

**CORRIGÉ**

**EXERCICE 1**

1. Soient  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  tels que  $PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ -x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b & (1) - (2) \\ y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b & (1) + (2) \end{cases} \Leftrightarrow$

$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} Y$  donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. (a)  $P^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

(b) Puisque  $B$  est diagonale, on a  $B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ .

(c) Commençons par remarquer que  $P^{-1}AP = B \Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$ . Pour tout entier  $n$ , posons  $(\mathcal{H}_n)$  : «  $A^n = P B^n P^{-1}$  ». **Initialisation**  $n = 0$ . On a  $A^0 = I_2$  et  $P B^0 P^{-1} = P I_2 P^{-1} = P P^{-1} = I_2$  d'où  $A^0 = P B^0 P^{-1}$  donc  $(\mathcal{H}_0)$  est vraie. **Hérédité**. Supposons  $(\mathcal{H}_n)$  pour un entier  $n$  alors :  $A^{n+1} = A^n A = P B^n P^{-1} P B P^{-1} = P B^n I_2 B P^{-1} = P B^n B P^{-1} = P B^{n+1} P^{-1}$  ce qui démontre  $(\mathcal{H}_{n+1})$  et achève la récurrence. Un calcul direct nous donne  $P B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ -1 & 2^n \end{pmatrix}$ ,  $A^n =$

$P B^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} 2^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} 2^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. (a) Pour tout entier  $n$ , posons  $(\mathcal{H}_n)$  : «  $u_n \geq 1$  ». **Initialisation**  $n = 0$ . On a  $u_0 = 2 \geq 1$  donc  $(\mathcal{H}_0)$  est

vraie. **Hérédité**. Supposons  $(\mathcal{H}_n)$  pour un entier  $n$  alors :  $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - 1 = \frac{\overbrace{2(u_n - 1)}^{\geq 0}}{\underbrace{u_n + 3}_{\geq 0}} \geq$

$0 \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$  ce qui démontre  $(\mathcal{H}_{n+1})$  et achève la récurrence.

(b)  $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 3} = \frac{\overbrace{(1 - u_n)}^{\leq 0} \overbrace{(1 + u_n)}^{\geq 0}}{\underbrace{u_n + 3}_{\geq 0}} \leq 0$  donc la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

(c) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.

(d) Puisque  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$  alors  $\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3L + 1}{L + 3}$  et  $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$  donc en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'égalité  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$ , on obtient  $L = \frac{3L + 1}{L + 3} \Leftrightarrow L^2 + 3L = 3L + 1 \Leftrightarrow L^2 = 1 \Leftrightarrow L = \pm 1$ . D'autre part, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$  donc en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient que  $L \geq 1$  d'où  $L = 1$ .

4. (a) Pour tout entier  $n$ , posons  $(\mathcal{H}_n)$  : «  $u_n = \frac{a_n}{b_n}$  ». **Initialisation**  $n = 0$ . On a  $u_0 = 2$  et  $\frac{a_0}{b_0} = \frac{2}{1} = 2$

d'où  $u_0 = \frac{a_0}{b_0}$  donc  $(\mathcal{H}_0)$  est vraie. **Hérédité**. Supposons  $(\mathcal{H}_n)$  pour un entier  $n$  alors :  $u_{n+1} =$

$\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} = \frac{\frac{3a_n}{b_n} + 1}{\frac{a_n}{b_n} + 3} = \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3b_n} = \frac{3a_n + b_n}{a_n + 3b_n} = \frac{2a_{n+1}}{2b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$  ce qui démontre  $(\mathcal{H}_{n+1})$  et achève la

récurrence.

(b) On a  $U_{n+1} = AU_n$  donc  $U_n = A^n U_0$ .

(c) Un calcul direct donne

$$U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2} \\ b_n = \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{\frac{3}{2}2^n + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}2^n - \frac{1}{2}} = \frac{2^n \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \right)}{2^n \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right)} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

:

## EXERCICE 2

1. (a)  $g'(x) = 6x^2 - 6 * \frac{1}{x} = \frac{6}{x} (x^3 - 1)$

(b)  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ . En outre, on a  $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$  donc le

$x$	0	$\frac{1}{x}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$			$\searrow$	$\nearrow$
			1	

tableau de variations de  $g$  est donné par

(c) D'après le tableau précédent, on peut affirmer que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

2. (a) Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , on peut affirmer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln(x) * \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$ .  
D'autre part, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - \infty = -\infty$ . D'après les croissances comparées,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

(b)  $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{3 \ln(x)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$  donc  $a = 2$ .  $f(x) - 2x = \frac{3 \ln(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc  $b = 0$ .

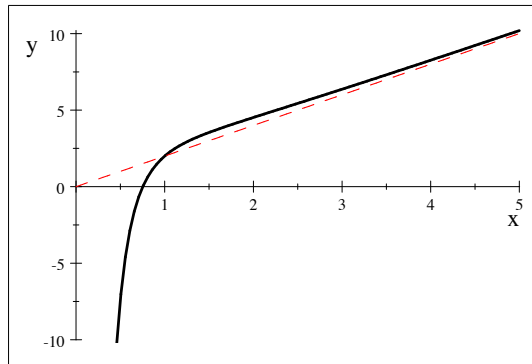
(c) On a  $(\mathcal{A}) : y = 2x$  et  $f(x) - 2x = \frac{3 \ln(x)}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$  donc  $(\mathcal{A})$  est au dessus de  $(\mathcal{C}_f)$  si et seulement si  $x \geq 1$ .

3. (a)  $f'(x) = 2 + \frac{3 * x^2 - 3 \ln(x) (2x)}{x^4} = 2 + \frac{x(3 - 6 \ln(x))}{x^4} = 2 + \frac{3 - 6 \ln(x)}{x^3} = \frac{2x^3 + 3 - 6 \ln(x)}{x^3} = \frac{g'(x)}{x^3}$

(b) Puisque  $g'$  est positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $x$  est positif sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que  $f'$  est positive également sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi le tableau de variations de  $f$  est donné par :

$x$	0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$		

(c) En gras,  $(\mathcal{C}_f)$  et en pointillé  $(\mathcal{A})$ .



4. (a) La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[$ . Puisque  $2n \in ]-\infty, +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 2n$  admet bien une et une seule solution sur  $]0, +\infty[$ .
- (b) Par définition,  $f(x_n) = 2n$ ,  $f(1) = 2$  et  $f(n) = 2n + \frac{3 \ln(n)}{n^2}$  donc  $f(1) \leq f(x_n) \leq f(n) \Rightarrow 1 \leq x_n \leq n$  puisque  $f$  est strictement croissante.
- (c)  $f(x_n) = 2n \Leftrightarrow 2x_n + \frac{3 \ln(x_n)}{x_n^2} = 2n \Leftrightarrow \frac{x_n}{2n} + \frac{3 \ln(x_n)}{2n(x_n)^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3 \ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$
- (d) Comme on a  $1 \leq x_n \leq n \Rightarrow \begin{cases} \ln(1) \leq \ln(x_n) \leq \ln(n) \\ n \leq n(x_n)^2 \leq n(n)^2 = n^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \ln(x_n) \leq \ln(n) : (1) \\ \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n(x_n)^2} \leq \frac{1}{n} : (2) \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ .
- (e) D'après les croissances comparées, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$  donc le théorème d'encadrement justifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$ .

### EXERCICE 3

#### I. Probabilités conditionnelles.

$$1. P(D) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad P(\overline{D}) = 1 - P(D) = \frac{19}{20}, \quad P_D(\overline{A}) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}, \quad P_D(A) = 1 - P_D(\overline{A}) = \frac{1}{10},$$

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{1}{100} = \frac{1}{100}.$$

$$2. P(A \cap D) = P(D) P_D(A) = \frac{1}{20} * \frac{1}{10} = \frac{1}{200} = 0,005, \quad P(A \cap \overline{D}) = P(\overline{D}) P_{\overline{D}}(A) = \frac{19}{20} * \frac{4}{5} = \frac{19}{25} = 0,760.$$

3. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $(D, \overline{D})$ , on obtient :  $P(A) = P(A \cap D) + P(A \cap \overline{D}) = 0,765$ .

$$4. \text{ Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle } P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{0,005}{0,765} \approx 0,006.$$

#### II. Loi binomiale.

1. On répète 10 fois la même expérience (« prélever un appareil »), chaque expérience étant indépendante l'une de l'autre,  $X$  représente le nombre de succès (« appareil sans défaut ») et la probabilité du succès est  $p = 1 - \frac{5}{100} = \frac{95}{100}$  donc  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(10, p)$  d'où  $X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket, \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$

- Il s'agit de la probabilité  $P(X = 10) = p^{10}$ .
- Il s'agit de la probabilité  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - p^{10}$ .

### III. Etude d'une densité de probabilité.

- $f$  est évidemment continue sur  $\mathbb{R}_-$  et sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2e^{-t} - 2e^{-2t}) = 2e^0 - 2e^0 = 0$ . Ainsi  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$  et  $f(0) = 0$  d'où  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$  c'est-à-dire que  $f$  est continue en 0 donc sur  $\mathbb{R}$ .
- Il est immédiat que  $\forall t \leq 0$ ,  $f(t) = 0 \geq 0$ . D'autre part, pour  $t \geq 0$ , on a  $f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} = 2(e^{-t} - e^{-2t}) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-t} \geq e^{-2t} \Leftrightarrow -t \geq -2t \Leftrightarrow 2t - t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$  donc  $f(t) \geq 0$  pour  $t \geq 0$ .
- $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (2e^{-t} - 2e^{-2t}) dt = [-2e^{-t} + e^{-2t}]_0^x = -2e^{-x} + e^{-2x} + 2 - 1 = 1 + e^{-2x} - 2e^{-x}$
- D'après le calcul précédent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 1 + 0 - 2 * 0 = 1$  donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge et vaut 1.
- La fonction  $f$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} f$  converge et vaut 1 donc  $f$  est une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $T$ .

### IV. Une variable à densité.

- Puisque  $f$  est une densité de  $T$ , on a pour  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 \underbrace{f}_{=0} + \int_0^x f = 1 + e^{-2x} - 2e^{-x} = 1 + (e^{-x})^2 - 2e^{-x} = (1 - e^{-x})^2$$

- Un calcul direct nous donne  $F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1 - e^{-x})^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . En effet, puisque  $x$  est positif, on a  $e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \geq 0$ . Poursuivons le calcul :

$$1 - e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- En suivant l'indication proposée, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(t) dt &= \int_0^x t(2e^{-t} - 2e^{-2t}) dt = [t(-2e^{-t} + e^{-2t})]_0^x - \int_0^x (-2e^{-t} + e^{-2t}) dt \\ &= x(-2e^{-x} + e^{-2x}) - \left[2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^x = x(-2e^{-x} + e^{-2x}) - \left(2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- D'après le calcul précédent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x tf(t) dt = \frac{3}{2}$  (d'après les croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0$ ) donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^{+\infty} tf(t) dt$  converge et vaut  $\frac{3}{2}$ . Par conséquent,  $T$  admet une espérance valant  $\frac{3}{2}$ .