fonction $n \longmapsto \mathbb{P}_{[X_n=i]}\big([X_{n+1} = j]\big)$ est constante sur son ensemble de définition S_i et on note $p_{i,j}$ cette constante.

La matrice $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ s'appelle la matrice de transition de la chaîne.

On rappelle que l'on a pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} p_{i,j} = 1$.

On note $\mathcal{ST}_r$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ à coefficients positifs telles que pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} m_{i,j} = 1$.

Donc $P \in \mathcal{ST}_r$.

> ♡ **L'avis du chef !** ♡
> Un problème intéressant, mais contenant bon nombre de questions assez difficiles... D'autres choix auraient pu être faits (ordre des questions, résultats faciles à faire démontrer au début) pour le rendre plus progressif sans dénaturer l'esprit souhaité. La partie 2 est plus classique et mérite d'être bien travaillée.

Partie 1 - Matrice stochastique réversible, exemples et caractérisation de Kolmogorov

On considère $\mu = \begin{pmatrix}\mu_1 & \dots & \mu_r\end{pmatrix}$ une matrice ligne appartenant à $\mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont strictement positifs et tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \mu_k = 1$.

On dit que la matrice $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ est μ-réversible si M appartient à $\mathcal{ST}_r$ et vérifie :

$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2,\ \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$$

Dans cette partie $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ appartient à $\mathcal{ST}_r$.

1. **1.a.** Montrer que si M est μ-réversible et si $m_{i,j} \neq 0$ pour un couple $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$ alors $m_{j,i} \neq 0$.

Supposons que M est μ-réversible et qu'il existe $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, que l'on considère ensuite, tel que $m_{i,j} \neq 0$.
Puisque M est μ-réversible, on a :

$$\mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}$$

D'où, puisque les coefficients de μ sont non nuls :

$$m_{j,i} = \frac{\mu_i}{\mu_j} m_{i,j}$$

Enfin, on sait que :

$$\mu_i \neq 0 \quad ; \quad m_{i,j} \neq 0$$

D'où :

$$m_{i,j} \neq 0$$

> **Conclusion :** si M est μ-réversible et si $m_{i,j} \neq 0$ pour un couple $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$ alors $m_{j,i} \neq 0$.

1.b. On suppose dans cette question que M est symétrique. Déterminer μ telle que M est μ-réversible.

Donnons un μ convenant à toute matrice symétrique de $\mathcal{ST}_r$...
Posons $\mu = \begin{pmatrix}\frac{1}{r} & \dots & \frac{1}{r}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$. Montrons que M est μ-réversible. On a :

- ✓ $M \in \mathcal{ST}_r$;
- ✓ les coefficients de μ sont strictement positifs ;

✓ la somme des coefficients de μ vaut 1 ;

✓ pour tout $(i, j) \in [\![1; r]\!]^2$:

$$\begin{aligned}\mu_i m_{i,j} &= \frac{1}{r} m_{i,j} \\ &= \frac{1}{r} m_{j,i} \\ &= \mu_j m_{j,i}\end{aligned}$$

M est symétrique, donc $m_{i,j} = m_{j,i}$

Conclusion : pour $\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \dots & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$, la matrice M est μ-réversible.

Petite remarque

Réciproquement, si M est μ-réversible pour $\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \dots & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$, alors M est symétrique. En effet :

$$\forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2,\ \frac{1}{r} m_{i,j} = \frac{1}{r} m_{j,i}$$

et donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2,\ m_{i,j} = m_{j,i}$$

Mauvaise formulation...

La formulation de l'énoncé est confuse. On pourrait, légitimement, penser qu'il est demandé de déterminer toutes les matrices μ de $\mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$ telles que M soit μ-réversible.
Mais ce ne peut être la bonne question. Pour le comprendre, plaçons nous dans le cas $r = 2$.

- La matrice I_2 appartient à $\mathcal{ST}_2$ et est symétrique.
Toutes les matrices $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}$ à coefficients positifs telles que $\mu_1 + \mu_2 = 1$ conviennent...
- Pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ il faut en revanche que $\mu_1 = \mu_2$ et donc la seule matrice convenant est la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

♡ L'avis du chef ! ♡

L'énoncé aurait pu éviter la confusion et rendre la question plus abordable (en début de sujet ce n'est pas du luxe) en demandant "Démontrer que si M est symétrique et $\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \dots & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$, alors M est μ-réversible." (et même demander de démontrer l'équivalence, d'après la remarque précédente).

1.c. On note Δ la matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux sont $\mu_1, \dots, \mu_r$. Montrer que M est μ-réversible si et seulement si $\Delta M = {}^t M \Delta$.

On a :

$$\begin{aligned}\Delta M = {}^t M \Delta &\iff \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{r,1} & \dots & m_{r,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{r,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1,r} & \dots & m_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_r \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \mu_1 m_{1,1} & \dots & \mu_1 m_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_r m_{r,1} & \dots & \mu_r m_{r,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 m_{1,1} & \dots & \mu_r m_{r,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1 m_{1,r} & \dots & \mu_r m_{r,r} \end{pmatrix} \\ &\iff \forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2,\ \mu_i m_{i,j} = \mu_j m_{j,i}\end{aligned}$$

Conclusion : M est μ-réversible si et seulement si $\Delta M = {}^t M \Delta$.

2. Montrer que si M est μ-réversible alors $\mu M = \mu$.

Supposons que M est μ-réversible. On a :

$$\begin{aligned}\mu M &= \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{r,1} & \dots & m_{r,r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{r} \mu_k m_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^{r} \mu_k m_{k,r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{r} \mu_1 m_{1,k} & \dots & \sum_{k=1}^{r} \mu_r m_{r,k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 \sum_{k=1}^{r} m_{1,k} & \dots & \mu_r \sum_{k=1}^{r} m_{r,k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_r \end{pmatrix} \\ &= \mu\end{aligned}$$

M est μ-réversible, donc pour tout $j \in [\![1; r]\!]$:
$\forall k \in [\![1; r]\!],\ \mu_k m_{k,j} = \mu_k m_{j,k}$

$M \in \mathcal{ST}_r$, donc pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $\sum_{k=1}^{r} m_{i,k} = 1$

Conclusion : si M est μ-réversible alors $\mu M = \mu$.

Autrement dit :

Si M est μ-réversible, alors ${}^t\mu$ est $\overrightarrow{\text{VP}}$ de M pour la VP 1...

Autre méthode...

Supposons que M est μ-réversible. Remarquons que : $\mu M = \mu \iff {}^t M {}^t \mu = {}^t \mu$. D'après la question 1.c. :

$$\Delta M = {}^t M \Delta$$

Posons $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient :

$$\Delta M U = {}^t M \Delta U$$

Mais :

- d'une part :
$$\Delta U = {}^t\mu$$
- et, puisque la somme des coefficients de chaque ligne de M vaut 1, on a :
$$MU = U$$

On obtient ainsi :

$$\Delta U = {}^t M {}^t\mu$$

Autrement dit :

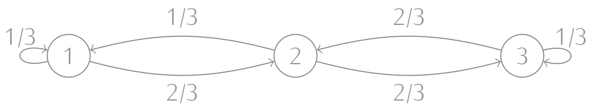
$${}^t\mu = {}^t M {}^t\mu$$

Conclusion : si M est μ-réversible alors $\mu M = \mu$.

3. *Un premier exemple* - On suppose que $r = 3$ et que $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

3.a. Représenter le graphe probabiliste associé à cette matrice de transition.

Voici :



3.b. Déterminer μ telle que P soit μ-réversible.

Utilisons la caractérisation de la question 1.c.. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ et $\mu = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
\big(P \text{ est } \mu\text{-réversible}\big) &\iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ a+b+c = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & 2a & 0 \\ b & 0 & 2b \\ 0 & 2c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2a & 0 & 2c \\ 0 & 2b & c \end{pmatrix} \\ a+b+c = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2a = b \\ b = c \\ a+b+c = 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{5} \\ b = \dfrac{2}{5} \\ c = \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \\
&\iff \mu = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : P est μ-réversible si, et seulement si, $\mu = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Petites remarques

- On pourrait utiliser la question 2. et résoudre ${}^t PX = X$. Mais la question 2. ne fournit qu'une condition nécessaire... il faudrait donc ensuite vérifier que le vecteur μ trouvé convient. Autant donc travailler ici directement sur la CNS de la question 1.c..
- Le vecteur μ trouvé est en fait le seul état stable de la chaîne de Markov associée à P...

4. *Un deuxième exemple* - Soit G un graphe à r sommets $1, \dots, r$, non orienté, connexe, simple (deux sommets ne peuvent être reliés que par une seule arête). On considère l'expérience aléatoire qui consiste à se déplacer d'un sommet à l'autre de la manière suivante :

- on choisit un sommet au hasard ce qui définit la valeur de X_0 ;
- si on se trouve au sommet k après n déplacements, on a alors $X_n = k$, on se déplace vers un sommet adjacent au sommet k, ce qui définit X_{n+1}. Tous les sommets en question peuvent être choisis de manière équiprobable.

On admet que l'on définit ainsi une chaîne de Markov et on note encore $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ sa matrice de transition.

4.a. Écrire une fonction **Python** `Trajectoire(L,n)` qui étant donnée la liste des listes d'adjacence L du graphe G et un entier n, simule n déplacements sur le graphe et renvoie la liste des sommets visités.

On notera que les sommets reliés au sommet 1 par une arête se trouvent dans la liste `L[1-1]`.

Voici :

```python
def Trajectoire(L,n):
    X=rd.randint(1,r+1) #choix du premier sommet
    S=[X] #liste des sommets visités
    for i in range(1,n+1):
        j=rd.randint(len(L[X-1])) #choix d'un rang d'un élément de L[X-1]
        X=L[X-1][k] #cet élément de rang k est le nouveau sommet visité
        S.append(X)
    return S
```

- On note $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ la matrice d'adjacence de G et d_i le degré du sommet i.

4.b. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $p_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{d_i}$.

Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. On a :

$$
\begin{aligned}
p_{i,j} &= \mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_1=j]) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{d_i} & \text{si } j \text{ est adjacent à } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} && \text{équiprobabilité du choix du projet sommet ; le sommet } i \text{ étant relié à } d_i \text{ autres sommets} \\
&= \begin{cases} \dfrac{a_{i,j}}{d_i} & \text{si } j \text{ est adjacent à } i \\ \dfrac{a_{i,j}}{d_i} & \text{sinon} \end{cases} && a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ est adjacent à } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \frac{a_{i,j}}{d_i}
\end{aligned}
$$

> **Conclusion :** pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $p_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{d_i}$.

4.c. En déduire μ pour laquelle P est μ-réversible.

D'après la question précédente, pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$:

$$
\begin{aligned}
d_i p_{i,j} &= a_{i,j} \\
&= a_{j,i} && A \text{ est symétrique car } G \text{ est non orienté} \\
&= d_j p_{j,i} && \text{question précédente}
\end{aligned}
$$

Et ainsi, en notant $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} d_k$, on a $s > 0$ (car le graphe est connexe, donc possède au moins une arête) :

$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2,\ \frac{d_i}{s} p_{i,j} = \frac{d_j}{s} p_{j,i}$$

Posons donc $\mu = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{s} & \dots & \frac{d_r}{s} \end{pmatrix}$.

- ✓ $P \in \mathcal{ST}_r$;
- ✓ puisque le graphe est connexe, aucun sommet de G n'est isolé, donc pour tout $i \in [\![2;r]\!]$, $d_i > 0$ et ainsi $\dfrac{d_i}{s} > 0$;
- ✓ ensuite, par définition de s :
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{s} = 1$$
- ✓ et d'après ce qui a été fait au début de cette question :
$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2,\ \frac{d_i}{s} p_{i,j} = \frac{d_j}{s} p_{j,i}$$

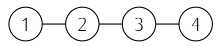
> **Conclusion :** pour $\mu = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{s} & \dots & \frac{d_r}{s} \end{pmatrix}$, avec $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} d_i$, la matrice P est μ-réversible.

Petite remarque

Là encore, l'énoncé est confus et laisse penser qu'on demande toutes les matrices μ qui conviennent... On demande en fait de trouver une matrice μ qui convient.

✘ Attention !

La matrice A est symétrique, car matrice d'adjacence d'un graphe non orienté. En revanche, la matrice P ne l'est pas nécessairement ! On peut s'en convaincre en prenant le graphe G suivant :



On aurait $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et la chaîne de Markov associée telle que décrite aurait pour matrice de transition $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m_{i,j}^{(n)}$ les coefficients de la matrice M^n.
S'il existe $\sigma \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $m_{i,j}^{(\sigma)} > 0$, on dit que M est une matrice **ergodique**.
On définit aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i_0, \dots, i_n) \in [\![1;r]\!]^{n+1}$:

$$\theta_M(i_0, \dots, i_n) = m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} = \prod_{k=1}^{n} m_{i_{k-1},i_k}$$

En particulier, pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $\theta_M(i,j) = m_{i,j}$.

♡ L'avis du chef ! ♡

Tiens, σ pour désigner un entier, ça change...

☞ Pour info...

La matrice de transition d'une chaîne de Markov est ergodique, si, et seulement si, le graphe associé à cette chaîne de Markov est fortement connexe...

5. Montrer que pour tous $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $i_0, \ldots, i_n$ et $j_0, \ldots, j_s$ éléments de $[\![1;r]\!]$ tels que $i_n = j_0$,

$$\theta_M(i_0, \ldots, i_n)\theta_M(j_0, \ldots, j_s) = \theta_M(i_0, \ldots, i_n, j_1, .., j_s)$$

Soient $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ainsi que $i_0, \ldots, i_n$ et $j_0, \ldots, j_s$ éléments de $[\![1;r]\!]$ tels que $i_n = j_0$. On a :

$$\begin{aligned}\theta_M(i_0, \ldots, i_n)\theta_M(j_0, \ldots, j_s) &= \left(m_{i_0,i_1} \times \ldots \times m_{i_{n-1},i_n}\right) \times \left(m_{j_0,j_1} \times \ldots \times m_{j_{s-1},j_s}\right) \\ &= m_{i_0,i_1} \times \ldots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_0,j_1} \times \ldots \times m_{j_{s-1},j_s} && i_n = j_0 \\ &= \theta_M(i_0, \ldots, i_n, j_1, .., j_s)\end{aligned}$$

> **Conclusion :** pour tous $(n,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $i_0, \ldots, i_n$ et $j_0, \ldots, j_s$ éléments de $[\![1;r]\!]$ tels que $i_n = j_0$,
>
> $$\theta_M(i_0, \ldots, i_n)\theta_M(j_0, \ldots, j_s) = \theta_M(i_0, \ldots, i_n, j_1, .., j_s)$$

▶ On dit que M vérifie la propriété (K) si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, \ldots, i_n$ éléments de $[\![1;r]\!]$:

$$\theta_M(i_0, i_1, \ldots, i_n, i_0) = \theta_M(i_0, i_n, \ldots, i_1, i_0) \quad (K)$$

On admet qu'il suffit de vérifier (K) lorsque les i_k sont deux à deux distincts et $n \geqslant 2$.
On établit dans la fin de cette partie que, si M est ergodique, il existe μ telle que M est μ-réversible si seulement si M vérifie la propriété (K).

♡ L'avis du chef ! ♡
Enseigner, c'est aussi faire des choix. L'énoncé aurait donc très bien pu définir la propriété (K) comme celle à laquelle elle est finalement réduite avec $n \geqslant 2$ et les i_k deux à deux distincts...

6. Si $r = 3$, montrer que M vérifie (K) si et seulement si $m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} = m_{1,3}m_{3,2}m_{2,1}$.
Montrer que la matrice P de la question 3. vérifie (K).

- Prenons $r = 3$.
Puisqu'il suffit de vérifier (K) pour les i_k deux à deux distincts et $n \geqslant 2$, et que $\mathrm{Card}\left([\![1;3]\!]\right) = 3$, on a nécessairement :
$$n = 2 \quad \text{et} \quad \{i_0; i_1; i_2\} = \{1; 2; 3\}$$
Il y a donc 6 triplets $(i_0; i_1; i_2)$ possibles :
$$(1;2;3) \quad ; \quad (1;3;2) \quad ; \quad (2;1;3) \quad ; \quad (2;3;1) \quad ; \quad (3;1;2) \quad ; \quad (3;2;1)$$
Ainsi :
$$M \text{ vérifie } (K) \text{ si, et seulement si : } \left\{\begin{array}{l}\theta_M(1,2,3,1) = \theta_M(1,3,2,1) \\ \theta_M(2,3,1,2) = \theta_M(2,1,3,2) \\ \theta_M(3,1,2,3) = \theta_M(3,2,1,3)\end{array}\right. \quad (\star)$$
Mais, remarquons que :
  - ✱ d'une part :
$$\begin{aligned}\theta_M(1;2;3;1) &= m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} \\ &= m_{3,1}m_{1,2}m_{2,3} \\ &= \theta_M(3,1,2,3) \\ &= m_{2,3}m_{3,1}m_{1,2} \\ &= \theta_M(2,3,1,2)\end{aligned}$$
  - ✱ d'autre part :
$$\begin{aligned}\theta_M(1;3;2;1) &= m_{1,3}m_{3,2}m_{2,1} \\ &= m_{2,1}m_{1,3}m_{3,2} \\ &= \theta_M(2,1,3,2) \\ &= m_{3,2}m_{2,1}m_{1,3} \\ &= \theta_M(3,2,1,3)\end{aligned}$$

Par conséquent, les trois équations dans $(\star)$ sont toutes équivalentes à $m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} = m_{1,3}m_{3,2}m_{2,1}$.

> **Conclusion :** M vérifie (K) si et seulement si $m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} = m_{1,3}m_{3,2}m_{2,1}$.

Petite remarque
La matrice $\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3}\end{pmatrix}$ vérifie (K) ssi le produit des facteurs verts vaut le produit des facteurs rouges.

- On avait $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, pour laquelle les deux produits mentionnés dans le point ci-dessus sont nuls, donc égaux.

> **Conclusion :** la matrice P vérifie (K).

7. On suppose dans cette question que M est μ-réversible.

7.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, \ldots, i_n$ éléments de $[\![1;r]\!]$:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}\right) \theta_M(i_0, \ldots, i_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_k}\right) \theta_M(i_n, \ldots, i_0)$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, \ldots, i_n$ éléments de $[\![1;r]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}\right) \theta_M(i_0, \ldots, i_n) &= \mu_{i_0} \times \ldots \mu_{i_{n-1}} \times m_{i_0,i_1} \times \ldots \times m_{i_{n-1},i_n} \\
&= \mu_{i_0} m_{i_0,i_1} \times \ldots \times \mu_{i_{n-1}} m_{i_{n-1},i_n} \\
&= \mu_{i_1} m_{i_1,i_0} \times \ldots \times \mu_{i_n} m_{i_n,i_{n-1}} \qquad \text{M est μ-réversible} \\
&= \mu_{i_1} \times \ldots \mu_{i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \ldots \times m_{i_1,i_0} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_k}\right) \theta_M(i_n, \ldots, i_0)
\end{aligned}$$

> **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, \ldots, i_n$ éléments de $[\![1;r]\!]$:
>
> $$\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}\right) \theta_M(i_0, \ldots, i_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_k}\right) \theta_M(i_n, \ldots, i_0)$$

7.b. En déduire que M vérifie (K).
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, \ldots, i_n$ éléments de $[\![1;r]\!]$. Montrons que $\theta_M(i_0, i_1, \ldots, i_n, i_0) = \theta_M(i_0, i_n, \ldots, i_1, i_0)$.
Remarquons déjà que :

$$\theta_M(i_0, i_1, \ldots, i_n, i_0) = \theta_M(i_0, i_1, \ldots, i_n) \times m_{i_n,i_0} \quad \text{et} \quad \theta_M(i_0, i_n, \ldots, i_1, i_0) = \theta_M(i_n, \ldots, i_1, i_0) \times m_{i_0,i_n}$$

Ensuite, d'après la question précédente :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_{k-1}}\right) \theta_M(i_0, \ldots, i_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_{i_k}\right) \theta_M(i_n, \ldots, i_0)$$

Mais M est μ-réversible, donc $\mu_{i_n} m_{i_n,i_0} = \mu_{i_0} m_{i_0,i_n}$. Ainsi, en multipliant l'égalité ci-dessus par $\mu_{i_n} m_{i_n,i_0}$ à gauche et $\mu_{i_0} m_{i_0,i_n}$ à droite, on obtient avec la remarque précédente :

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} \mu_{i_{k-1}}\right) \theta_M(i_0, \ldots, i_n, i_0) = \left(\prod_{k=0}^{n} \mu_{i_k}\right) \theta_M(i_0, i_n, \ldots, i_0)$$

Or, par changement d'indice :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \mu_{i_{k-1}} = \prod_{k=0}^{n} \mu_{i_k}$$

Ainsi :

$$\left(\prod_{k=0}^{n} \mu_{i_k}\right) \theta_M(i_0, \ldots, i_n, i_0) = \left(\prod_{k=0}^{n} \mu_{i_k}\right) \theta_M(i_0, i_n, \ldots, i_0)$$

Enfin, puisque les coefficients de μ sont tous strictement positifs, on a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \mu_{i_k} \neq 0$. Par conséquent :

$$\theta_M(i_0, i_1, \ldots, i_n, i_0) = \theta_M(i_0, i_n, \ldots, i_1, i_0)$$

> **Conclusion :** M vérifie (K).

8. Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Montrer par récurrence sur $s \in \mathbb{N}^*$ que $m_{i,j}^{(s)} > 0$ si et seulement si il existe $(i_0, i_1, \ldots, i_s)$ appartenant à $[\![1;r]\!]^{s+1}$ tel que $i_0 = i$, $i_s = j$ et $\theta_M(i_0, \ldots, i_s) > 0$.
Démontrons :

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \ \forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ \left(m_{i,j}^{(s)} > 0 \iff \exists (i_0, \ldots, i_s) \in [\![1;r]\!]^{s+1} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_s = j \\ \theta_M(i_0, \ldots, i_s) > 0 \end{array} \right. \right)$$

Petite remarque

Il y avait une coquille dans l'énoncé : le couple (i,j) ne peut pas être fixé hors de la récurrence, puisque dans l'hérédité, nous appliquons l'HDR à un couple qui n'est pas nécessairement le couple (i,j) (la deuxième composante n'est pas nécessairement j)...

- **Initialisation.** Pour $s = 1$:
  Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. On a :

$$\begin{aligned}
m_{i,j} > 0 &\iff \exists (i_0, i_1) \in [\![1;r]\!]^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_1 = j \\ \theta_M(i_0, i_1) \end{array} \right. \\
&\iff \theta_M(i,j) > 0
\end{aligned}$$

  Ce qui est vrai, car $\theta_M(i,j) = m_{i,j}$. L'initialisation est donc vérifiée.

- **Hérédité.** Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Supposons :

$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ \left(m_{i,j}^{(s)} > 0 \iff \exists (i_0,\dots,i_s) \in [\![1;r]\!]^{s+1} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_s = j \\ \theta_M(i_0,\dots,i_s) > 0 \end{array} \right. \right)$$

Démontrons :

$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ \left(m_{i,j}^{(s+1)} > 0 \iff \exists (i_0,\dots,i_{s+1}) \in [\![1;r]\!]^{s+2} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_{s+1} = j \\ \theta_M(i_0,\dots,i_{s+1}) > 0 \end{array} \right. \right)$$

Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Puisque $M^{s+1} = M^s \times M$, par définition du produit matriciel, on a :

$$m_{i,j}^{(s+1)} = \sum_{k=1}^{r} m_{i,k}^{(s)} m_{k,j}$$

Or cette somme est une somme de termes positifs ; elle est donc strictement positive si, et seulement si, au moins un de ses termes est strictement positif.
D'où :

☞ Rappel...
Une somme de termes positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls...

$$\begin{aligned}
m_{i,j}^{(s+1)} > 0 &\iff \exists k \in [\![1;r]\!] \ / \ m_{i,k}^{(s)} m_{k,j} > 0 && \text{les coefficients de } M \text{ et } M^s \text{ sont positifs} \\
&\iff \exists k \in [\![1;r]\!] \ / \ m_{i,k}^{(s)} > 0 \text{ ET } m_{k,j} > 0 && \text{hypothèse de récurrence} \\
&\iff \exists k \in [\![1;r]\!], \ \exists (i_0,\dots,i_s) \in [\![1;r]\!]^{s+1} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_s = k \\ \theta_M(i_0,\dots,i_s) > 0 \end{array} \right. \text{ ET } m_{i_s,j} > 0 \\
&\iff \exists (i_0,\dots,i_s,i_{s+1}) \in [\![1;r]\!]^{s+2} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_{s+1} = j \\ \theta_M(i_0,\dots,i_s) > 0 \end{array} \right. \text{ ET } m_{i_s,i_{s+1}} > 0 && \theta_M(i_0,\dots,i_s) \text{ et } m_{i_s,i_{s+1}} \text{ sont positifs} \\
&\iff \exists (i_0,\dots,i_s,i_{s+1}) \in [\![1;r]\!]^{s+2} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_{s+1} = j \\ \theta_M(i_0,\dots,i_s) \times m_{i_s,i_{s+1}} > 0 \end{array} \right. && \text{définition de } \theta_M \\
&\iff \exists (i_0,\dots,i_s,i_{s+1}) \in [\![1;r]\!]^{s+2} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_{s+1} = j \\ \theta_M(i_0,\dots,i_s,i_{s+1}) > 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall s \in \mathbb{N}^*, \ \forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ \left(m_{i,j}^{(s)} > 0 \iff \exists (i_0,\dots,i_s) \in [\![1;r]\!]^{s+1} \ / \ \left\{ \begin{array}{l} i_0 = i \ ; \ i_s = j \\ \theta_M(i_0,\dots,i_s) > 0 \end{array} \right. \right)$.

Petite remarque
Cette question fournit donc une CNS pour que la matrice M^s soit à coefficients strictement positifs... D'un point de vue des graphes probabilistes, la matrice M^s (où M est la matrice de transition) est à coefficients strictement positifs ssi pour tout (i,j), il existe un chemin de longueur s reliant les sommets i et j...

9. On suppose que la matrice M vérifie (K) et est ergodique avec pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $m_{i,j}^{(\sigma)} > 0$, où σ est un entier naturel non nul. On veut montrer qu'alors M est μ-réversible pour μ à définir.

9.a. Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe $(i_0, i_1, \dots, i_\sigma)$ appartenant à $[\![1;r]\!]^{\sigma+1}$ tel que $i_0 = i, i_\sigma = 1$ et $\theta_M(i_0,\dots,i_\sigma) > 0$.
Montrer que si $m_{1,i} > 0$, alors $\theta_M(i_\sigma,\dots,i_0) > 0$ et $m_{i,1} > 0$.
Soit $i \in [\![1;r]\!]$.

- Puisque $m_{i,j}^{(\sigma)} > 0$, le résultat est immédiat d'après la question précédente.
- Supposons $m_{1,i} > 0$. On sait que M vérifie (K), d'où :

$$\theta_M(i_0, i_1, \dots, i_\sigma, i_0) = \theta_M(i_0, i_\sigma, \dots, i_0)$$

Autrement dit :

$$\theta_M(i_0,\dots,i_\sigma) m_{i_\sigma,i_0} = m_{i_0,i_\sigma} \theta_M(i_\sigma,\dots,i_0)$$

C'est-à-dire :

$$\theta_M(i_0,\dots,i_\sigma) m_{1,i} = m_{i,1} \theta_M(i_\sigma,\dots,i_0)$$

Mais $\theta_M(i_0,\dots,i_\sigma) > 0$ et $m_{1,i} > 0$. D'où $\theta_M(i_0,\dots,i_\sigma) m_{1,i} > 0$ et donc :

$$m_{i,1} \theta_M(i_\sigma,\dots,i_0) > 0$$

Par conséquent, puisque ces deux facteurs sont positifs, on a :

$$m_{i,1} > 0 \ ; \ \theta_M(i_\sigma,\dots,i_0) > 0$$

Conclusion : si $m_{1,i} > 0$, alors $\theta_M(i_\sigma,\dots,i_0) > 0$ et $m_{i,1} > 0$.

► Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, on pose alors $v_i = \dfrac{\theta_M(i_\sigma,\dots,i_0)}{\theta_M(i_0,\dots,i_\sigma)}$ où $i_0,\dots,i_\sigma$ sont définis comme dans la question 9.a..

9.b. Établir que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $v_i m_{i,j} = v_j m_{j,i}$, puis en interprétant matriciellement les égalités précédentes que, pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $v_i m_{i,j}^{(\sigma)} = v_j m_{j,i}^{(\sigma)}$.

- Soit $(i, j) \in [\![1; r]\!]^2$. Raisonnons par équivalences :

$$\begin{aligned} v_i m_{i,j} = v_j m_{j,i} &\iff \frac{\theta_M(1, i_{\sigma-1}, \dots, i_1, i)}{\theta_M(i, i_1, \dots, i_{\sigma-1}, 1)} m_{i,j} = \frac{\theta_M(1, j_{\sigma-1}, \dots, j_1, j)}{\theta_M(j, i_1, \dots, j_{\sigma-1}, 1)} m_{j,i} \\ &\iff \theta_M(1, i_{\sigma-1}, \dots, i_1, i) m_{i,j} \theta_M(j, j_1, \dots, j_{\sigma-1}, 1) = \theta_M(1, j_{\sigma-1}, \dots, j_1, j) m_{j,i} \theta_M(i, i_1, \dots, i_{\sigma-1}, 1) \\ &\iff \theta_M(1, i_{\sigma-1}, \dots, i_1, i, j, j_1, \dots, j_{\sigma-1}, 1) = \theta_M(1, j_{\sigma-1}, \dots, j_1, j, i, i_1, \dots, i_{\sigma-1}, 1) \end{aligned}$$

les dénominateurs sont non nuls

définition de θ_M

Or, puisque M vérifie (K), cette dernière égalité est vraie. Ainsi, par équivalences, la première également.
Conclusion : $\forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2, \ v_i m_{i,j} = v_j m_{j,i}$.

- En posant $D = \text{diag}(v_1, \dots, v_r)$, le résultat précédent fournit :

$$DM = {}^tMD$$

Or, pour tout $i \in [\![1; r]\!], \ v_i \neq 0$. Donc D est inversible et ainsi :

$$M = D^{-1}\,{}^tMD$$

D'où :

$$M^\sigma = D^{-1}({}^tM)^\sigma D$$

Autrement dit :

$$M^\sigma = D^{-1}\,{}^t(M^\sigma)D$$

Et donc :

$$DM^\sigma = {}^t(M^\sigma)D$$

Conclusion : $\forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2, \ v_i m_{i,j}^{(\sigma)} = v_j m_{j,i}^{(\sigma)}$.

9.c. Montrer qu'il existe $i \in [\![1; r]\!]$ tel que $m_{1,i} > 0$. En déduire que pour tout $j \in [\![1; r]\!]$, $v_j > 0$.

- Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $i \in [\![1; r]\!], \ m_{1,i} = 0$. Autrement dit, la première ligne de la matrice M est nulle.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la première ligne de la matrice M^n est également nulle.
Ceci contredit le fait que pour tout $(i, j) \in [\![1; r]\!]^2, \ m_{\cdot,j}^{\sigma} > 0$...
Conclusion : il existe $i \in [\![1; r]\!]$, que l'on considère ensuite, tel que $m_{1,i} > 0$.

Petite remarque
Peut se démontrer rapidement par récurrence, mais je doute que ce soit nécessaire ici.

- D'après la question **9.a.** :
  - il existe $(i_0, i_1, \dots, i_\sigma)$ appartenant à $[\![1; r]\!]^{\sigma+1}$ tel que $i_0 = i, i_\sigma = 1$ et $\theta_M(i_0, \dots, i_\sigma) > 0$;
  - puisque $m_{1,i} > 0$, on a aussi : $\theta_M(i_\sigma, \dots, i_0) > 0$ et $m_{i,1} > 0$.

On en déduit :

$$v_i > 0$$

Mais, d'après la question précédente :

$$\forall j \in [\![1; r]\!], \ v_i m_{i,j}^{(\sigma)} = v_j m_{j,i}^{(\sigma)}$$

Or, pour tout $j \in [\![1; r]\!], \ m_{j,i}^{(\sigma)} > 0$. On obtient donc :

$$\forall j \in [\![1; r]\!], \ v_j = \frac{v_i m_{i,j}^{(\sigma)}}{m_{j,i}^{(\sigma)}}$$

Et puisque pour tout $j \in [\![1; r]\!], \ m_{i,j}^{(\sigma)} > 0$, on conclut sur le résultat.

Conclusion : pour tout $j \in [\![1; r]\!]$, $v_j > 0$.

9.d. Définir alors μ telle que M soit μ–réversible.
On sait déjà, d'après les questions **9.b.** et **9.c.**, que :

$$\forall j \in [\![1; r]\!], \ v_j > 0 \quad ; \quad \forall (i, j) \in [\![1; r]\!]^2, \ v_i m_{i,j} = v_j m_{j,i}$$

Posons donc $\mu \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall j \in [\![1; r]\!], \ \mu_j = \frac{v_j}{\sum\limits_{k=1}^{r} v_k}$$

La matrice μ est bien définie, car pour tout $j \in [\![1; r]\!]$, $v_j > 0$; donc $\sum\limits_{k=1}^{r} v_k > 0$.

On a ainsi :

✓ $\forall j \in [\![1; r]\!], \ \mu_j > 0$

✓ puis :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r} \mu_j &= \sum_{j=1}^{r} \frac{v_j}{\sum\limits_{k=1}^{r} v_k} \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{r} v_k} \sum_{j=1}^{r} v_j \\ &= 1\end{aligned}$$

✓ et enfin, pour tout $(i, j) \in [\![1; r]\!]^2$:

$$\begin{aligned}\mu_i m_{i,j} &= \frac{v_i}{\sum\limits_{k=1}^{r} v_k} m_{i,j} \\ &= \frac{v_j}{\sum\limits_{k=1}^{r} v_k} m_{j,i} && \text{question 9.b.} \\ &= \mu_j m_{j,i}\end{aligned}$$

Conclusion : pour $\mu = \left(\frac{v_1}{\sum\limits_{k=1}^{r} v_k} \quad \cdots \quad \frac{v_r}{\sum\limits_{k=1}^{r} v_k} \right)$, la matrice M est μ-réversible.

Partie 2 – Matrice de transition réversible ergodique, convergence

On conserve les notations de la partie 1. On rappelle que seules les questions 1 et 2 de la partie 1 sont utiles dans cette partie.

On considère que la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est μ-réversible.

On note Q la transposée de P et $q_{i,j}$ ses coefficients.

♡ L'avis du chef ! ♡
Début de partie 2 assez classique et relativement abordable : il faut prendre des points !

10. On rappelle que Δ désigne la matrice diagonale appartenant à $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont $\mu_1, \ldots, \mu_r$.

10.a. Déterminer une matrice diagonale D inversible telle que $D^2 = \Delta$.

Puisque $\mu_1, \ldots, \mu_r > 0$, on peut poser $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_r})$.

✓ Puisque D est diagonale, on a $D^2 = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_r) = \Delta$;

✓ et D est inversible car diagonale à coefficients diagonaux non nuls.

Conclusion : la matrice $\text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_r})$ convient.

♣ Méthode !
Il y a essentiellement deux possibilités.... Soit on montre que $D^{-1}QD$ est semblable à une matrice diagonale, soit on montre qu'elle est symétrique...

10.b. En utilisant la question 1.c., en déduire que $D^{-1}QD$ est diagonalisable.

Puisque P est μ-réversible, d'après la question 1.c. :

$$\Delta P = {}^t P \Delta$$

Autrement dit :

$$D^2 P = QD^2$$

D'où :

$$DPD^{-1} = D^{-1}QD$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}{}^t(D^{-1}QD) &= {}^tD\,{}^tQ\,{}^t(D^{-1}) \\ &= DP({}^tD)^{-1} && D \text{ est diagonale, donc } {}^tD = D \\ &= DPD^{-1} && \text{idem} \\ &= D^{-1}QD && \text{ce qui précède}\end{aligned}$$

Conclusion : la matrice $D^{-1}QD$ est symétrique (à coefficients réels), donc diagonalisable.

10.c. En conclure que Q est diagonalisable.

Puisque, d'après la question précédente, $D^{-1}QD$ est diagonalisable, il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ diagonale, que l'on considère ensuite, telles que :

$$D^{-1}QD = RD'R^{-1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} Q &= DRD'R^{-1}D^{-1} \\ &= (DR)D'(DR)^{-1} \end{aligned}$$

Or D' est diagonale, donc Q est semblable à une matrice diagonale...

Conclusion : Q est diagonalisable.

À retenir...
Si une matrice est semblable à une matrice diagonalisable, elle est elle-même diagonalisable.

► On admet que si M est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et Z une matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$, ${}^t(ZM) = {}^tM{}^tZ$.

11. Montrer que $Q{}^t\mu = {}^t\mu$. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{Sp}(Q)$?

- On sait que P est μ-réversible, donc d'après la question 2. :

$$\mu P = \mu$$

Ainsi :

$${}^t(\mu P) = {}^t\mu$$

Autrement dit :

$${}^tP{}^t\mu = {}^t\mu$$

Conclusion : $Q{}^t\mu = {}^t\mu$.

- Puisque μ est à coefficients strictement positifs, on a ${}^t\mu \neq \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$.
Par conséquent, 1 est valeur propre de Q et ${}^t\mu$ en est un vecteur propre associé.

Conclusion : $1 \in \mathrm{Sp}(Q)$.

12. Soit λ une valeur propre de Q et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

12.a. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} q_{i,j}|y_j|\right) = \sum_{j=1}^{r}|y_j|$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} q_{i,j}|y_j|\right) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} q_{i,j}|y_j| \\ &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} q_{i,j}|y_i| && \text{permutation des deux sommes} \\ &= \sum_{j=1}^{r}\left(|y_j|\sum_{i=1}^{r} q_{i,j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{r}|y_j| && \text{puisque la somme des coefficients de chaque ligne de } P \text{ vaut 1 ; la somme des coefficients de chaque colonne de } Q \text{ également} \end{aligned}$$

Conclusion : $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} q_{i,j}|y_j|\right) = \sum_{j=1}^{r}|y_j|$.

12.b. En déduire que $\displaystyle|\lambda|\left(\sum_{i=1}^{r}|y_i|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r}|y_i|$.

Puisque Y est vecteur propre de Q pour la valeur propre λ :

$$QY = \lambda Y$$

Autrement dit, en examinant ligne par ligne :

$$\forall i \in [\![1;r]\!],\ \sum_{j=1}^{r} q_{i,j}y_j = \lambda y_i$$

Puis :

$$\forall i \in [\![1;r]\!],\ \left|\sum_{j=1}^{r} q_{i,j} y_j\right| = |\lambda y_i|$$

Mais, par inégalité triangulaire et puisque les coefficients de Q sont positifs, on a :

$$\forall i \in [\![1;r]\!],\ \left|\sum_{j=1}^{r} q_{i,j} y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j|$$

Ce qui donne donc :

$$\forall i \in [\![1;r]\!],\ |\lambda||y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j|$$

D'où, en sommant pour $i \in [\![1;r]\!]$:

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{r} |y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j|$$

Enfin, d'après la question précédente, $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} \left|y_j\right| = \sum_{j=1}^{r} \left|y_j\right|$. D'où le résultat.

Conclusion : $|\lambda| \left(\sum_{i=1}^{r} |y_i|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} |y_i|$.

12.c. En conclure que $\mathrm{Sp}(Q) \subset [-1, 1]$.

D'après la question précédente :

$$|\lambda| \left(\sum_{i=1}^{r} |y_i|\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} |y_i|$$

Or :

- ✓ $\sum_{i=1}^{r} |y_i| \geqslant 0$
- ✓ Y est un vecteur propre, donc $Y \neq 0_{r,1}$ et ainsi, au moins une composante de Y est non nulle.

Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{r} |y_i| > 0$$

D'où, en divisant l'inégalité ci-dessus par cette quantité :

$$|\lambda| \leqslant 1$$

Et donc :

$$\lambda \in [-1; 1]$$

Conclusion : $\mathrm{Sp}(Q) \subset [-1; 1]$.

13. On suppose dans cette question que tous les coefficients de P, donc de Q, sont strictement positifs. Dans cette question on détermine $E_1(Q)$ où $E_1(Q)$ désigne le sous-espace propre de Q associé à la valeur propre 1.

13.a. Soit un vecteur propre $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ de Q pour la valeur propre 1 dont l'un au moins des coefficients, noté y_k, est strictement positif.

On suppose qu'il existe ℓ tel que $y_\ell < 0$.

Montrer que $y_k < \sum_{j=1}^{r} q_{k,j} |y_j|$, puis que $\sum_{i=1}^{r} |y_i| < \sum_{i=1}^{r} |y_i|$. Conclusion ?

Petite remarque

On peut faire cette hypothèse, sans perte de généralité... En effet, si le vecteur propre choisi ne contient que des composantes négatives, il suffit de choisir son opposé, qui a au moins une composante non nulle et positive...

- Puisque Y est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1 :

$$QY = Y$$

Autrement dit, en examinant ligne par ligne :

$$\forall i \in [\![1;r]\!],\ \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} y_j = y_i$$

En particulier, pour $i = k$:

$$\sum_{j=1}^{r} q_{k,j} y_j = y_k$$

Or :

* comme les coefficients de Q sont positifs : $\forall j \in [\![1;r]\!],\ q_{k,j} y_j \leqslant q_{k,j} |y_j|$;
* et, puisque les coefficients de Q sont supposés strictement positifs, donc non nuls, et que $y_\ell < 0$, on a même : $q_{k,\ell} y_\ell < q_{k,\ell} |y_\ell|$.

D'où :

$$\sum_{j=1}^{r} q_{k,j} y_j < \sum_{j=1}^{r} q_{k,j} |y_j|$$

Conclusion : $y_k < \sum_{j=1}^{r} q_{k,j} |y_j|$.

Pourquoi ?
On a $y_j \leqslant |y_\ell|$. Puis on multiplie par $q_{k,j} \geqslant 0$...

- Montrons maintenant : $\forall i \in [\![1;r]\!],\ |y_i| < \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j|$.

Petite remarque
C'est le résultat final qui nous encourage à vouloir démontrer celui-ci...

Soit $i \in [\![1;r]\!]$.

* Si $y_i > 0$:
Dans ce cas, $|y_i| = y_i$ et on utilise le résultat du point précédent avec $k = i$. D'où :

$$|y_i| < \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j|$$

* Si $y_i < 0$:
Dans ce cas, $|y_i| = -y_i > 0$. Et on applique le résultat du point précédent au vecteur $-Y$, qui est bien vecteur propre et qui possède au moins une composante strictement positive : $-y_i > 0$. D'où :

$$-y_i < \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} | - y_j|$$

Et ainsi :

$$|y_i| < \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j|$$

* Si $y_i = 0$:
Dans ce cas $|y_i| = 0$ et puisque $\sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j| \geqslant 0$, on a bien le résultat voulu.

Par conséquent :

$$\forall i \in [\![1;r]\!],\ |y_i| < \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j|$$

Ainsi, en sommant pour $i \in [\![1;r]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{r} |y_i| < \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} q_{i,j} |y_j| \right)$$

Conclusion : d'après la question 12.a., on obtient : $\sum_{i=1}^{r} |y_i| < \sum_{i=1}^{r} |y_i|$.

Petite remarque
Question plus difficile que ce qu'elle a l'air... Ou alors je suis passé à côté d'un truc plus simple !

- Cette inégalité est absurde !
Par conséquent, l'hypothèse "$\exists \ell \in [\![1;r]\!]\ /\ y_\ell < 0$" est fausse.
On en déduit que si Y possède une composante strictement positive, alors toutes ses composantes sont positives.

Conclusion : les vecteurs propres de Q pour la valeur propre 1 ont des composantes toutes du même signe.

★Subtil...★
En réfléchissant un peu, on se rend compte que cela implique que $\dim\big(E_1(Q)\big) = 1$... C'est ce que la question 13.c. nous permet d'obtenir, de façon algébrique.

13.b. En déduire que tous les vecteurs propres de Q pour la valeur propre 1 ont des composantes qui sont toutes, soit positives, soit négatives. Que peut-on dire d'un élément de $E_1(Q)$ dont la somme des composantes est nulle ?

- C'est la conclusion faite ci-dessus.
- Si la somme des composantes d'un vecteur de $E_1(Q)$ est nulle, alors, puisqu'il s'agit d'une somme de termes tous de même signe, chacun des termes est nul.

Conclusion : si la somme des composantes d'un vecteur de $E_1(Q)$ est nulle, alors ce vecteur est nul.

☞ Rappel...
Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre, mais appartient à $E_1(Q)$, qui est un espace vectoriel. $E_1(Q)$ ne se réduit pas à l'ensemble des $\overrightarrow{\text{VP}}$ de Q pour la VP 1 : c'est cet ensemble réuni avec le singleton réduit au vecteur nul.

13.c. Soit Y un vecteur propre de Q pour la valeur propre 1. Montrer que $Y = \left(\sum_{i=1}^{r} y_i \right) {}^t\mu$.

En conclure que $E_1(Q) = \text{Vect}({}^t\mu)$.

- Posons $X = Y - \left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right) {}^t\mu$. Utilisons la question précédente pour démontrer que $X = 0_{r,1}$. On a :

➠Réflexe !
Pour montrer que $a = b$, on montre que $a - b = 0$...

✓ $Y \in E_1(Q)$ et ${}^t\mu \in E_1(Q)$ d'après la question **11.**, d'où :

$$X \in E_1(Q)$$

✓ ensuite, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r} x_k &= \sum_{k=1}^{r} \left(y_k - \left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right) \mu_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} y_k - \left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right) \sum_{k=1}^{r} \mu_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

la somme des composantes de μ vaut 1

Par conséquent, X est vecteur de $E_1(Q)$ dont la somme des composantes vaut 0. D'après la question précédente, on en déduit que $X = 0_{r,1}$.

Conclusion : si Y est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1, alors $Y = \left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right) {}^t\mu$.

Petite remarque
Le résultat est encore valable si $Y = 0_{r,1}$. On aurait donc pu directement demander de démontrer que si $Y \in E_1(Q)$, alors $Y = \left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right) {}^t\mu$.

- Par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ On vient d'établir que tout vecteur propre de Q pour la valeur propre 1 est multiple de ${}^t\mu$. Et c'est aussi le cas du vecteur nul...
Par conséquent, tout vecteur de $E_1(Q)$ est multiple de ${}^t\mu$. D'où :

$$E_1(Q) \subset \mathrm{Vect}({}^t\mu)$$

$\boxed{\supset}$ D'après la question **11.**, ${}^t\mu$ est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1. D'où :

$$\mathrm{Vect}({}^t\mu) \subset E_1(Q)$$

Conclusion : $E_1(Q) = \mathrm{Vect}({}^t\mu)$.

13.d. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ tel que $QY = -Y$. Montrer que $\sum_{i=1}^{r} y_i = 0$. En raisonnant par l'absurde, montrer que -1 n'est pas une valeur propre de Q.

- En examinant l'égalité $QY = -Y$ ligne par ligne :

$$\forall i \in [\![1; r]\!], \ \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} y_j = -y_i$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} y_i &= -\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} q_{i,j} y_j \\
&= -\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} q_{i,j} y_j \\
&= -\sum_{j=1}^{r} \left(y_j \sum_{i=1}^{r} q_{i,j} \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{r} y_j
\end{aligned}$$

permutation des deux sommes

puisque la somme des coefficients de chaque ligne de P vaut 1 ; la somme des coefficients de chaque colonne de Q également

Conclusion : $\sum_{i=1}^{r} y_i = 0$.

Pourquoi ?
Quel est le seul nombre égal à son opposé ?

- Supposons que -1 est valeur propre de Q. Il existe donc un vecteur non nul Y, que l'on considère ensuite, tel que $QY = -Y$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} Q^2 Y &= Q(QY) \\ &= -QY \\ &= Y \end{aligned}$$

Donc Y est vecteur propre de Q^2 pour la valeur propre 1. Mais :

✓ $Q^2 = {}^t(P^2)$ et P^2 est μ-réversible. En effet :

× d'une part, puisque $P \in \mathcal{ST}_r$, on a également $P^2 \in \mathcal{ST}_r$;

× d'autre part :

$$\begin{aligned} \Delta P^2 &= \Delta PP \\ &= {}^tP\Delta P && \text{question 1.c. avec } P \text{ qui est } \mu\text{-réversible} \\ &= ({}^tP)^2\Delta && \text{idem} \\ &= {}^t(P^2)\Delta \end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question **1.c.**, la matrice P^2 est μ-réversible.

✓ La matrice Q est à coefficients strictement positifs, donc Q^2 également.

On peut donc appliquer le résultat de la question **13.b.** à la matrice Q^2. Or $\sum_{i=1}^{r} y_i = 0$ d'après le point précédent ; d'où :

$$Y = 0_{r,1} \quad \text{absurde !}$$

> **Conclusion :** -1 n'est pas valeur propre de Q.

♡ L'avis du chef ! ♡
La suite de cette question aurait mérité (à moins que l'on puisse la traiter plus rapidement) d'être guidée, par exemple ainsi :
- Démontrer que P^2 est μ-réversible.
- Démontrer que si Y est $\overrightarrow{\text{VP}}$ de Q pour la VP -1, alors Y est $\overrightarrow{\text{VP}}$ de Q^2 pour une VP à déterminer.
- Conclure que -1 n'est pas VP de Q.

Petite remarque
Deux démonstrations du fait que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique : Question classique - Matrices stochastiques et Exercice 1 - question 4.

Petite remarque
Il n'est pas nécessaire de raisonner par l'absurde. En effet l'implication $QY = -Y \implies Y = 0_{n,1}$, que l'on a démontrée, suffit pour conclure que -1 n'est pas valeur propre de Q.

► **Dans la suite de cette partie on suppose que P est ergodique avec pour tout $(i, j) \in [\![1; r]\!]^2$, $p_{i,j}^{(u)} > 0$, où u est un entier naturel non nul.**

► En appliquant la question précédente à la matrice P^u, qui est aussi μ-réversible, on a

$$\mathrm{Sp}(Q^u) \subset]-1, 1] \quad \text{et} \quad E_1(Q^u) = \mathrm{Vect}({}^t\mu)$$

Petite remarque
Ca aurait été intéressant de demander à démontrer que si P est μ-réversible, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P^n également. Ca se fait très bien par récurrence, en utilisant la caractérisation de la question 1.c..

14. 14.a. Montrer que $E_1(Q) = \mathrm{Vect}({}^t\mu)$.

Procédons par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ On sait déjà, d'après la question **11.**, que ${}^t\mu$ est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1.
Ainsi :

$$\mathrm{Vect}({}^t\mu) \subset E_1(Q)$$

$\boxed{\subset}$ Soit $X \in E_1(Q)$. On a ainsi :

$$QX = X$$

D'où, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; Q^n X = X$$

En particulier :

$$Q^u X = X$$

Ainsi :

$$X \in E_1(Q^u)$$

D'où

$$X \in \mathrm{Vect}({}^t\mu)$$

Et donc :

$$E_1(Q) \subset \mathrm{Vect}({}^t\mu)$$

> **Conclusion :** $E_1(Q) = \mathrm{Vect}({}^t\mu)$.

À retenir...
Si X est $\overrightarrow{\text{VP}}$ d'une matrice M pour la VP a, alors X est $\overrightarrow{\text{VP}}$ de M^2 pour la VP a^2.
Par conséquent :

$$E_a(M) \subset E_{a^2}(M^2)$$

14.b. En distinguant les cas, u pair et u impair, montrer par l'absurde que -1 n'est pas une valeur propre de Q.

Supposons que -1 est valeur propre de Q. Il existe donc un vecteur non nul X, que l'on considère ensuite, tel que $QX = -X$. D'où, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; Q^n X = (-1)^n X$$

En particulier :

$$Q^u X = (-1)^u X$$

- Si u est pair :
  On a ainsi :
$$Q^u X = X$$
  Et donc X est vecteur propre de Q^u pour la valeur propre 1. Mais $E_1(Q^u) = \mathrm{Vect}({}^t\mu)$, donc X est colinéaire à ${}^t\mu$: absurde car X et ${}^t\mu$ sont des vecteurs propres de Q associés à des valeurs propres distinctes.
- Si u est impair :
  On a ainsi :
$$Q^u X = -X$$
  Et donc X est vecteur propre de Q^u pour la valeur propre -1. Or, d'après ce qui a été fait en question 13., en particulier en question 13.d., appliquée à la matrice Q^u, -1 n'est pas valeur propre de Q^u : absurde !

Conclusion : -1 n'est pas valeur propre de Q.

15. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les coefficients d'une matrice diagonale semblable à Q, avec $\lambda_1 = 1$, pour tout $i \in [\![2;r]\!]$, $-1 < \lambda_i < 1$ et $({}^t\mu, Y_2, \dots, Y_r)$ une base associée de vecteurs propres. On note aussi pour $n \in \mathbb{N}$, L_n la matrice élément de $\mathcal{M}_{1;r}(\mathbb{R})$: $\big(\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \dots \quad \mathbb{P}([X_n = r])\big)$.

Important !
C'est du cours ! Alors on prend les points !

15.a. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = L_n P$ puis que $L_n = L_0 P^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, d'après la formule des probabilités totales avec $\big([X_n = j]\big)_{j\in[\![1;r]\!]}$ comme système complet d'évènements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}([X_n = j] \cap [X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{j \text{ tq } \mathbb{P}([X_n=j])\neq 0} \mathbb{P}([X_n = j] \cap [X_{n+1} = k]) \\
&= \sum_{j \text{ tq } \mathbb{P}([X_n=j])\neq 0} \mathbb{P}([X_n = j])\, \mathbb{P}_{[X_n=j]}([X_{n+1} = k]) && \text{hypothèse (H3)} \\
&= \sum_{j \text{ tq } \mathbb{P}([X_n=j])\neq 0} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_{j,k} && \text{on ajoute des termes nuls} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}([X_n = j])\, p_{j,k} \\
&= \big(\mathbb{P}([X_n = 1] \quad \dots \quad \mathbb{P}([X_n = r])\big) \times \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{r,k} \end{pmatrix} \\
&= L_n \times \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{r,k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

✘ Attention !
Il y a une difficulté apportée par le fait que, pour tout $j \in [\![1;r]\!]$, les probabilités $\mathbb{P}([X_n = j])$ (quand n bouge) ne sont pas toutes non nulles. C'est le seul seulement si $n \in S_j$.
Ici, n est fixé. On ne fait donc porter la somme que sur les j tels que $n \in S_j$ (au pire, la somme est indexée sur un ensemble vide, donc nulle).

Autrement dit :
La k-ième colonne de L_{n+1} est égale à $L_n \times C_k$, où C_k est la k-ième colonne de P...

D'où :
$$\big(\mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \quad \dots \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = r])\big) = U_n \times \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{r,1} & \cdots & p_{r,r} \end{pmatrix}$$
Autrement dit :
$$L_{n+1} = L_n \times P$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = L_n P$.

15.b. Procédons par récurrence.

Petite remarque
L'énoncé le demande, alors faisons-la, cette récurrence immédiate...

- **Initialisation.** Pour $n = 0$:
  L'initialisation est vérifiée, car par convention, $P^0 = I_r$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $L_n = L_0 P^n$ et montrons que $L_{n+1} = L_0 P^n$.
  On a, d'après ce qui précède :
$$\begin{aligned}
L_{n+1} &= L_n P \\
&= L_0 P^n P && \text{hypothèse de récurrence} \\
&= L_0 P^{n+1}
\end{aligned}$$
  L'hérédité est ainsi établie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0 P^n$.

15.c. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n = \alpha_1 \mu + \sum_{k=2}^{r} \alpha_k \lambda_k^n ({}^tY_k)$$

Puisque ${}^tL_0 \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et que $({}^t\mu, Y_2, ..., Y_r)$ est une base de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique $(\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$, que l'on considère ensuite, tel que :

$${}^tL_0 = \alpha_1 {}^t\mu + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_r Y_r$$

Soit ensuite $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc :

$$Q^n {}^tL_0 = \alpha_1 Q^n {}^t\mu + \sum_{k=2}^{r} \alpha_k Q^n Y_k$$

Or :

- $Q^t\mu = \mu$, donc $Q^n {}^t\mu = {}^t\mu$;
- pour tout $k \in [\![2; r]\!]$, $QY_k = \lambda_k Y_k$, donc $Q^n Y_k = \lambda_k^n Y_k$.

Ainsi :

$$Q^n {}^tL_0 = \alpha_1 {}^t\mu + \sum_{k=2}^{r} \alpha_k \lambda_k^n Y_k$$

Enfin, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} L_n &= L_0 P^n \\ &= {}^t\big({}^t(L_0 P^n)\big) && \text{${}^tP = Q$, donc ${}^t(P^n) = ({}^tP)^n = Q^n$} \\ &= {}^t\big(Q^n {}^tL_0\big) && \text{ce qui précède et linéarité de la transposition} \\ &= \alpha_1 \mu + \sum_{k=2}^{r} \alpha_k \lambda_k^n {}^tY_k \end{aligned}$$

> **Conclusion :** il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
>
> $$L_n = \alpha_1 \mu + \sum_{k=2}^{r} \alpha_k \lambda_k^n ({}^tY_k)$$

15.d. En déduire que pour tout $j \in [\![1; r]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \alpha_1 \mu_j$.

Soit $j \in [\![1; r]\!]$. En examinant la j-ième colonne de l'égalité matricielle de la question précédente, et en notant $y_{k,j}$ la j-ième colonne de ${}^tY_k$, on a :

$$\mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \alpha_1 \mu j + \sum_{k=2}^{r} \alpha_k \lambda_k^n y_{k,j}$$

Or pour tout $k \in [\![2; r]\!]$, $\lambda_k \in]-1; 1[$. Donc

$$\forall k \in [\![2; r]\!], \quad \lim_{n \to +\infty} \lambda_k^n = 0$$

D'où, par opérations :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \alpha_1 \mu_j$$

> **Conclusion :** pour tout $j \in [\![1; r]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \alpha_1 \mu_j$.

15.e. Montrer que $\alpha_1 = 1$. En conclure que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1; r]\!]$ telle que, $\forall j \in [\![1; r]\!]$, $\mathbb{P}\big([X = j]\big) = \mu_j$.

- Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\Omega) = [\![1; r]\!]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = 1$$

  D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{r} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = 1$$

  Ainsi, d'après la question précédente :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{r} \alpha_1 \mu_j = 1$$

  Or, par définition de μ, on a $\sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j = 1$. D'où :

$$\alpha_1 = 1$$

- On sait que :
  - ✓ $\forall j \in [\![1;r]\!],\ \mu_j \geqslant 0$;
  - ✓ $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1$.

  La suite $(\mu_j)_{j\in[\![1;r]\!]}$ définit donc une loi de probabilité. Il existe ainsi une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = [\![1;r]\!]$ et pour tout $j \in [\![1;r]\!]$, $\mathbb{P}\big([X = j]\big) = \mu_j$.
  Ainsi, d'après la question précédente et le point ci-dessus, on obtient :

$$\forall j \in [\![1;r]\!],\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big([X_n = j]\big) = \mathbb{P}\big([X = j]\big)$$

Puisque les variables X_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et X sont discrètes, on en déduit le résultat voulu.

Conclusion : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1;r]\!]$ telle que, $\forall j \in [\![1;r]\!]$, $\mathbb{P}\big([X = j]\big) = \mu_j$.

✘ Attention !
Si au moins les X_n ou X est à densité, il faut revenir à la définition et donc utiliser les fonctions de répartitions !

Partie 3 – Un algorithme pour la réversibilité

On conserve les notations de la partie 1. On rappelle que cette partie est indépendante de la précédente.

Soit $\alpha \in]0,1]$. On définit deux opérations élémentaires sur les matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,\leqslant r}$ appartenant à $\mathcal{ST}_r$ comme suit :

- On modifie la ligne k de M, où $k \in [\![1;r]\!]$, en remplaçant pour tout $j \neq k$, $m_{k,j}$ par $m'_{k,j} = \alpha m_{k,j}$ et $m_{k,k}$ par $m'_{k,k} = 1 - \alpha + \alpha m_{k,k}$.
- On modifie la colonne k de M, où $k \in [\![1;r]\!]$, et sa diagonale en remplaçant pour tout $i \neq k$, $m_{i,k}$ par $m'_{i,k} = \alpha m_{i,k}$ et $m_{i,i}$ par $m'_{i,i} = m_{i,i} + (1-\alpha)m_{i,k}$.

Par exemple si $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, $k = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, la première opération donne $M' = \begin{pmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et la deuxième $M' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Important !
Il faut passer le temps nécessaire et s'assurer de la bonne compréhension de ces exemples !

Dans les deux cas on obtient ainsi à partir de $M \in \mathcal{ST}_r$, $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$, une matrice que l'on notera dans la suite $M' = (m'_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ qui appartient à $\mathcal{ST}_r$.

Petite remarque
Il aurait été intéressant de demander à démontrer que, dans les deux cas, si $M \in \mathcal{ST}_r$, alors $M' \in \mathcal{ST}_r$.

On remarquera que l'on ne modifie ainsi tout au plus, pour ce qui est des éléments non diagonaux de M, que ceux de la ligne k, pour la première opération, et ceux de la colonne k pour la deuxième.

16. Écrire une fonction **Python opLigne(M,k,alph)** qui réalise l'opération élémentaire sur la k-ième ligne de M représentée par la matrice numpy **M** et α représenté par **alph**.
    On définit de même une fonction **Python opCol(M,k,alph)** qui réalise l'opération élémentaire sur la k-ième colonne et la diagonale de M (cette fonction n'est pas demandée).

```python
import numpy as np

def opLigne(M,k,alph):
    i=k-1 #numérotation des lignes et colonnes qui débute à 0
    r,r=np.shape(M)
    for j in range(0,r):
        if j!=i:
            M[i,j]=alph*M[i,j]
        else:
            M[j,j]=1-alph+alph*M[j,j] #ou i à la place de j
    return M
```

17. Soit $M \in \mathcal{ST}_r$, $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$.

    17.a. Montrer que M vérifie la propriété (K) si et seulement si M' aussi.

- Pour $k \in [\![1;r]\!]$ et $\alpha \in]0;1]$, notons $\mathscr{L}_{k,\alpha}(M)$ la matrice obtenue suite à l'opération sur la ligne k de la matrice M décrite précédemment. Remarquons que, puisque $\alpha \neq 0$:
$$\forall j \neq k,\ m'_{k,j} = \alpha m_{k,j} \iff m_{k,j} = \frac{1}{\alpha} m'_{k,j}$$
et :
$$m'_{k,k} = 1 - \alpha + \alpha m_{k,k} \iff m_{k,k} = 1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} m'_{k,k}$$
Par conséquent :
$$M' = \mathscr{L}_{k,\alpha}(M) \iff M = \mathscr{L}_{k,\frac{1}{\alpha}}(M')$$
Et, avec des notations analogues pour la seconde opération, on a de la même façon :
$$M' = \mathscr{C}_{k,\alpha}(M) \iff M = \mathscr{C}_{k,\frac{1}{\alpha}}(M')$$
Conclusion : pour démontrer l'équivalence, il suffit d'établir que les deux opérations décrites précédemment conservent la propriété (K) sur une matrice M.

Petite remarque
Puisque les i_k sont deux à deux distincts dans $[\![1;r]\!]$, n ne varie en fait que dans $[\![2;r-1]\!]$...

- Par définition, la matrice M vérifie (K) si, et seulement si, pour tout $n \geqslant 2$ et tous $i_0, \dots, i_n \in [\![1;r]\!]$ deux à deux distincts, $m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,i_0} = m_{i_0,i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m_{i_1,i_0}$.
  - **Opération sur les lignes.**
    Soient $k \in [\![1;r]\!]$ et $\alpha \in]0;1]$. Supposons que M vérifie (K). Montrons que M' également.
    Soient $n \geqslant 2$ et $i_0, \dots, i_n \in [\![1;r]\!]$ deux à deux distincts. On a ainsi, puisque M vérifie (K) :
$$m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,i_0} = m_{i_0,i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m_{i_1,i_0}$$
    Montrons :
$$m'_{i_0,i_1} \times \dots \times m'_{i_{n-1},i_n} \times m'_{i_n,i_0} = m'_{i_0,i_n} \times m'_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m'_{i_1,i_0}$$
    Distinguons deux cas :
    - si $k \notin \{i_0, \dots, i_n\}$:
      Dans ce cas, aucun coefficient de la ligne k n'apparaît dans les produits $m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,i_0}$ et $m_{i_0,i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m_{i_1,i_0}$.
      Ainsi aucun des coefficients présents dans ces deux produits n'est modifié par l'opération. Par conséquent, ces deux produits sont inchangées sur la matrice M', et sont donc encore égaux.
    - si $k \in \{i_0, \dots, i_n\}$:
      Notons p l'entier tel que $i_p = k$. Dans ce cas, seuls les coefficients de la ligne i_p de la matrice M sont changés. Et donc :
      - seul le facteur $m_{i_p,i_{p+1}}$ est changé dans le produit $m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,i_0}$:
$$m'_{i_p,i_{p+1}} = \alpha m_{i_p,i_{p+1}}$$
        Par conséquent :
$$m'_{i_0,i_1} \times \dots \times m'_{i_{n-1},i_n} \times m'_{i_n,i_0} = \alpha m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,i_0}$$
      - seul le facteur $m_{i_p,i_{p-1}}$ est changé dans le produit $m_{i_0,i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m_{i_1,i_0}$:
$$m'_{i_p,i_{p-1}} = \alpha m_{i_p,i_{p-1}}$$
        Par conséquent :
$$m'_{i_0,i_n} \times m'_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m'_{i_1,i_0} = \alpha m_{i_0,i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m_{i_1,i_0}$$

Important !
Les coefficients du $m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,i_0}$ sont tous sur des lignes et sur des colonnes différentes de M.
De même pour ceux du produit $m_{i_0,i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m_{i_1,i_0}$.

      On a donc :
$$m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} \times m_{i_n,i_0 5} = m_{i_0,i_n} \times m_{i_n,i_{n-1}} \times \dots \times m_{i_1,i_0}$$
    Dans les deux cas, on a démontré :
$$\theta_M(i_0, \dots, i_n, i_0) = \theta_M(i_0, i_n, \dots, i_0)$$

    Conclusion : l'opération sur les lignes conserve la propriété (K).

  - **Opération sur les colonnes et la diagonale.**
    Raisonnement analogue...

Conclusion : M vérifie (K) si, et seulement si, M' vérifie (K).

17.b. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, si $m_{i,j} > 0$ alors $m'_{i,j} > 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Supposons $m_{i,j} > 0$.
Selon les valeurs de i et j relativement à la ligne ou colonne k sur laquelle l'opération est effectuée, $m'_{i,j}$ peut prendre 4 valeurs possibles :

✍ Rédaction
En toute rigueur, il faudrait distinguer les deux types d'opérations ; puis à l'intérieur les différents cas selon que i, j sont égaux à k ou non... Bref, c'est plus lourd et pas nécessaire, surtout sur ce sujet et à cet endroit du problème... On comprend bien qu'il y a 4 nouvelles valeurs possibles pour $m'_{i,j}$, et c'est largement suffisant !

- si $m'_{i,j} = m_{i,j}$:
  Alors immédiatement $m'_{i,j} > 0$.

- si $m'_{i,j} = \alpha m_{i,j}$:
  Alors, puisque $m_{i,j} > 0$ et $\alpha > 0$, on a $m'_{i,j} > 0$.
- si $m'_{i,j} = 1 - \alpha + \alpha m_{i,j}$:
  Puisque $\alpha \in]0;1]$, on a $1 - \alpha \geqslant 0$. Et comme précédemment, $\alpha m_{i,j} > 0$.
  D'où $m'_{i,j} > 0$.
- si $m_{i,j} = m_{i,j} + (1-\alpha) m_{i,k}$:
  Puisque $\alpha \in]0;1]$ et $m_{i,k} \geqslant 0$ ($M \in \mathcal{ST}_r$), alors $(1-\alpha)m_{i,k} \geqslant 0$. Et comme $m_{i,j} > 0$, on a $m'_{i,j} > 0$.

17.c. Établir que si M est ergodique M' l'est aussi.

Supposons que M est ergodique. Autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on considère ensuite, tel que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $m_{i,j}^{(n)} > 0$.

Montrons que M' est ergodique, et même plus précisément montrons que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $m_{i,j}^{\prime(n)} > 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$.

Puisque M est ergodique, $m_{i,j}^{(n)} > 0$. Et ainsi, d'après la question 8., il existe $(i_0, \dots, i_n) \in [\![1;r]\!]^{n+1}$, que l'on considère ensuite, tel que $i_0 = i$, $i_n = j$ et $\theta_M(i_0, \dots, i_n) > 0$.

D'où :

$$m_{i_0,i_1} \times \dots \times m_{i_{n-1},i_n} > 0$$

Et comme chaque facteur de ce produit est positif ($M \in \mathcal{ST}_r$), on a :

$$\forall j \in [\![0; r-1]\!], \ m_{i_j,i_{j+1}} > 0$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$\forall j \in [\![0; r-1]\!], \ m'_{i_j,i_{j+1}} > 0$$

Et donc :

$$m'_{i_0,i_1} \times \dots \times m'_{i_{n-1},i_n} > 0$$

Autrement dit :

$$\theta_{M'}(i_0, \dots, i_n) > 0$$

D'après la question 8., on en déduit donc que $m_{i,j}^{\prime(n)} > 0$. Pour le n ainsi exhibé, on a donc établi :

$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ m_{i,j}^{\prime(n)} > 0$$

Conclusion : si M est ergodique, alors M' l'est aussi.

▶ Soit I un sous-ensemble non vide de $[\![1;r]\!]$ et $M \in \mathcal{ST}_r$, $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$.
On définit le graphe non orienté $G_M(I)$ dont l'ensemble des sommets est I et tel que $\{i,j\}$ est une arête si $i \neq j$, $m_{i,j} \neq 0$ et $m_{j,i} = m_{i,j}$.
Donc si I est réduit à un seul élément le graphe ne comporte pas d'arête.

Par exemple si $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, avec $I = \{1,2,3\}$ les arêtes sont $\{1,2\}$ et $\{2,3\}$, et avec $I = \{1,3\}$ il n'y a aucune arête.

Important ! Il faut passer le temps nécessaire et s'assurer de la bonne compréhension de ces exemples !

18. On suppose que I est tel que $G_M(I)$ est connexe et qu'il existe $\ell \in I$ et $k \notin I$ tels que $m_{\ell,k}$ et $m_{k,\ell}$ sont non nuls.
Si $m_{\ell,k} \leqslant m_{k,\ell}$, on pose $\alpha = \dfrac{m_{\ell,k}}{m_{k,\ell}}$ et on fait l'opération élémentaire sur la ligne k avec ce coefficient, sinon on pose $\alpha = \dfrac{m_{k,\ell}}{m_{\ell,k}}$ et on fait l'opération élémentaire sur la colonne k avec ce coefficient.
On note encore M' la matrice obtenue.
Montrer que $\{k,\ell\}$ est une arête de $G_{M'}\left(I \cup \{k\}\right)$ et que ce graphe est connexe.

- Reprenons les critères d'existence d'une arête de $G_{M'}\left(I \cup \{k\}\right)$:
  ✓ puisque $\ell \in I$ et $k \notin I$, on a $\ell \neq k$;
  ✓ puisque $m_{\ell,k}$ et $m_{k,\ell}$ sont non nuls et que $M \in \mathcal{ST}_r$, on a $m_{\ell,k} > 0$ et $m_{k,\ell} > 0$. Ainsi, d'après la question 17.b. :

$$m'_{\ell,k} > 0 \ ; \ m'_{k,\ell} > 0$$

Petite remarque Le caractère non nul suffit...

  ✓ $m'_{\ell,k} = m'_{k,\ell}$; en effet :
    × si on avait $m_{\ell,k} \leqslant m_{k,\ell}$:
    Dans ce cas, on a posé $\alpha = \dfrac{m_{\ell,k}}{m_{k,\ell}}$ et on a effectué l'opération sur la ligne k. D'où, puisque $\ell \neq k$:

$$\begin{aligned} m'_{k,\ell} &= \alpha m_{k,\ell} \\ &= m_{\ell,k} \\ &= m'_{\ell,k} \end{aligned}$$

l'opération n'impacte pas la ligne ℓ

× si on avait $m_{\ell,k} > m_{k,\ell}$:
Dans ce cas, on a posé $\alpha = \dfrac{m_{k,\ell}}{m_{\ell,k}}$ et on a effectué l'opération sur la colonne k. D'où, puisque $\ell \neq k$:

$$\begin{aligned} m'_{\ell,k} &= \alpha m_{\ell,k} \\ &= m_{k,\ell} \\ &= m'_{k,\ell} \end{aligned}$$

l'opération n'impacte pas la colonne ℓ

Dans les deux cas :

$$m'_{k,\ell} = m'_{\ell,k}$$

Conclusion : $\{k, \ell\}$ est une arête de $G_{M'}\big(I \cup \{k\}\big)$.

- Montrons maintenant que $G_{M'}\big(I \cup \{k\}\big)$ est connexe.
On sait que les opérations sur les lignes et colonnes définies en début de cette partie n'affectent que la ligne k, la colonne k et la diagonale.
Par conséquent, pour tout $(i,j) \in I^2$, si $\{i,j\}$ est une arête de $G_M(I)$, alors c'est aussi une arête de $G_{M'}\big(I \cup \{k\}\big)$.
Le graphe $G_{M'}\big(I \cup \{k\}\big)$ est donc constitué des sommets et arêtes du graphe $G_M(I)$ auxquels ont été rajoutés le sommet k, l'arête entre k et ℓ, ainsi que les éventuelles arêtes entre k et les autres sommets.
Considérons deux sommets de $G_{M'}\big(I \cup \{k\}\big)$ et distinguons deux cas :
  - ✱ si ces deux sommets sont dans $G_M(I)$:
  Puisque $G_M(I)$ est connexe, il existe une chaîne reliant ces deux sommets.
  - ✱ sinon, alors au moins un des deux sommets est le sommet k :
  Dans ce cas, puisque $G_M(I)$ est connexe, l'autre sommet est relié à ℓ par une chaîne ; et l'arête $\{k,\ell\}$ existe d'après ce qui précède. Il existe donc une chaîne entre ces deux sommets du graphe.

Dans tous les cas, il existe une chaîne entre ces deux sommets du graphe.

Conclusion : le graphe $G_{M'}\big(I \cup \{k\}\big)$ est connexe.

► On suppose que $M \in \mathcal{ST}_r$, $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ est ergodique dans la suite de cette partie.

19. On suppose dans cette question que M vérifie (K).

19.a. En utilisant le résultat de la question 8., établir que si I est un sous-ensemble non vide de $[\![1;r]\!]$, différent de $[\![1;r]\!]$, il existe $\ell \in I$ et $k \notin I$ tels que $m_{\ell,k}$ et $m_{k,\ell}$ sont non nuls.

Supposons que I est un sous-ensemble non vide de $[\![1;r]\!]$, différent de $[\![1;r]\!]$.
Puisque M est ergodique, il existe $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on considère ensuite, tel que pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $m^{(n)}_{i,j} > 0$.
Soit $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$ tel que $i \in I$ et $j \notin I$ (licite car I est strictement inclus dans $[\![1;r]\!]$). Puisque $m^{(n)}_{i,j} > 0$, d'après la question 8., il existe $(i_0, \dots, i_n) \in [\![1;r]\!]^{n+1}$, que l'on considère ensuite, tel que $i_0 = i$, $i_n = j$ et $\theta_M(i_0, \dots, i_n) > 0$.
On a donc :

$$m_{i,i_1} > 0 \quad ; \quad m_{i_1,i_2} > 0 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad m_{i_{n-1},j} > 0$$

Autrement dit : Il existe un chemin entre i et j, le chemin $i - i_1 - \dots - i_{n-1} - j$.

Posons maintenant :

$$r = \max\{p \in [\![0;n]\!] \ / \ i_p \in I\} \quad ; \quad \ell = i_r \quad ; \quad k = i_{r+1}$$

Vérifions que ℓ et k conviennent...

✓ Puisque $i_0 = i \in I$ et $i_n = j \notin I$, l'entier r est bien défini et on a même $r \leqslant n-1$.

✓ Par définition de r :

$$\ell \in I \quad ; \quad k \notin I$$

Pourquoi ?
• Si $i_{n-1} \in I$:
Dans ce cas, il suffit de poser $\ell = i_{n-1}$ et $k = j$. On a bien :
$$\ell \in I \ ; \ k \notin I \ ; \ m_{\ell,k} > 0$$
• Si $i_{n-1} \notin I$ et $i_{n-2} \in I$, alors on pose $\ell = i_{n-2}$ et $k = i_{n-1}$...
• ...

✓ Ensuite :

$$\begin{aligned} m_{\ell,k} &= m_{i_p,i_{p+1}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

ce qui précède

Puis, comme M est ergodique et vérifie (K), d'après la question 9.d., M est μ-réversible. Et ainsi, puisque $m_{\ell,k} \neq 0$, d'après la question 1.a. on obtient :

$$m_{k,\ell} \neq 0$$

D'où

$$m_{k,\ell} > 0$$

Autre méthode...

On reprend après avoir justifié que $m_{\ell,k} > 0$.
D'après la question 8., il existe $(j_0, \dots, j_n) \in [\![1;r]\!]^{n+1}$, que l'on considère ensuite, tel que $j_0 = k$, $j_n = \ell$ et $\theta_M(j_0, \dots, j_n) > 0$.

Puis, comme M vérifie (K) :

$$\theta_M(j_0, j_1, \dots, j_n, j_0) = \theta_M(j_0, j_n, \dots, j_0)$$

Autrement dit :

$$\theta_M(j_0, \dots, j_n) m_{j_n, j_0} = m_{j_0, j_n} \theta_M(j_n, \dots, j_0)$$

C'est-à-dire :

$$\theta_M(j_0, \dots, j_n) m_{\ell, k} = m_{k, \ell} \theta_M(j_n, \dots, j_0)$$

Mais $\theta_M(j_0, \dots, j_n) > 0$ et $m_{\ell,k} > 0$. D'où $\theta_M(j_0, \dots, j_n) m_{\ell,k} > 0$ et donc :

$$m_{k,\ell} \theta_M(j_n, \dots, j_0) > 0$$

Par conséquent :

$$m_{k,\ell} > 0$$

Petite remarque
Même raisonnement que celui mis en place dans la question 9.a..

Les entiers ℓ et k ainsi définis conviennent.

Conclusion : si I est un sous-ensemble non vide de $[\![1;r]\!]$, différent de $[\![1;r]\!]$, il existe $\ell \in I$ et $k \notin I$ tels que $m_{\ell,k}$ et $m_{k,\ell}$ sont non nuls.

19.b. On pose $I = \{1\}$. Le graphe $G_M(I)$ est alors connexe. En déduire un algorithme, composé de $r-1$ opérations élémentaires à partir de M et $I = \{1\}$, qui la transforme en une matrice M^* ergodique, vérifiant (K) et telle que $G_{M^*}\big([\![1;r]\!]\big)$ est connexe.
En déduire que M^* est symétrique.

- On sait déjà que les opérations décrites en début de partie conserve la propriété (K) (question 17.a.) et l'ergodicité (question 17.c.). Par conséquent, après une successions de telles opérations, la matrice M^* est ergodique et vérifie la propriété (K).
Concentrons-nous donc sur le reste : fournir un algorithme en $r-1$ telles opérations permettant de produire M^* telle que $G_{M^*}\big([\![1;r]\!]\big)$ est connexe.
Ce sont les questions 19.a. et 18. qui permettent de créer et valider cet algorithme :

```
I = {1}
Tant que I ≠ [[1;r]] :
    On cherche (ℓ, k) dans I × ([[1;r]] \ I) tel que m_{ℓ,k} et m_{k,ℓ} non nuls
    Si m_{ℓ,k} ⩽ m_{k,ℓ} :
        alph = m_{ℓ,k} / m_{k,ℓ}
        On effectue opCol(M,k,alph)
    Sinon :
        alph = m_{k,ℓ} / m_{ℓ,k}
        On effectue opLigne(M,k,alph)
    On rajoute k dans I.
```

- Notons, pour tout $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$, $m^*_{i,j}$ le coefficient situé en i-ème ligne et j-ème colonne de M^*.
  - ✱ Puisque M^* est ergodique et vérifie (K), d'après la question 9.d., M^* est μ-réversible, et donc, par définition :
$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ \mu_i m^*_{i,j} = \mu_j m^*_{j,i}$$
  - ✱ Puisque le choix de k en ligne 3 de l'algorithme se fait toujours dans $[\![1;r]\!] \setminus I$, à la fin de l'algorithme, k a pris chaque valeur de $[\![2;r]\!]$ une et une seule fois.
Notons $k_1, \dots, k_{r-1}$ les valeurs successives prises par la variable k dans l'algorithme. Par construction de l'algorithme :
    - × à la première étape :
$k_1 \neq 1$, $m_{1,k_1} > 0$, $m_{k_1,1} > 0$ et on obtient :
$$m^*_{1,k_1} = m^*_{k_1,1}$$
tous deux non nuls (d'après la question 17.b. itérée).
D'où, puisque M^* est μ-réversible :
$$\mu_1 m^*_{1,k_1} = \mu_{k_1} m_{k_1,1}$$
Et donc :
$$\mu_1 = \mu_{k_1}$$
    - × à la seconde étape :
$k_2 \notin \{1; k_2\}$, $m_{\ell,k_2} > 0$, $m_{k_2,\ell} > 0$, où $\ell \in \{1; k_1\}$ et on obtient :
$$m^*_{\ell,k_2} = m^*_{k_2,\ell}$$
tous deux non nuls (d'après la question 17.b. itérée).
D'où, puisque M^* est μ-réversible :
$$\mu_\ell m^*_{\ell,k_2} = \mu_{k_2} m_{k_2,\ell}$$

Et donc :

$$\mu_\ell = \mu_{k_2}$$

Ainsi, d'après la première étape, on a toujours :

$$\mu_{k_2} = \mu_1$$

× ...

× et ce jusqu'à la dernière étape, où l'on obtient :

$$\mu_{k_r} = \mu_1$$

On en déduit que les r composantes de μ sont toutes égales. Or leur somme vaut 1...
Par conséquent :

$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \dots & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Enfin, puisque M^* est μ-réversible, cela donne donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ \frac{1}{r} m^*_{i,j} = \frac{1}{r} m^*_{j,i}$$

Conclusion : $\forall (i,j) \in [\![1;r]\!]^2, \ m^*_{i,j} = m^*_{j,i}$: la matrice M^* est symétrique.

20. Réciproquement, on suppose qu'à partir de $M \in \mathcal{ST}_r$, une suite d'opérations élémentaires la transforme en une matrice symétrique M^*.
Montrer que M vérifie la propriété (K).
On sait que la matrice M^* est symétrique, donc, d'après la question **1.b.**, M^* est μ-réversible. Ainsi, d'après la question **7.b.**, M^* vérifie (K).
Or, en itérant le résultat de la question **17.a.**, la matrice M vérifie (K) si, et seulement si, la matrice M^* vérifie (K).

Important !
Il ne faut pas oublier que, depuis la question 19., la matrice M est ergodique ! L'énoncé aurait pu le rappeler ici pour éviter toute ambiguïté.

Conclusion : la matrice M vérifie (K).

21. On veut implémenter l'algorithme de la question 19.b. en **Python**.

21.a. Écrire une fonction **Python** `NonNul(M,I,J)` qui, étant donnés une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$ représentée par la matrice numpy `M` et deux ensembles non vides d'indices I et J, représentés par les listes `I` et `J`, renvoie un couple (i,j) tel que $i \in I$, $j \in J$ et $m_{i,j} \neq 0$, c'est à dire `M[i-1][j-1]` est non nul, s'il existe un tel couple et le couple $(0,0)$ sinon.
Voici :

Petite remarque
Une question simple qu'il était bon de repérer, d'autant plus que la réussite aux questions d'informatique est toujours bien récompensée...

```
1 import numpy as np
2
3 def nonNul(M,I,J):
4     r,r=np.shape(M)
5     for i in range(1,r+1): #on veut des entiers entre 1 et r
6         for j in range(1,r+1):
7             if M[i-1,j-1]!=0:
8                 return (i,j)
9     return (0,0)
```

☞ Rappel...
La fonction s'interrompt dès qu'elle rencontre le premier **return**. Ainsi, s'il existe (i,j) tel que $m_{i,j} \neq 0$, la fonction renverra le couple (i,j) sans poursuivre les boucles **for** et sans aller non-plus en ligne 9.

21.b. Compléter la fonction suivante pour qu'elle réalise l'implémentation de l'algorithme de la question 19.b. et renvoie `True` si M ergodique vérifie (K) et `False` sinon.

```
def estRev(M):
    r=np.shape(M)[0]
    I=[1]; J=[k for k in range(2,r+1)]
    while len(I) < ... :
        ell,k=NonNul(M,I,J)
        if (ell==0) or M[k-1][ell-1]*M[ell-1][k-1]==0:
            return ...
        else:
            if M[ell-1][k-1]<=M[k-1][ell-1]:
                OpLigne(M,k,M[ell-1][k-1]/M[k-1][ell-1])
            else:
                OpCol(M,k,M[k-1][ell-1]/M[ell-1][k-1])
            I.append(...)
            J.remove (...)
    return (np.transpose(M)==M).all()# teste l'égalité de deux matrices numpy
```

D'après les questions **19.b.** et **20.**, si M est ergodique, alors M^* (obtenue après l'algorithme de la question **19.b.**) est symétrique si, et seulement si, M vérifie (K). C'est ce qui justifie le programme ci-dessous :

```
1  def estRev(M):
2      r=np.shape(M)[0]
3      I=[1];  J=[k for k in range(2,r+1)]
4      while len(I) < r :
5          ell,k=NonNul(M,I,J)
6          if (ell==0) or M[k-1][ell-1]*M[ell-1][k-1]==0:
7              return False
8          else:
9              if M[ell-1][k-1]<=M[k-1][ell-1]:
10                 OpLigne(M,k,M[ell-1][k-1]/M[k-1][ell-1])
11             else:
12                 OpCol(M,k,M[k-1][ell-1]/M[ell-1][k-1])
13             I.append(k)
14             J.remove(k)
15     return (np.transpose(M)==M).all()# teste l'égalité de deux matrices numpy
```

Petite remarque

Lignes 6 et 7 : s'il est impossible de trouver un couple (ℓ, k) tel que $m_{\ell,k}$ et $m_{k,\ell}$ non nuls, alors d'après la question 19.a., M ne vérifie pas (K).

AIDE-MÉMOIRE PYTHON

Toutes les fonctions et instructions présentées ne sont pas utiles et il est possible d'utiliser d'autres fonctions ou instructions absentes de cet aide-mémoire.

Listes

- `[]` : Créer une liste vide
- `[a]*n` ou `n*(a)` : Créer une liste avec n fois l'élément `a`
- `L.append(a)` : Ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`
- `L1 + L2` : Concatène les deux listes `L1` et `L2`
- `len(L)` : Renvoie le nombre d'éléments de la liste `L`
- `L.count(a)` : Renvoie le nombre d'occurences de `a` dans la liste `L`
- `L.remove(a)` : Enlève la première occurence de la valeur `a` de la liste `L`
- `a in L` : Vaut `True` si `a` se trouve au moins une fois dans `L` et `False` sinon

Module mathématique numpy

```
import numpy as np
```

- `np.array(L)` : Transforme la liste `L` en vecteur ou matrice numpy
- `np.transpose(M)` : Renvoie la transposée de `M`
- `np.shape(M)` : Renvoie dans un couple le format de la matrice `M`

Sous module random de numpy pour la simulation probabiliste

```
import numpy.random as rd
```

- `rd.randint(a,b,[x, z])` : Simule une réalisation d'une matrice (r, s) dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme discrète $\mathcal{U}([\![a, b-1]\!])$

  Si le paramètre `[r,s]` est remplacé par `r`, cette fonction renvoie la réalisation d'un vecteur de longueur `r` correspondant à la loi en question, et si ce paramètre est omis, elles renvoient un seul coefficient suivant les mêmes contraintes.

★★★★★★★ Fin ★★★★★★★