BSB 2022

Exercice 1 –

Partie I – Étude d'une matrice carrée

1. a) Je calcule le produit M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Puis je compare $2M^2$ et $M + I_2$:

$$2M^2 = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien vérifié l'égalité matricielle $2M^2 = M + I_2$.

b) Je sais que la matrice M vérifie l'égalité $2M^2 = M + I_2$.
En particulier, $2M^2 - M - I_2 = 0_2$, matrice carrée nulle de taille 2.
Dès lors, un polynôme annulateur de la matrice M est donné par $2x^2 - x - 1$.

Les valeurs propres possibles pour M sont parmi les racines des polynômes annulateurs.
Je cherche donc à résoudre $2x^2 - x - 1 = 0$:
Le discriminant est donné par $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$.
Il y a donc deux racines

$$x_1 = \frac{-(-1)-3}{2\times 2} = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Les valeurs propres possibles pour M sont donc $-\frac{1}{2}$ et 1.

c) Je calcule le produit entre M et les matrices colonnes U et V :

$$MU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = U$$

et

$$MV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \times V.$$

Comme les matrices colonnes U et V sont non nulles, alors

- comme $MU = U$, U est un vecteur propre de M
  et 1 est une valeur propre de la matrice M,
- comme $MV = -\frac{1}{2}V$, V est un vecteur propre de M
  et $-\frac{1}{2}$ est une valeur propre de la matrice M.

2. a) La matrice P est une matrice carrée de taille 2. Je calcule son déterminant :
$ad - bc = 3 \times 1 - 0 \times 2 = 3 - 0 = 3$. Comme il est non nul, j'en déduis que la matrice P est inversible et son inverse est donné par

$$P^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule les produits MP et PD :

$$MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3-1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $MP = PD$.
Puis comme la matrice D est diagonale (par construction) et que la matrice P est inversible (d'après la question précédente), alors l'égalité $MP = PD$ me permet d'écrire

$$MP \times P^{-1} = PD \times P^{-1}, \qquad \textit{i.e.} \quad M = PDP^{-1}.$$

Je montre bien ainsi que la matrice M est diagonalisable.

3. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n P = PD^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 P = I_2 \times P = P \quad \text{et} \quad PD^0 = P \times I_2 = P.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$M^{n+1}P = M^n \times MP = M^n \times PD = M^n P \times D = PD^n \times D = PD^{n+1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n P = PD^n.$$

b) Comme D est une matrice diagonale, je sais que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

c) D'après la question **3.a)**, je sais que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $M^n P = PD^n$.
En particulier, $M^n = PD^n P^{-1}$. Finalement je calcule le produit $PD^n P^{-1}$:

$$PD^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

et

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie II – Étude d'un processus aléatoire

1. a) Dans chaque urne, chaque jeton a la même probabilité $\frac{1}{2}$ d'être tiré.
Puisqu'il y a deux urnes, quatre tirages sont possibles en tout :
   - Le jeton 0 est tiré dans l'urne U et le jeton 0 est tiré dans l'urne V : rien ne change, l'urne U contient toujours un jeton 0 et un jeton 1 et l'événement B_1 est vérifié.
   - Le jeton 0 est tiré dans l'urne U et le jeton 1 est tiré dans l'urne V : après échange, l'urne U contient deux jetons 1 et aucun jeton 0 et l'événement C_1 est vérifié.
   - Le jeton 1 est tiré dans l'urne U et le jeton 0 est tiré dans l'urne V : après échange, l'urne U contient deux jetons 0 et aucun jeton 1 et l'événement A_1 est vérifié.
   - Le jeton 1 est tiré dans l'urne U et le jeton 1 est tiré dans l'urne V : rien ne change, l'urne U contient toujours un jeton 0 et un jeton 1 et l'événement B_1 est vérifié.

   Ces quatre tirages étant équiprobables, j'obtiens ainsi que

$$a_1 = P(A_1) = \frac{1}{4}, \qquad b_1 = P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c_1 = P(C_1) = \frac{1}{4}.$$

   b) Soit un entier naturel $n \in \mathbb{N}$. La probabilité conditionnelle $P_{A_n}(B_{n+1})$ représente la probabilité de revenir à la configuration initiale lorsque l'urne U contient deux jetons 0. Mais alors l'urne V contient deux jetons 1 et le tirage sera nécessairement "Un jeton 0 est tiré dans l'urne U et un jeton 1 est tiré dans l'urne V", ce qui ramène bien les urnes à leur état initial avec un jeton 0 et un jeton 1 dans chacune d'entre elles.
Donc je conclus bien que $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$, et pour la même raison, $P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$.

   Pour $P_{B_n}(B_{n+1})$, le fait que l'événement B_n soit réalisé indique que les deux urnes sont dans leurs configurations initiales.
Ainsi $P_{B_n}(B_{n+1}) = P(B_1) = \frac{1}{2}$.
Finalement, d'après la formule des probabilités totales, puisque les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P(A_n)\times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)\times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)\times P_{C_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1 = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n. \end{aligned}$$

   c) D'après les explications données précédemment, puisqu'une configuration avec les deux même jetons dans chaque urne ramène toujours à la configuration initiale, alors

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0, \qquad P_{A_n}(C_{n+1}) = 0, \qquad P_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad P_{C_n}(C_{n+1}) = 0.$$

De même, puisque la réalisation de l'événement B_n indique que les deux urnes sont dans leurs configurations initiales, $P_{B_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{B_n}(C_{n+1}) = P(C_1) = \dfrac{1}{4}$.
Finalement, d'après la formule des probabilités totales, puisque les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4} b_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) \\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4} b_n. \end{aligned}$$

2. a) Pour tout entier naturel n, les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements donc

$$P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1, \qquad \textit{i.e.} \quad a_n + b_n + c_n = 1.$$

b) En réécrivant la formule obtenue à la question **1.b)** de sorte à faire apparaître $a_n+b_n+c_n$, j'obtiens bien que

$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n = a_n + b_n + c_n - \frac{1}{2} b_n = 1 - \frac{1}{2} b_n.$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit MX_n :

$$MX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{2} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Grâce à la formule de récurrence obtenue précédemment pour la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
je retrouve bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = M^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 X_0 = I_2 \times X_0 = X_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.$$

c) D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, la probabilité b_n est donnée par la seconde coordonnée de la matrice colonne $X_n = M^n X_0$.

Je connais la matrice M^n grâce à la question **3.c)** de la Partie I et $\quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Je calcule alors le produit $M^n X_0$:

$$M^n X_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $\quad b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

d) Je sais déjà que $a_0 = c_0 = 0$. $\quad$ Puis par la question **1.c)**, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = c_n = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Je remarque alors que pour $n = 0$, cette formule reste valable puisque

$$\frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{12}\big(2 + (-2)\big) = 0.$$

Ainsi pour tout enter naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Exercice 2 –

1. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $f(x) = \dfrac{1}{u(x)} + x$, avec $u(x) = 1 + e^x$.
Comme $u'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} + 1 = 1 - \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

La fonction f' ainsi obtenue est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f' = 1 - \dfrac{u}{v}$,
avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \left(1+e^x\right)^2$. Comme $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 2e^x\left(1+e^x\right)$, alors

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 - \frac{e^x \times \left(1+e^x\right)^2 - e^x \times 2e^x\left(1+e^x\right)}{\left(\left(1+e^x\right)^2\right)^2} = \frac{-e^x \times \left(1+e^x\right) \times \left(\left(1+e^x\right) - 2e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^4} \\ &= \frac{-e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3} = \frac{e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3} \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{e^x\left(e^x-1\right)}{\left(1+e^x\right)^3}$.

b) La convexité de la fonction s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde. Comme une exponentielle est toujours positive, alors $e^x > 0$ et $1 + e^x > 1 > 0$ donc $\left(1+e^x\right)^3 > 0$.
Il me reste à étudier le signe de $\left(e^x - 1\right)$:

$$e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0.$$

Ainsi j'en déduis que
- f est concave sur l'intervalle $\left]-\infty, 0\right]$, car $f''(x)$ y est négatif,
- f est convexe sur l'intervalle $\left[0, +\infty\right[$, car $f''(x)$ y est positif.

La courbe $\mathcal{C}$ admet bien un point d'inflexion, de coordonnées $\left(0, f(0)\right) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$,
car $f(0) = \dfrac{1}{1+e^0} + 0 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

c) Les variations de la fonction f' s'obtiennent en étudiant le signe de la dérivée f''.
J'ai déjà étudié le signe de f'', je peux directement établir le tableau de signe de $f''(x)$ et le tableau de variation de f' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$		$\nearrow$	

J'évalue $f'(x)$ en $x = 0$: $f'(0) = \dfrac{1 + e^0 + e^{2\times 0}}{\left(1+e^0\right)^2} = \dfrac{1+1+1}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$.

Je retrouve bien la valeur annoncée par l'énoncé. En outre, il s'agit du minimum de la fonction f' et ce minimum est positif. J'en conclus donc que la fonction f' est toujours strictement positive et donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Je rappelle que

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Alors

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = +\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} + x = -\infty.$$

b) Je connais les limites de f et sais que la fonction est strictement croissante.
Je dresse alors aisément le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. a) Je commence par calculer la différence : $f(x) - x = \dfrac{1}{1+e^x} + x - x = \dfrac{1}{1+e^x}$.
Or j'ai déjà calculé cette limite en $+\infty$ à la question **2.a)** :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ se réduit au voisinage de $+\infty$: la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b) Je raisonne de la même manière qu'à la question précédente.
Je commence par calculer la différence : $f(x) - \big(x+1\big) = \dfrac{1}{1+e^x} + x - x - 1 = \dfrac{1}{1+e^x} - 1$.
Or j'ai déjà calculé la limite de $\dfrac{1}{1+e^x}$ en $-\infty$ à la question **2.a)**. Alors par somme,

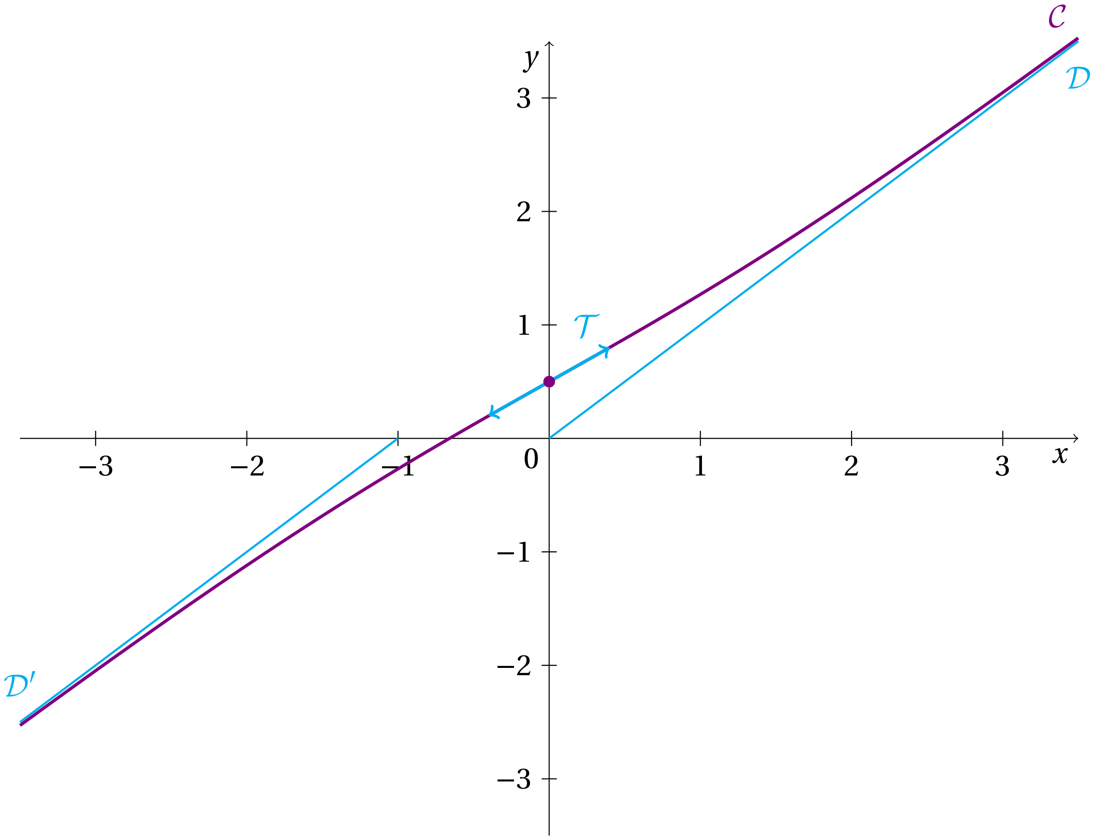
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \big(x+1\big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Puisque la limite est nulle, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}'$ d'équation $y = x+1$ se réduit au voisinage de $-\infty$: la droite $\mathcal{D}'$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.

c) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$. Je connais déjà $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(0) = \dfrac{3}{4}$.
Ainsi l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

d) Voici le graphe des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}$.



4. a) Le fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante (d'après la question **1.c)**) sur $\mathbb{R}$. J'ai aussi montré que la limite de $f(x)$ en $-\infty$ est $-\infty$ et que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$.
Ainsi comme $0 \in \left]-\infty, +\infty\right[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, je peux déduire qu'il existe une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, de l'équation $f(x) = 0$.

b) Je calcule $f(-1)$ et $f(0)$: $f(-1) = \dfrac{1}{1+e^{-1}} - 1 = \dfrac{e}{e+1} - 1 = -\dfrac{1}{e+1} < 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2} > 0$.
Comme $f(\alpha) = 0$, que $f(-1) \leqslant 0 \leqslant f(0)$ et que f est croissante, j'en déduis bien que

$$-1 \leqslant \alpha \leqslant 0.$$

c) Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y=1/(1+exp(x))+x
endfunction
a=-1, b=0
while b-a>10∧(-3)
    c=(a+b)/2
    if f(c)*f(a)<0 then
        b=c
    else
        a=c
    end
end
disp(a)
```

Exercice 3 –

1. a) Lors de la première séquence, l'urne contient deux boules rouges et une boule bleue. Donc comme les boules sont tirées au hasard,

$$P(B_1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(R_1) = \frac{2}{3}.$$

b) D'après la formules des probabilités totales, comme les événements B_1 et R_1 forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} & P(B_2) = P\big(B_1 \cap B_2\big) + P\big(R_1 \cap B_2\big) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) \\ \text{et} \quad & P(R_2) = P\big(B_1 \cap R_2\big) + P\big(R_1 \cap R_2\big) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(R_2). \end{aligned}$$

Mais selon le premier tirage, la configuration de l'urne change et les probabilités conditionnelles évoluent.

- Si B_1 est réalisé, l'urne reste dans son état initial et

$$P_{B_1}(B_2) = P(B_1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{B_1}(R_2) = P(R_1) = \frac{2}{3}.$$

- Si R_1 est réalisé, la boule rouge tirée est remplacée par une boule bleue et l'urne contient alors une boule rouge et deux boules bleues. Alors

$$P_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{3}.$$

Finalement en réinjectant ces valeurs, j'obtiens que

$$P(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \quad \text{et} \quad P(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

c) Je cherche $P_{B_2}(R_1)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{B_2}(R_1) = \frac{P\big(R_1 \cap B_2\big)}{P(B_2)} = \frac{P(R_1) \times P_{R_1}(B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}.$$

2. a) D'après les réflexions de la question précédente, l'urne n'admet que deux configurations possibles après la première séquence.

- Si la boule bleue est tirée, l'urne reste dans son état initial et $Y_1 = 2$.
- Si une boule rouge est tirée, cette boule rouge est remplacée par une boule bleue et alors $Y_1 = 1$.

Ainsi le support de Y_1 est donné par $Y_1(\Omega) = \big\{1, 2\big\}$.

b) D'après la disjonction de cas effectuée à la question précédente et les probabilités obtenues à la question **1.a)**, alors

$$P(Y_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(Y_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{3}.$$

c) Pour calculer l'espérance de Y_1, j'utilise la définition :

$$E(Y_1) = 1 \times P(Y_1 = 1) + 2 \times P(Y_1 = 2) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

3. a) Après deux séquences, il peut y avoir dans l'urne :
   - deux boules rouges, si la boule bleue a été tirée deux fois,
   - une seule boule rouge, si une boule bleue et une boule rouge ont été tirées, peu importe l'ordre,
   - zéro boule rouge si les deux boules rouges ont été tirées successivement.

   Ainsi le support de Y_2 est bien donné par $Y_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

   b) L'intersection des événements $[Y_1 = 2]$ et $[Y_2 = 2]$ signifie que le nombre de boules rouges reste constant égal à deux, c'est-à-dire que la boule bleue a été tirée lors des deux tirages. Ainsi
$$P\big([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 2]\big) = P\big(B_1 \cap B_2\big) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

   c) En reprenant le même schéma explicatif, alors j'obtiens que
$$P\big([Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 1]\big) = P\big(B_1 \cap R_2\big) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$
$$P\big([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1]\big) = P\big(R_1 \cap B_2\big) = P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$
$$P\big([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 0]\big) = P\big(R_1 \cap R_2\big) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

   L'événement $[Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]$ est impossible puisqu'il n'est jamais ajouté de boule rouge, de même que l'événement $[Y_1 = 2] \cap [Y_2 = 0]$ puisque les boules rouges sont retirées une par une.
   Ceci finit donc de justifier le tableau de la loi conjointe du couple $\big(Y_1, Y_2\big)$.

4. a) Pour déduire la loi marginale de Y_2, il me suffit de sommer les probabilités par colonnes :
$$P(Y_2 = 0) = \frac{2}{9} + 0 = \frac{2}{9}, \qquad P(Y_2 = 1) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(Y_2 = 2) = \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}.$$
   Son espérance est donnée par
$$E(Y_2) = 0 \times P(Y_2 = 0) + 1 \times P(Y_2 = 1) + 2 \times P(Y_2 = 2) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

   b) Pour calculer l'espérance de $Y_1 Y_2$, j'utilise la loi conjointe : en omettant les termes nuls,
$$E\big(Y_1 Y_2\big) = 1 \times 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times 2 \times \frac{1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

   c) Pour déterminer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2)$, j'utilise la formule de König-Huygens et les valeurs calculées précédemment :
$$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = E\big(Y_1 Y_2\big) - E(Y_1)E(Y_2) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{36}{27} - \frac{32}{27} = \frac{4}{27}.$$

5. a) La ligne `9.` correspond à l'expérience dans une urne ne possédant plus qu'une boule rouge. Alors celle-ci est remplacée avec une probabilité $\frac{1}{3}$.
   D'où la ligne de script suivante :
```
if rand()<1/3 then r=0.
```

   b) Pour $n = 2$, la variable `r` affichée correspond à la valeur de la variable aléatoire Y_2.

   c) Lorsque $r = 0$, l'urne ne contient plus aucune boule rouge, donc trois boules bleues, et cette configuration ne peut plus subir de changements (puisque seule une boule rouge peut être remplacée par une boule bleue).

Exercice 4 –

1. a) a est un réel positif et x un réel tel que $x \geqslant a$. Je cherche à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

   Une primitive de $h(t) = e^{-2t}$ est donnée par $H(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-2t}$. Donc

$$\int_a^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_a^x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2a} = \frac{1}{2}\left(e^{-2a} - e^{-2x}\right).$$

   b) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Il me reste alors à étudier la limite de la quantité obtenue à la question précédente lorsque x tend vers $+\infty$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$.

   Je peux alors déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(e^{-2a} - 0\right) = \frac{1}{2}e^{-2a}$, ce qui indique que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{-2a}$.

2. La fonction f est définie en deux morceaux :
   - Pour $t < a$, $f(t) = 0 \geqslant 0$ et pour $t \geqslant a$, $f(t) = 2e^{2a}e^{-2t} \geqslant 0$ comme produits de facteurs positifs ($e^X > 0$). Donc la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.
   - Sur $]-\infty, a[$, $f(t) = 0$ est continue car constante et sur $]a, +\infty[$, $f(t) = 2e^{2a}e^{-2t}$ est continue comme produits de fonctions continues.
     La fonction f admet donc au plus un unique point de discontinuité sur $\mathbb{R}$.
   - Il me reste à montrer que l'intégrale converge et vaut 1. Par la relation de Chasles, sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} 2e^{2a}e^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$

     Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0, puisque la fonction sous l'intégrale est nulle.
     Et par linéarité, $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2e^{2a}e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 2e^{2a} \times \int_a^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ qui converge d'après la question **1.b)**. Finalement l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2e^{2a} \times \int_a^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 2e^{2a} \times \frac{1}{2}e^{-2a} = 1.$$

     Ainsi j'ai bien montré que l'intégrale converge et vaut 1.

   Grâce aux trois points précédents, je conclus que f décrit bien une densité de probabilité.

3. a) La fonction de répartition F de X est donnée par $\displaystyle F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Alors pour $x < a$, $\displaystyle F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

   b) Pour $x \geqslant a$, la fonction de répartition devient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{a} 0\,\mathrm{d}t + \int_a^x 2e^{2a}e^{-2t}\,\mathrm{d}t = 2e^{2a} \times \int_a^x e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2e^{2a} \times \frac{1}{2}\left(e^{-2a} - e^{-2x}\right) = 1 - e^{2a-2x} = 1 - e^{-2(x-a)}. \end{aligned}$$

   J'ai ainsi montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geqslant a. \end{cases}$

4. a) Par définition de la fonction de répartition, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x) = P(Y \leqslant x) = P(X - a \leqslant x) = P\big(X \leqslant x + a\big) = F(x+a).$$

b) En raisonnant par disjonction de cas,

- si $x < 0$, alors $x + a < a$ et $G(x) = F(x+a) = 0$,
- si $x \geqslant 0$, alors $x - a \geqslant a$ et $G(x) = F(x+a) = 1 - e^{-2(x+a-a)} = 1 - e^{-2x}$.

Ainsi j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

c) Je reconnais en G la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 2. Puisque la fonction de répartition caractérise la loi, je déduis que la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.
Alors son espérance et sa variance sont données par

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

d) Par définition de la variable aléatoire Y, $Y = X - a \iff X = Y + a$. Ainsi je peux me servir de l'espérance et de la variance de Y pour déterminer celles de X. Par linéarité,

$$E(X) = E(Y+a) = E(Y) + a = \frac{1}{2} + a \quad \text{et} \quad V(Y) = V(Y+a) = V(Y) = \frac{1}{4}.$$

5. a) Je calcule l'espérance de Z_n. Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X_k) = E(X) = \dfrac{1}{2} + a$, alors par linéarité

$$E\big(Z_n\big) = E\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times n \times \left(\frac{1}{2} + a\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + a = a.$$

Ainsi j'ai bien montré que Z_n est un estimateur sans biais de a.

b) Je calcule la variance $V(Z_n)$. Comme les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors

$$V\big(Z_n\big) = V\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4n}.$$

Et comme l'estimateur Z_n est sans biais, le risque quadratique est donné par la variance. Ainsi $r(Z_n) = V(Z_n) = \dfrac{1}{4n}$.

c) Selon la formule de l'estimateur $Z_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, l'instruction à utiliser pour obtenir une estimation de a est

```
mean(X)-1/2.
```