

CORRIGÉ

EXERCICE 1.

1. (a) La fonction f est définie sur \mathbb{R} et elle est impaire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

La courbe \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à l'origine O .

- (b) Etant donné que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0,$$

on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. En outre, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \times \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

et d'après les croissances comparées, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. La courbe \mathcal{C}_f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) .

2. (a) $f'(x) = e^x - (-1)e^{-x} = e^x + e^{-x}$

- (b) D'après le calcul précédent, $f'(x)$ est strictement positif sur \mathbb{R} (comme somme de deux réels strictement positifs) donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (par imparité).

- (c) $f(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$ donc, par stricte croissance de f sur \mathbb{R} , on peut affirmer que

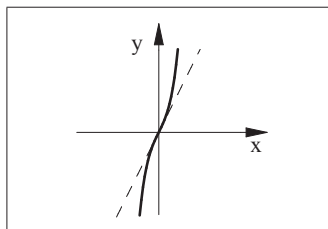
$$f(x) > f(0) = 0 \quad \text{quand} \quad x > 0$$

$$f(x) < f(0) = 0 \quad \text{quand} \quad x < 0.$$

- (d) D'après le cours, on a $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x$.

3. (a) Etant donné que f' est dérivable sur \mathbb{R} et que $f''(x) = e^x - e^{-x} = f(x)$ est positive sur \mathbb{R}_+ et négative sur \mathbb{R}_- , on peut affirmer que f est concave sur \mathbb{R}_- et convexe sur \mathbb{R}_+ .

- (b) En trait gras, \mathcal{C}_f et en trait fin T (puisque f est concave sur \mathbb{R}_- , \mathcal{C}_f est au dessus de sa tangente T sur \mathbb{R}_- et puisque f est convexe sur \mathbb{R}_+ , \mathcal{C}_f est en dessous de sa tangente T sur \mathbb{R}_+)



4. (a) La fonction f est continue (car dérivable) sur \mathbb{R} , strictement sur \mathbb{R} donc elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur $\left] \lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f \right[=]-\infty, +\infty[$. Comme $n \in]-\infty, +\infty[$, on peut affirmer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution. En outre, comme $f(0) = 0$, on peut affirmer que 0 est la seule solution de $f(x) = 0$ c'est-à-dire que $u_0 = 0$.

(b) Un calcul direct montre que

$$f(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - \frac{1}{e^{\ln(n)}} = n - \frac{1}{n} < n = f(u_n)$$

donc, par stricte croissance de f , on peut affirmer $\ln(n) < u_n$. Etant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, on obtient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

(c) Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = n^2 - 4(-1) = n^2 + 4 > 0$ donc l'équation admet deux solutions réels $\alpha_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} > 0$ et $\beta_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2} < \frac{n - \sqrt{n^2}}{2} = 0$

(d) A l'aide du changement de variable $t = e^x$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = n &\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = n \Leftrightarrow t - \frac{1}{t} = n \Leftrightarrow t^2 - 1 = nt \Leftrightarrow t^2 - nt - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha_n \\ \text{ou} \\ t = \beta_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \alpha_n > 0 \\ \text{ou} \\ \underbrace{e^x}_{>0} = \beta_n < 0 \end{cases} \text{ impossible} \Leftrightarrow e^x = \alpha_n \Leftrightarrow x = \ln(\alpha_n) \end{aligned}$$

$$\text{donc } u_n = \ln\left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right).$$

EXERCICE 2.

PARTIE I.

1. Un calcul direct montre que $N^2 = 0$ donc $\forall k \geq 2, N^k = N^2 N^{k-2} = 0 N^{k-2} = 0$.

2. (a) Un calcul direct montre que

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = a \\ -x - 2z = b \\ y = c \end{cases} \stackrel{2(1)+(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2a + b \\ y = c \\ z = -a - b \end{cases}$$

donc la matrice P est bien inversible et l'on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Un calcul direct montre que

$$P^{-1}\Delta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}\Delta P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

(c) En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} (de part et d'autre de l'égalité), on a : $\Delta = PDP^{-1}$.

- (d) Comme $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = \Delta^0$, l'initialisation $n = 0$ est vérifiée. Pour l'hérédité, si la formule est vraie au rang n alors

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n \Delta = PD^n P^{-1} P D P^{-1} = PD^n D P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

ce qui démontre la propriété au rang $n + 1$ et démontre la formule pour tous les rangs n .

- (e) Comme D est une matrice diagonale, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et un calcul direct montre que

$$PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^n = PD^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 & 0 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Un calcul direct montre que

$$N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N = \Delta N$$

- (b) Puisque $A = N + \Delta$ et que N, Δ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton donc

$$\begin{aligned} A^n &= (N + \Delta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{N^k}_{=0 \text{ si } k \geq 2} \Delta^{n-k} = \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} \end{aligned}$$

- (c) D'après la question précédente, on a

$$A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n & 0 \\ 2 - 2^{n+1} & -2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2^n - 1 & -n \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PARTIE II.

- (a) La suite $(z_n)_n$ est constante donc $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = z_0 = 1$.
 - (b) $x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1, \quad y_{n+1} = -2x_n + 2$.
- (a) Pour tout entier n , on a

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = (3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = x_n + y_n + 1 = r_n + 1$$

donc la suite $(r_n)_n$ est arithmétique de raison 1.

- (b) On peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = r_0 + n \cdot 1 = (1 + 1) + n = n + 2 \Leftrightarrow x_n + y_n = n + 2.$$

3. (a) Pour tout entier n , on a

$$s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2(3x_n + y_n - 1) + (-2x_n + 2) = 4x_n + 2y_n = 2s_n$$

donc la suite $(s_n)_n$ est géométrique de raison 2.

- (b) On peut alors écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = s_0 2^n = (2 * 1 + 1) 2^n = 3 * 2^n \Leftrightarrow 2x_n + y_n = 3 * 2^n.$$

4. En utilisant les questions 2 et 3, déterminer x_n et y_n en fonction de n . On dispose du système suivant

$$\begin{cases} x_n + y_n = n + 2 \\ 2x_n + y_n = 3 * 2^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = 3 * 2^n - n - 2 & (2) - (1) \\ y_n = 2n + 4 - 3 * 2^n & 2(1) - (2) \end{cases}$$

EXERCICE 3.

Partie I.

1. (a) $P(E) = 0,2$; $P(A) = 0,8$; $P_E(T) = 0,5$; $P_A(T) = 0,375$.

- (b) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{E, A\}$:

$$P(T) = P_E(T)P(E) + P_A(T)P(A) = 0,4.$$

- (c) On utilise la formule de Bayes :

$$P_T(E) = \frac{P(E \cap T)}{P(T)} = \frac{P(E) P_E(T)}{P(T)} = 0,25.$$

2. (a) X représente le nombre de succès (un appel concerne du petit électro ménager) dans une série de 10 épreuves identiques et indépendantes, donc X suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,2$ c'est-à-dire

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, 10\} \text{ et } \forall k \in \{0, \dots, 10\}, \quad P(X = k) = \binom{10}{k} (0,2)^k (0,8)^{10-k}.$$

- (b) D'après le cours on peut affirmer que

$$E(X) = np = 10 * 0,2 = 2, \quad V(X) = np(1-p) = 2 * 0,8 = 1,6.$$

3. (a) Comme précédemment, on peut écrire que Y suit la loi $\mathcal{B}(600; 0,4)$

- (b) D'après le cours on sait que la loi normale a pour paramètre

$$m = np = 600 * 0,4 = 240, \quad \sigma^2 = np(1-p) = 240 * 0,6 = 144$$

- (c) En posant $Z^* = \frac{Z - m}{\sigma} = \frac{Z - 240}{12}$ (variable centrée réduite associée à Z), on a :

$$P(Y \leq 252) \simeq P(Z \leq 252) = P\left(Z^* \leq \frac{252 - 240}{12}\right) = P(Z^* \leq 1) \simeq 0,8413$$

Partie II.

1. (a) On pose $u = x$, $v' = e^{-x}$ donc $u' = 1$, $v = -e^{-x}$ (par exemple) donc on a :

$$\begin{aligned} \int_0^A x e^{-x} dx &= [x(-e^{-x})]_0^A - \int_0^A 1(-e^{-x}) dx = -Ae^{-A} + \int_0^A e^{-x} dx \\ &= -Ae^{-A} + [-e^{-x}]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1. \end{aligned}$$

D'après les croissances comparées, on peut affirmer que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x e^{-x} dx = 1$.

- (b) L'intégrale impropre : $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ est convergente et sa valeur vaut 1.

2. (a) La fonction f est continue sur \mathbb{R}^* (car les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto x e^{-x}$ sont continues respectivement sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^*). En outre, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-x} = 0$$

donc on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ c'est-à-dire que f est continue en 0.

- (b) La fonction f est continue et positive sur \mathbb{R} , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1 (question

1.b), l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$ converge et vaut 0 donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 = 1$$

donc f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire.

3. On suppose que lors d'un appel au standard, le temps de celui-ci en minutes est une variable aléatoire M à densité dont une densité est f .

- (a) Par définition, on a pour tout réel t :

$$F(t) = P(M \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

Premier cas : si $t < 0$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, t] \subset \mathbb{R}_-^*$ donc $F(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$.

Second cas : si $t \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^t f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^t x e^{-x} dx \\ &= 0 + t e^{-t} - e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t} (t + 1). \end{aligned}$$

(b) i) $P(M \leq 4) = F(4) = 1 - 5 * e^{-4}$. iii) $P(2 \leq M \leq 4) = F(4) - F(2) = 3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}$.

$$\begin{aligned} \text{iii) } P_{(M \geq 2)}(M \leq 4) &= \frac{P((M \leq 4) \cap (M \geq 2))}{P(M \geq 2)} = \frac{P(2 \leq M \leq 4)}{1 - P(M < 2)} \\ &= \frac{3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}}{1 - (1 - 3 * e^{-2})} = \frac{3 * e^{-2} - 5 * e^{-4}}{3 * e^{-2}} = 1 - \frac{5}{3 * e^2} \end{aligned}$$

4. Soit $A \geq 0$, en utilisant l'intégration par parties suivante $u = x^2$, $v' = e^{-x}$, $u' = 2x$, $v = -e^{-x}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^A x f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 \underbrace{x f(x)}_{=0} dx + \int_0^A x f(x) dx = \int_0^A x f(x) dx = \int_0^A x^2 e^{-x} dx \\ &= [x^2 (-e^{-x})]_0^A - \int_0^A 2x (-e^{-x}) dx = -A^2 e^{-A} + 2 \int_0^A x e^{-x} dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -0 + 2 * 1 = 2 \end{aligned}$$

d'après les croissances comparées et la question 1.b donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge et vaut 2. Par conséquent, M admet une espérance qui vaut 2.

5. Le coût moyen d'un appel pour un client vaut $E(Z) = 1 + 0,2E(M)$ (par linéarité de l'espérance) = 1,4 euros.