

BSB 2019

Exercice 1 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 & 3 \times 3^n & 3 \times n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2 \times 3^n - 2^{n+1} + 3^n \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) \times 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. a) L'instruction manquante est `a=2*a+3*(i-1)`.

En effet, pour calculer le terme a_i , il faut sommer le double du terme précédent $2a_{i-1}$ avec la puissance de 3 correspondant à cet indice, *i.e.* 3^{i-1} .

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.

c) Voici le programme complété.

```

1. n=input("n?")
2. A=[2,0,1;0,3,1;0,0,3]
3. X=[2;0;1]
4. for i=1:n
5.     X=A*X
6. end
7. disp(X(1))

```

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

e) D'après les questions précédentes,

$$X_n = A^n X_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré qu'en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. a) Je calcule le produit $P \times Q$:

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $P \times Q = I_3$, j'en déduis que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule le produit $P \times M$ avant de multiplier le résultat par P^{-1} :

$$PM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4+1 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 1-1 & 3 & 1 \\ 3-3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $PMP^{-1} = A$.

c) Avant de passer à la récurrence, il me faut montrer que $M = P^{-1}AP$.

Il s'agit d'une conséquence directe de la question précédente : comme $PMP^{-1} = A$, alors $P^{-1} \times PMP^{-1} \times P = P^{-1}AP$, *i.e.* $M = P^{-1}AP$, puisque $P^{-1}P = I_3$.

Je raisonne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP = P^{-1}A^n \times AP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P^{-1}A^nP.$$

Comme je connais les matrices P^{-1} , A^n et P , il ne me reste plus qu'à calculer le produit :

$$A^nP = \begin{pmatrix} -3^n + 2^n & 0 & -2^n + 3^n - 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 3^n & 0 & 3^n - 2 \times 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} -2^n + 3^n + 3^n & 0 & -3^n + 2 \times 2^n - 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n + 3^n & 0 & -3^n + 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. a) J'ai montré à la question 2.e) que $b_k = k \times 3^{k-1}$, donc $b_{k+1} = (k+1) \times 3^k = k \times 3^k + 3^k$.
Alors

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k - 3^k &= k \times 3^k + 3^k - k \times 3^{k-1} - 3^k = k \times (3^k - 3^{k-1}) = k \times (3 \times 3^{k-1} - 3^{k-1}) \\ &= k \times 3^{k-1} \times (3 - 1) = b_k \times 2 = 2b_k. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

- b) Je reconnais la somme des $n+1$ premières puissances de 3. Alors

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1-3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

- c) Je reconnais une somme télescopique. Ici, seuls les deux termes extrêmes vont rester.
Ainsi

$$\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=0}^n b_{k+1} - \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k - \sum_{k=0}^n b_k = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

En effet, tous les termes sont présents dans les deux sommes sauf b_{n+1} qui n'est que dans la première et b_0 que dans la seconde.

Et comme $b_0 = 0$, j'obtiens bien le résultat souhaité.

- d) En rassemblant les résultats des questions précédentes, j'obtiens bien l'égalité désirée :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k3^{k-1} &= \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \times (b_{k+1} - b_k - 3^k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^n 3^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1}-1}{2} \right) = \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{1-3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. Pour calculer la limite en $-\infty$, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^x = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

J'en déduis que la représentation graphique \mathcal{C} de f admet une asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$, d'équation $y = 0$.

2. a) Je pars de l'expression $\frac{1}{1+e^{-x}}$ et je multiplie numérateur et dénominateur par e^x pour retrouver l'expression de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1 \times e^x}{(1+e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^x}{e^x + e^0} = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x).$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

- b) Grâce à cette nouvelle expression, je calcule la limite de f en $+\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 + 0 = 1 \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

J'en déduis alors que la représentation graphique \mathcal{C} de f admet une seconde asymptote horizontale, au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = 1$.

3. a) La fonction f est de la forme $f = \frac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + e^x$.
Puisque $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x \times (1 + e^x) - e^x \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

J'ai bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

- b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x)$. Ici, le signe est immédiat puisque le dénominateur est un carré et le numérateur, une exponentielle. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ et donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$f(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\frac{1}{2}$	1

- c) L'équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation devient

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Finalement l'équation de \mathcal{T} est donnée par

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

4. La convexité de f s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

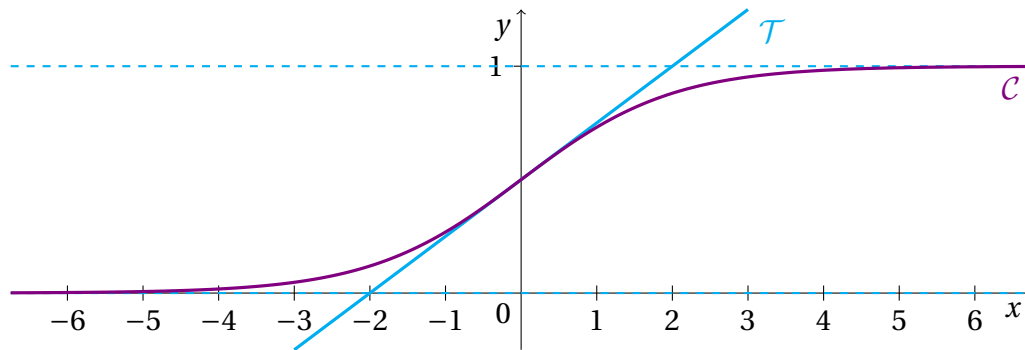
Ici l'énoncé me donne $f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et $(1+e^x) > 0$,

j'en déduis que le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $(1-e^x)$.

Or $1 - e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff 0 \geq x$, donc j'en déduis que la fonction f est convexe sur l'intervalle $] -\infty, 0[$ puis concave sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ est point d'inflexion : la tangente en ce point, calculée précédemment, traverse la courbe en ce point.

5. La courbe admet deux asymptotes horizontales, je connais l'équation de la tangente à la courbe en 0. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



6. a) La fonction h est de la forme $h = \ln(u)$ avec $u(x) = 1 + e^x$. Puisque $u'(x) = e^x$, alors

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x).$$

J'ai montré que $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f(x)$.

- b) Afin de montrer la convergence de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$,

je fixe $m \in] -\infty, 0[$ et calcule l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$ avant de faire tendre m vers $-\infty$.

Or je sais désormais que $h' = f$, donc une primitive de f est donnée par h . Ainsi

$$\int_m^0 f(x) dx = \left[h(x) \right]_m^0 = h(0) - h(m) = \ln(1+e^0) - \ln(1+e^m) = \ln(2) - \ln(1+e^m).$$

Puis

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{m \rightarrow -\infty} 1 + e^m = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0 \end{array} \right\} \text{Par composition, } \lim_{m \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^m) = 0.$$

Donc l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \ln(2) - 0 = \ln(2).$$

Exercice 3 –

1. Si la pièce amène FACE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{U}_2 et la boule tirée est rouge avec probabilité $\frac{1}{2}$. Ainsi $P_F(R_1) = \frac{1}{2}$.

Au contraire, si la pièce amène PILE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{U}_1 et la boule tirée est rouge avec probabilité 1. Autrement dit $P_{\bar{F}}(R_1) = 1$.

Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \bar{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer une boule rouge est donnée par

$$P(R_1) = P(F \cap R_1) + P(\bar{F} \cap R_1) = P(F) \times P_F(R_1) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

2. a) Si la pièce amène FACE, alors les tirages s'effectuent dans l'urne \mathcal{U}_2 .
D'après la formule des probabilités composées,

$$P_F(R_1 \cap R_2) = P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

De même,

$$P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) = P_{\bar{F}}(R_1) \times P_{\bar{F} \cap R_1}(R_2) = 1 \times 1 = 1.$$

Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \bar{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer deux boules rouges de suite est donnée par

$$P(R_1 \cap R_2) = P(F) \times P_F(R_1 \cap R_2) + P(\bar{F}) \times P_{\bar{F}}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

- b) Je cherche ici $P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{R_1 \cap R_2}(\bar{F}) = \frac{P(\bar{F} \cap R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{6}{7}.$$

Si les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené PILE est $\frac{6}{7}$.

3. **Dans cette question, une erreur s'est glissée dans l'énoncé.**

- a) Si une boule blanche est tirée en premier, alors je sais qu'il s'agit de l'urne \mathcal{U}_2 , donc $Y = 1$.
Si au contraire une boule rouge est tirée, il peut s'agir de l'urne \mathcal{U}_1 ou de \mathcal{U}_2 et il faut donc faire au moins un autre tirage.

Si ce deuxième tirage donne une boule blanche, alors encore une fois, je sais qu'il s'agit de l'urne \mathcal{U}_2 , donc $Y = 2$. Si au contraire une boule rouge est tirée, alors il peut encore s'agir de l'urne \mathcal{U}_1 ou de \mathcal{U}_2 . Il faut donc refaire un troisième tirage pour déterminer dans quelle urne les tirages ont lieu.

Au troisième tirage, si une boule blanche est tirée, alors il s'agit de l'urne \mathcal{U}_2 . Cependant, si une boule rouge est tirée alors ce ne peut être que l'urne \mathcal{U}_1 puisque seule l'urne \mathcal{U}_1 contient plus de 2 boules rouges.

Ainsi j'ai montré que le support de Y , ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y , est donné par $Y(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

- b) Comme expliqué à la question précédente, l'événement $[Y = 1]$ ne se réalise que lorsqu'une boule blanche est tirée au premier tirage. Ceci n'est possible que si la boule a été tirée dans l'urne \mathcal{U}_2 et donc que la pièce a amené FACE.

Ainsi j'ai bien montré que

$$[Y = 1] = F \cap B_1.$$

Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(Y = 1) = P(F \cap B_1) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

c) Par un raisonnement similaire à la question précedente, je peux montrer que

$$[Y = 2] = F \cap R_1 \cap B_2.$$

Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(Y = 2) = P(F \cap R_1 \cap B_2) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

d) Par complémentarité, comme $\{[Y = 1], [Y = 2], [Y = 3]\}$ forme un système complet d' v nements, j'obtiens que

$$P(Y = 3) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

Je remarque qu'il s'agit là de la somme des deux probabilités données dans l'énoncé.

e) Je connais désormais la loi de Y donc je peux facilement calculer son espérance :

$$E(Y) = 1 \times P(Y = 1) + 2 \times P(Y = 2) + 3 \times P(Y = 3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{7}{4} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exercice 4 –

1. a) Soit $n \geq 1$. Je cherche à calculer $\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 n t^{n-1} dt$. Je commence par chercher une primitive à $f_n(t) = n t^{n-1}$. Une primitive de f_n est donnée par

$$F_n(t) = n \times \frac{t^{n-1+1}}{n-1+1} = n \times \frac{t^n}{n} = t^n.$$

Finalement

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 n t^{n-1} dt = \left[t^n \right]_0^1 = 1^n - 0^n = 1 - 0 = 1.$$

- b) La fonction f_n est définie en trois morceaux.

- Pour $t < 0$ et $t > 1$, $f_n(t) = 0 \geq 0$ et pour $t \in [0, 1]$, $f_n(t) = n t^{n-1} \geq 0$, car $n \geq 1$ et $t \geq 0$. Donc f_n est positive sur \mathbb{R} .
- La fonction f_n est continue sur $] -\infty, 0[$ car constante, elle est continue sur $[0, 1[$ car polynomiale et elle est continue sur $[1, +\infty[$ car constante. Donc f_n admet au plus deux points de discontinuité.

- Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut 1.

Or $\int_{-\infty}^0 f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt$ converge et vaut 0 puisque la fonction sous l'intégrale est nulle, de même que $\int_1^{+\infty} f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt$ converge et vaut 0.

Et d'après la question précédente, $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$. Alors par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Selon les trois points précédents, f_n décrit bien une densité de probabilité.

2. a) La fonction de répartition F_n de X_n est donnée par $F_n(x) = P(X_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$.

Je raisonne par disjonction de cas :

- Si $x < 0$, alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- Si $x > 1$, alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1$.

- b) Je termine ma disjonction de cas entamée à la question précédente :

- Si $x \in [0, 1]$, alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x n t^{n-1} dt = \left[t^n \right]_0^x = x^n - 0^n = x^n$.

Ainsi j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. La variable aléatoire X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ converge. Or les deux intégrales $\int_{-\infty}^0 t f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt$ et $\int_1^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt$ convergent et valent 0. Ainsi la variable aléatoire X_n admet une espérance et

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = 0 + \int_0^1 t \times (n t^{n-1}) dt + 0 = \int_0^1 n t^n dt.$$

Je cherche à calculer $\int_0^1 n t^n dt$. Je commence par chercher une primitive à $g_n(t) = n t^n$. Une primitive de g_n est donnée par

$$G_n(t) = n \times \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \times t^{n+1}.$$

Finalement

$$\int_0^1 t f_n(t) dt = \int_0^1 n t^n dt = \left[\frac{n}{n+1} \times t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \times (1^n - 0^n) = \frac{n}{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $E(X_n) = \frac{n}{n+1}$.

4. a) La variable aléatoire Z est égale à la valeur maximale entre U_1 et U_2 . Ainsi la valeur maximale est inférieure ou égale à x si et seulement si les deux valeurs sont elles mêmes inférieures ou égales à x , *i.e.* pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$[Z \leq x] = [\max(U_1, U_2) \leq x] = [U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x].$$

En particulier,

$$P([Z \leq x]) = P([U_1 \leq x] \cap [U_2 \leq x]).$$

Puis comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont identiques et indépendantes, alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = P([Z \leq x]) = P([U_1 \leq x]) \times P([U_2 \leq x]) = P([U_1 \leq x])^2 = (F(x))^2.$$

Finalement, grâce à l'expression de la fonction F , pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Je reconnais alors la fonction de répartition F_2 de la variable aléatoire X_2 .

Et comme la fonction de répartition caractérise la loi, alors Z et X_2 suivent la même loi.

- b) Je calcule les trois probabilités demandées à l'aide de la fonction de répartition :

$$P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{3}\right) = 1 - H\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

De même,

$$P\left(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}.$$

Enfin d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[Z \geq \frac{1}{3}]} \left(Z \leq \frac{1}{2} \right) = \frac{P\left([Z \geq \frac{1}{3}] \cap [Z \leq \frac{1}{2}]\right)}{P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} \leq Z \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right)} = \frac{5}{36} \times \frac{9}{8} = \frac{5}{4 \times 8} = \frac{5}{32}.$$

c) Voici le programme complété :

```

1. U1=grand(1,1,'unf'0,1).
2. U2=grand(1,1,'unf'0,1).
3. if U1>=U2 then
4.     Z=U1
5. else
6.     Z=U2
7. end
8. disp(Z)

```

5. a) Par définition de la fonction de répartition, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(-\ln(X_n) \leq x) = P(\ln(X_n) \geq -x) = P(X_n \geq e^{-x}) \\ = 1 - P(X_n \leq e^{-x}) = 1 - F_n(e^{-x}).$$

b) Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-x} > e^{-0} = 1$.
Alors grâce au résultat de la question **2.b**.,

- Si $x < 0$, alors $e^{-x} > 1$ et $G_n(x) = 1 - F_n(e^{-x}) = 1 - 1 = 0$.

c) Je termine ma disjonction de cas entamée à la question précédente :

- Si $x > 0$, alors $0 < e^{-x} \leq 1$ par la question précédente et que $e^X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$.
Alors

$$G_n(x) = 1 - F_n(e^{-x}) = 1 - (e^{-x})^n = 1 - e^{-nx}.$$

Ainsi j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Je reconnais en G_n la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre n .

Donc Y_n suit une loi exponentielle de paramètre n , *i.e.* $Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.

d) Comme Y_n suit une loi exponentielle, alors

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad V(Y_n) = \frac{1}{n^2}.$$