2022

ANNALES

Mathématiques T

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

Option Technologique

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

ÉVALUATION

- Les deux exercices sont de valeur sensiblement égale dans le barème.
- La moitié des points sont destinés au problème.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) Pour tout réel x et tout entier naturel k non nul, on a

$$t_k(x) = \frac{x^k}{k!} = \frac{x \cdot x^{k-1}}{k \cdot (k-1)!}$$

Donc $t_k(x) = \dfrac{x}{k} t_{k-1}(x)$

(b)
```
function S = f(n,x)
    t = 1 // t = t_0(x)
    S = 1 // S = f(0,x)
    for k = 1:n
        t = t * x / k
        S = S + t
    end
endfunction
```

2. La fonction f_n est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = f_{n-1}(x)$.
Or $\forall x \geqslant 0,\ f_{n+1}(x) \geqslant 1 > 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) > 0$.
Ainsi, f_n est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ (car dérivable). Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers l'intervalle $f_n(\mathbb{R}_+) = \left[f_n(0), \lim\limits_{+\infty} f_n\right[= [1, +\infty[$.
Comme $1 < a$, alors $a \in f_n(\mathbb{R}_+)$, donc il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $f_n(x) = a$.

Ainsi, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante.
On reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $u_n \neq 0$, car $f_n(0) \neq a$.
Or $f_n(u_n) = a$ et $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + \dfrac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $f_{n+1}(u_n) > a$.
Or $f_{n+1}(u_{n+1}) = a$. Donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$. Par croissance stricte de f_{n+1}, $u_n > u_{n+1}$.

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante, et minorée par 0.

Par le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

4. (a) La suite $(f_n(\ln(a)))_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers $\exp(\ln(a)) = a$, alors $\forall n \geqslant 1,\ f_n(\ln(a)) \leqslant a$.
Or $a = f_n(u_n)$. Donc $\forall n \geqslant 1,\ f_n(\ln(a)) \leqslant f_n(u_n)$.

Par croissance stricte de f_n, $\forall n \geqslant 1,\ \ln(a) \leqslant u_n$.

(b) Par définition de K, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ K \leqslant u_n$.
Donc par croissance de f_n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(K) \leqslant f_n(u_n)$.
Or $f_n(u_n) = a$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(K) \leqslant a$.
Or $f_n(K) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^K$. Donc par passage à la limite $\boxed{\mathrm{e}^K \leqslant a.}$

(c) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et convergente. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k \leqslant u_n$.
Donc on peut poser $K = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et d'après la question précédente, $\exp(\lim\limits_{k\to+\infty} u_k) \leqslant a$.
Donc par croissance de ln, $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k \leqslant \ln(a)$.
Or d'après la question 4a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(a) \leqslant u_n$.
$\boxed{\text{Ainsi, } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(a).}$

5. (a) $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge, donc est bornée.}}$

(b) Comme $u_n > 0$, on a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}|R_n(u_n)| &\leqslant \int_0^{u_n} \mathrm{e}^{u_n} \frac{|u_n - t|^n}{n!}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{u_n} \mathrm{e}^M \frac{(u_n-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \qquad \text{car } u_n - t \geqslant 0 \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}^M}{n!}\int_0^{u_n} (u_n-t)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}^M}{n!}\left[-\frac{(u_n-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{u_n} \leqslant \mathrm{e}^M \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } |R_n(u_n)| \leqslant \mathrm{e}^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}}$$

(c) On a pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$, donc $n^2\,|R_n(u_n)| \leqslant \mathrm{e}^M n^2 \dfrac{M^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \mathrm{e}^M \dfrac{M^{n+1}}{(n-1)!}$.
Or, par croissances comparées, $\dfrac{M^{n+1}}{(n-1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par encadrement, $n^2 R_n(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit : $\boxed{R_n(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right).}$

6. (a) Par la formule de Taylor avec reste intégral appliquée entre 0 et x, applicable car la fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc ici $\mathscr{C}^{n+1}$, $\boxed{\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + \int_0^x \mathrm{e}^t \dfrac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = f_n(x) + R_n(x).}$

(b) D'après les questions précédentes, $\mathrm{e}^{u_n} = f_n(u_n) + R_n(u_n)$. Donc $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{a} = 1$. Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq \ln(a)$ car la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

Donc $\ln\left(\frac{e^{u_n}}{a}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{u_n}}{a} - 1$. Alors $n^2\left(u_n - \ln(a)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\left(\frac{e^{u_n}}{a} - 1\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{e^{u_n}}{a} - 1\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(u_n - \ln(a)\right) = 0$ et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$.

7. (a) D'après la question 6(a) au rang $n+1$: $\boxed{\mathrm{e}^x = f_{n+1}(x) + R_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \mathrm{e}^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t.}$

(b) D'après la question 5(b), au rang $n+1$ et en u_n:

$$|R_{n+1}(u_n)| \leqslant \mathrm{e}^M \frac{u_n^{n+2}}{(n+2)!} \leqslant \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{M\mathrm{e}^M}{n+2}.$$

Or $\frac{M\mathrm{e}^M}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\mathrm{e}^M \frac{u_n^{n+2}}{(n+2)!} = o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$. Par encadrement, $R_{n+1}(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right).}$

(c) Remarquons que $\dfrac{\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\left(\ln(a)\right)^{n+1}}{(n+1)!}} = \left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right)\right)$.

Or $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(a)} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right) = 0$.

Alors $(n+1)\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\frac{u_n}{\ln(a)} - 1\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\ln\left(\frac{u_n}{\ln(a)}\right) = 0$.

$\boxed{\text{Ainsi } \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}.}$

Par croissances comparées, $\frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0.}$

(d) Remarquons que $u_n - \ln(a) = \ln\left(\frac{e^{u_n}}{a}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{u_n} \neq a$. Donc $u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{u_n}}{a} - 1$.

Or d'après la question 7c, $\frac{e^{u_n}}{a} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!} + o\left(\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)$. Donc $u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^{n+1}}{a(n+1)!}$.

D'après la question précédente, $\frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}$. $\boxed{\text{Donc } u_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}.}$

CONCOURS ECRICOME PREPA

Exercice 2

1. (a) • La matrice $A+I=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&3&0\\1&4&-1\end{pmatrix}$ est de rang 2 puisque, en notant C_1,C_2,C_3 ses colonnes, C_1 et C_2 sont non colinéaires, et $C_3=-C_1$. Ainsi, $A+I$ n'est pas inversible : -1 est une valeur propre de A (donc de f).
Par le théorème du rang, l'espace propre associé est de dimension 1.
De plus, comme $C_1+C_3=0$, on a $(1,0,1)\in \text{Ker}(f+Id)$, et on a donc nécessairement $\boxed{\text{Ker}(f+Id)=Vect\,((1,0,1)).}$

• La matrice $A-2I=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&0\\1&4&-4\end{pmatrix}$ n'est clairement pas inversible (une ligne nulle), et de rang 2 (les deux colonnes C_1 et C_2 forment déjà une famille libre).
Ainsi, 2 est une valeur propre de A (donc de f), et par le théorème du rang, l'espace propre associé est de dimension 1.
De plus, comme $C_2+C_3=0$, on a $(0,1,1)\in \text{Ker}(f-2Id)$, et on a donc nécessairement $\boxed{\text{Ker}(f-2Id)=Vect((0,1,1)).}$

(b) Supposons que f soit diagonalisable. Alors f admettrait une troisième valeur propre α telle que $\alpha\notin\{-1,2\}$ car $\dim(E(-1))+\dim(E(2))\neq 3$.

Dans ce cas, il existerait une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f soit $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$.

Les matrices A et D seraient donc semblables, donc elles auraient la même trace, alors $0=1+\alpha$, donc $\alpha=-1$, ce qui est absurde.
$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

2. Soit $x\in\text{Ker}(f+\text{Id})$, alors $(f+\text{Id})(x)=0$, donc $(f+\text{Id})^2(x)=(f+\text{Id})((f+\text{Id})(x))=(f+\text{Id})(0)=0$, d'où $x\in\text{Ker}(f+\text{Id})^2$.
$\boxed{\text{Ainsi } \text{Ker}(f+\text{Id})\subset\text{Ker}\Big((f+\text{Id})^2\Big).}$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de $(f+\text{Id})^2$ est $(A+I_3)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&9&0\\0&9&0\end{pmatrix}$ qui est de rang 1.

Par théorème du rang, on a donc $\dim(\text{Ker}((f+\text{Id})^2\Big)=2$.

Comme $\text{Ker}(f+\text{Id})$ est de dimension 1, $\boxed{\text{Donc } \text{Ker}(f+\text{Id})\neq\text{Ker}\Big((f+\text{Id})^2\Big).}$

3. • $((0,1,1))$ est une base de $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ d'après 1(a).
   • En lisant $(A+I_3)^2$, on a clairement que $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})^2 = Vect((1,0,0),(0,0,1))$, et $((1,0,0),(0,0,1))$ fournit une base de $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})^2$.

   Or, $((1,0,0),(0,0,1))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires), et $(0,1,1)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$.
   Ainsi, $((0,1,1),(1,0,0),(0,0,1))$ est une famille libre, de $3=\dim(\mathbb{R}^3)$ éléments, donc est une base de $\mathbb{R}^3$.
   Par concaténation de bases, $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\Big((f+\mathrm{Id})^2\Big).}$

4. • Soit $x\in F$. Alors $f(x)=2x$.
   Et $(f-2\mathrm{Id})(f(x)) = f(f(x)-2x) = 0$, par linéarité de f. Ainsi, $f(x)\in F$.
   • Soit $x\in G$. On a $f^2(x)+2f(x)+x=0$, donc en appliquant f et par linéarité de f : $f^3(x)+2f^2(x)+f(x)=f(0)=0$, donc $(f+\mathrm{Id})^2(f(x))=0$. Ainsi, $f(x)\in G$.

   $\boxed{\text{Ainsi } F \text{ et } G \text{ sont stables par } f.}$

5. $P(f)=(f+\mathrm{Id})^2\circ(f-2\mathrm{Id})$ est la somme et la composée d'endomorphismes, donc $P(f)$ est un endomorphisme de E.
   Soit $x\in E$, il existe $y\in F$ et $z\in G$ tels que $x=y+z$.

$$\begin{aligned} P(f)(x) &= (f+\mathrm{Id})^2[(f-2\mathrm{Id})(y)] + (f-2\mathrm{Id})[(f+\mathrm{Id})^2(z)] \quad \text{car } (f+\mathrm{Id})^2\circ(f-2\mathrm{Id}) = (f-2\mathrm{Id})\circ(f+\mathrm{Id})^2 \\ &= 0+0 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Ainsi, } P(f) \text{ est l'endomorphisme nul.}}$

6. Les endomorphismes π_1 et π_2 sont deux polynômes du même endomorphisme f, $\boxed{\text{donc } \pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ commutent.}}$

7. (a) On a
$$\pi_2\circ\pi_1 = -\frac{1}{81}(f+4\mathrm{Id})\circ[(X+1)^2(X-2)](f).$$
   Or $(X+1)^2(X-2)(f)$ est l'endomorphisme nul.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \pi_2\circ\pi_1 \text{ est l'endomorphisme nul.}}$

   (b) Soit $y\in\mathrm{Im}(\pi_1)$, il existe $x\in E$ tel que $y=\pi_1(x)$, donc $\pi_2(y)=\pi_2\circ\pi_1(x)=0$, donc $y\in\mathrm{Ker}(\pi_2)$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Im}(\pi_1)\subset\mathrm{Ker}(\pi_2).}$

8. (a) On a $\pi_1+\pi_2 = \dfrac{1}{9}\left((f+\mathrm{Id})^2-(f+4\mathrm{Id})\circ(f-2\mathrm{Id})\right) = \dfrac{1}{9}\left(f^2+2f+\mathrm{Id}-(f^2+4f-2f+8\mathrm{Id})\right)$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \pi_1+\pi_2=\mathrm{Id}.}$

   (b) Soit $x\in\mathrm{Ker}(\pi_2)$, on a donc $\pi_2(x)=0$, donc d'après la question précédente $x=\pi_1(x)\in\mathrm{Im}(\pi_1)$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker}(\pi_2)\subset\mathrm{Im}(\pi_1).}$

9. Par double inclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(\pi_2)=\mathrm{Im}(\pi_1).}$ Mais comme π_1 et π_2 commutent, $\pi_1\circ\pi_2 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$, donc on peut appliquer les mêmes arguments et on obtient : $\boxed{\mathrm{Im}(\pi_2)=\mathrm{Ker}(\pi_1).}$

10. $$\pi_2^2 = \pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ (\mathrm{Id} - \pi_1) = \pi_2 - \pi_2 \circ \pi_1 = \pi_2.$$
C'est le même calcul pour π_1. Ainsi, π_1 et π_2 sont des projecteurs.

11. Soit $x \in F$. $\pi_2(x) = -\dfrac{1}{9} \circ (f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})(x) = 0$, car $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ donc $F \subset \mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1)$.
Soit $x \in G$, $\pi_1(x) = \dfrac{1}{9}(f - \mathrm{Id})^2(x) = 0$ car $G = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$. Donc $G \subset \mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$.
Si $x \in E$, comme $E = F \oplus G$, il existe $y \in F$ et $z \in G$ tels que $x = y + z$, donc $\pi_2(x) = \pi_1(y) + \pi_1(z) = z$. et $\pi_1(x) = y$.
Ainsi, π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F. Et π_1 est le projecteur sur F parallèlement à G.

12. $g = \dfrac{1}{9}\left(2(f + \mathrm{Id})^2 + (f + 4\mathrm{Id}) \circ (f - 2\mathrm{Id})\right) = \dfrac{1}{9}\left(3f^2 + 6f - 4\mathrm{Id}\right)$.
Et $h = f - g = \dfrac{1}{9}\left(-3f^2 + 3f + 4\mathrm{Id}\right)$.
Ainsi, g et h sont des polynômes de l'endomorphisme f.

13. À la question 3, une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que (e_1) est une base de F et (e_2, e_3) une base de G a été déterminée.
Les matrices respectives de π_1 et π_2 dans la base (e_1, e_2, e_3) sont $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donc la matrice de $g = 2\pi_1 - \pi_2$ dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

14. •
$$\begin{aligned} (f - 2\mathrm{Id}) \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id}) \circ \pi_2 &= f \circ (\pi_1 + \pi_2) - 2\pi_1 + \pi_2 \\ &= f \circ \mathrm{Id} - 2\pi_1 + \pi_2 \\ &= f - 2\pi_1 + \pi_2 \\ &= h \end{aligned}$$

•
$$h^2 = (f - 2\mathrm{Id})^2 \circ \pi_1^2 + 2(f - 2\mathrm{Id})(f + \mathrm{Id}) \circ \pi_1 \circ \pi_2 + (f + \mathrm{Id})^2 \circ \pi_2^2.$$
Or, $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$, $\pi_1^2 = \pi_1$ et $\pi_2^2 = \pi_2$, donc
$$h^2 = (f - 2\mathrm{Id})^2 \circ \pi_1 + (f + \mathrm{Id})^2 \circ \pi_2.$$
Or $\mathrm{Im}(\pi_1) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(\pi_2) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, donc $h^2 = 0$.

15. Ainsi, h est nilpotent, g est diagonalisable et $f = g + h$ avec $g \circ h = h \circ g$ car g et h sont des polynômes en f d'après la question 12. Ainsi f est la somme d'un endomorphisme nilpotent et d'un endomorphisme diagonalisable, les deux commutant.

Problème

1. (a) Par composition de fonctions $\mathscr{C}^2$ (exponentielle, fonction affine), $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$, $f_{\mu,a}(x) = F'_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)$.

On dérive ensuite ce produit :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_{\mu,a}(x) = -\frac{1}{a^2}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right) + \frac{1}{a^2}\exp^2\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right)$.

(b) $f_{\mu,a}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $F_{\mu,a}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

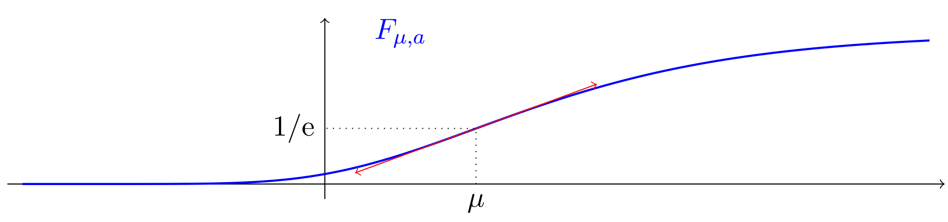
$$\text{Et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a^2}\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\left(\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)-1\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)\right).$$

Ainsi, $f'_{\mu,a}(x)$ a le même signe que $1-\exp\left(\frac{\mu-x}{a}\right)$, qui est donné par le signe de $\frac{\mu-x}{a}$. On peut donc donner le tableau de signe de $f'_{\mu,a}$.

x	$-\infty$		μ		$+\infty$
$\frac{\mu-x}{a}$		$+$	0	$-$	
$f'_{\mu,a}(x)$		$+$	0	$-$	

Ainsi, $F_{\mu,a}$ est convexe sur $]-\infty,\mu]$, concave sur $[\mu,+\infty[$, et possède un point d'inflexion en μ.

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\mu,a}(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\mu,a}(x) = 0$.



(c) On peut donc dresser ci-contre le tableau des variations de $F_{\mu,a}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$F_{\mu,a}(x)$	$0 \nearrow 1$

Ainsi, $F_{\mu,a}$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.
Par le théorème de la bijection, $F_{\mu,a}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,1[$.
Soit $y \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on résout

$$y = F_{0,1}(x) \iff y = \exp(-\exp(-x)) \iff \ln(y) = -\exp(-x) \iff \ln(-\ln(y)) = -x \iff x = -\ln(-\ln(y)).$$

Donc $G : y \longmapsto -\ln(-\ln(y))$.

2. La fonction $f_{\mu,a}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\displaystyle\int_x^y f_{\mu,a}(t)\mathrm{d}t = F_{\mu,a}(y) - F_{\mu,a}(x)$. Donc par les limites précédentes, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
Ainsi, $f_{\mu,a}$ est une densité de probabilité.
Par la limite précédente, $F_{\mu,a}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{\mu,a}(t)\mathrm{d}t$.
Ainsi, $F_{\mu,a}$ est bien la fonction de répartition associée à la densité $f_{\mu,a}$.

3. On sait qu'une transformation affine (non constante) d'une variable aléatoire à densité est à densité. De plus, si une variable Z a pour densité f, alors $aZ + \mu$ a pour densité $x \mapsto \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{x-\mu}{a}\right)$. Ici, comme Z a pour densité $f_{0,1} : x \mapsto \exp(-x)\exp(-\exp(-x))$, alors X a pour densité $f_{\mu,a}$.
Ainsi X suit la loi $\mathscr{G}(\mu, a)$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$P(Y \leqslant x) = P(-\ln(-\ln(U)) \leqslant x) = P(G(U) \leqslant x) = P(U \leqslant F_{0,1}(x)) = F_U(F_{0,1}(x)) = F_{0,1}(x) \quad \text{car } F_{0,1}(x) \in]0,1[$$

Ainsi, Y suit la loi $\mathscr{G}(0,1)$.

(b)
```
function g = gumbel(mu,a)
    U = rand()
    g = mu-a*log(-log(U))
endfunction
```

5. (a) • $u \longmapsto \ln(u)e^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Par croissances comparées $\lim\limits_{u\to 0} \sqrt{u}\ln(u) = 0$, donc $\left|\ln(u)\mathrm{e}^{-u}\right| \underset{u\to 0}{=} o\left(u^{-1/2}\right)$. Or $\displaystyle\int_0^1 u^{-1/2}\mathrm{d}u$ converge. Donc par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ converge absolument, donc converge.

- Par croissances comparées $\lim_{u\to+\infty} u^2\ln(u)\mathrm{e}^{-u}=0$, donc $\ln(u)\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(u^{-2}\right)$.

  Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$ converge et $\forall u\in[1,+\infty[$, $\dfrac{1}{u^2}\geqslant 0$. Donc par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln(u)\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ converge.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(u)e^{-u}\mathrm{d}u$ converge.

(b) La fonction $u\mapsto e^{-u}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement décroissante, bijective de $]0,+\infty[$ vers $]0,1[$.
Et la fonction $t\longmapsto\ln(-\ln(t))$ est continue sur $]0,1[$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(u)e^{-u}\mathrm{d}u$ a même nature et même valeur que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln\left(-\ln\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln\left(-\ln\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$ converge.

(c) Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{0,1}(x)\mathrm{d}x$ converge c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x}e^{-e^{-x}}\mathrm{d}x$ converge.
Or la fonction $x\longmapsto e^{-e^{-x}}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$ et de dérivée $x\longmapsto e^{-x}e^{-e^{-x}}$.
Et $u\longmapsto -\ln(-\ln(u))$ est continue sur $]0,1[$. Donc par le théorème de changement de variable $\displaystyle\int_0^1-\ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x}e^{-e^{-x}}\mathrm{d}x$ sont de même nature et en cas de convergence égales.
D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^1-\ln(-\ln(u))\mathrm{d}u$ converge et vaut γ.

Ainsi, Z admet une espérance et $E[Z]=\gamma$.

(d) Comme $X=aZ+\mu$, alors par linéarité, X admet une espérance et $E[X]=a\gamma+\mu$.

6. (a) $-Z$ est une transformation affine (non constante) de Z, qui est à densité, donc $-Z$ est encore une variable aléatoire à densité, et une densité de $-Z$ est

$$x\longmapsto\frac{1}{|-1|}\exp\left(\frac{-x}{-1}\right)\exp\left(-\exp\left(\frac{-x}{-1}\right)\right)=\exp(x)\exp(-\exp(x)).$$

Donc $-Z$ est une variable aléatoire à densité de densité $x\longmapsto\exp(x)\exp(-\exp(x))$.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Notons $\lambda=e^{-x}+1>0$, et notons W une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. Alors W admet une espérance qui vaut $\dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\lambda ue^{-\lambda u}\mathrm{d}u$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}ue^{-\lambda u}\mathrm{d}u$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty}ue^{-(\mathrm{e}^{-x}+1)u}\mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty}ue^{-(\mathrm{e}^{-x}+1)u}\mathrm{d}u=\frac{1}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{0,1}(x-t)g(t) = \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{t-x}}\mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{t}} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{-x}+1)\mathrm{e}^{t}}\mathrm{e}^{2t}.$$
On pose le changement de variable $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$, qui est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)\mathrm{d}t$ a la même nature (et, si elle converge, même valeur) que
$$\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{-x}+1)\mathrm{u}} u\mathrm{d}u.$$
Or que cette dernière intégrale converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)\mathrm{d}t$ converge.

(d) Comme Y et $-Z$ sont indépendantes et à densité, alors $Y-Z = Y+(-Z)$ est à densité, et une densité est donnée par le produit de convolution
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\mathrm{e}^{-x}+1)\mathrm{u}} u\mathrm{d}u = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$
car $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, une densité de $Y-Z$ est $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité triangulaire
$$|\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W)| \leqslant |\alpha||V_n - V| + |\beta||W_n - W|.$$
Soit $\varepsilon > 0$, si $\omega \in (|V_n - V| \leqslant \varepsilon) \cap (|W_n - W| \leqslant \varepsilon)$, alors $|\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W)|(\omega) \leqslant (|\alpha|+|\beta|)\varepsilon$.
Ainsi, $\Big[|V_n - V| \leqslant \varepsilon\Big] \cap \Big[|W_n - W| \leqslant \varepsilon\Big] \subset \Big[\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W) \leqslant (|\alpha|+|\beta|)\varepsilon\Big]$.
En passant au complémentaire,
$$\Big[\alpha V_n + \beta W_n - (\alpha V + \beta W) > (|\alpha|+|\beta|)\varepsilon\Big] \subset \Big[|V_n - V| > \varepsilon\Big] \cup \Big[|W_n - W| > \varepsilon\Big].$$
Or pour tout couple d'événements (A,B), $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B)$, Donc
$$P\left(V_n + W_n - (V+W) > (|\alpha|+|\beta|)\varepsilon\right) \leqslant P\left(|V_n - V| > \varepsilon\right) + P\left(|W_n - W| > \varepsilon\right).$$
Or $V_n \xrightarrow{P} V$ et $W_n \xrightarrow{P} W$. Donc par définition $P(|V_n - V| > \varepsilon) \longrightarrow 0$ et $P(|W_n - W| > \varepsilon) \longrightarrow 0$.
Donc par encadrement $P\Big(V_n + W_n - (V+W) > (|\alpha|+|\beta|)\varepsilon\Big) \longrightarrow 0$.

Ainsi, $\alpha V_n + \beta W_n \xrightarrow{P} \alpha V + \beta W$.

(b) Il suffit d'appliquer la loi faible des grands nombres : les suites (X_i) et (X_i^2) sont i.i.d., ces variables aléatoires ont une variance (car X_1 admet un moment d'ordre 4), donc $M_n \xrightarrow{P} E[X_1]$ et $C_n \xrightarrow{P} E[X_1^2]$

(c) Comme $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors $M_n^2 \xrightarrow{P} E[X_1]^2$.
Par les deux questions précédentes,

$$C_n - M_n^2 \xrightarrow{P} E[X_1^2] - E[X_1]^2 = V(X_1) = a^2 c.$$

Comme $C_n - M_n^2$ est une variance empirique, et est donc une variance pour une loi discrète, cette quantité est toujours positive.
Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue, on a donc

$$\sqrt{C_n - M_n^2} \xrightarrow{P} a\sqrt{c},$$

donc par continuité de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{c}}$, on a bien

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2} \xrightarrow{P} a.$$

Ainsi, $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2}$ est bien un estimateur convergent de a.

(d) Par les questions précédentes, comme on a $M_n \xrightarrow{P} E[X_1] = a\gamma + \mu$ et d'autre part $A_n \xrightarrow{P} a$, alors on peut en déduire que $M_n - \gamma A_n \xrightarrow{P} \mu$.
Ainsi, $M_n - \gamma A_n$ est un estimateur convergent de μ.

8. (a)

```
function A= estimateur_a(X)
    A = sqrt((mean(X^2)-mean(X)^2)/c)
endfunction
```

(b) Les courbes se rapprochent de la valeur de a (ici, 1), ce qui illustre le fait que A_n est un estimateur convergent de a.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,4 et un écart-type de 5,69, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Le soin apporté aux copies est très variable : certaines (rares) sont irréprochables, quand de nombreuses ratures brouillonnes sont présentes dans d'autres. Beaucoup de copies sont difficilement lisibles et comportent énormément de ratures. Le correcteur ne fera pas l'effort de déchiffrer des copies illisibles.
Dans de rares copies, les questions sont traitées dans le désordre : des candidats commencent par traiter l'exercice 1, abordent le deuxième, reviennent sur le premier, etc. Il faut veiller à ce que le correcteur puisse sans difficulté connaître la question abordée et ne pas trop effectuer d'aller et retour entre les exercices.
Trop de candidats utilisent le symbole $\Leftrightarrow$ comme connecteur universel, sans que l'on sache ce qu'il signifie alors pour eux. Cette « facilité de rédaction » a surtout pour effet d'occulter le raisonnement du candidat, et mène parfois à de vraies erreurs mathématiques. Nous conseillons aux candidats de s'en tenir tout simplement au « donc » , et d'annoncer clairement lorsqu'ils procèdent à un raisonnement par équivalences (fort rares dans ce type de sujet).

Certains candidats ne concluent pas explicitement à chaque question (il suffit pourtant de reprendre l'intitulé de la question, en encadrant ou soulignant la phrase). Or, dans bien des cas, les réponses sont imprécises, et le correcteur est alors en droit de se demander si le candidat est réellement sûr d'avoir conclu, ou s'il a plutôt abandonné la question en cours de route. Ce doute profite malheureusement rarement au candidat. Nous ne pouvons donc qu'encourager les candidats à conclure clairement leurs raisonnements, et leurs réponses.

Certaines questions sont souvent « esquivées » par les candidats, même lorsque les questions préparatoires ont été réussies : les questions Scilab, le tracé de l'allure de $F_{\mu,a}$ et le commentaire de graphe. Ce sont des points aisément gagnés, c'est dommage !

Certains candidats manipulent les notions mathématiques de façon très « artistique » montrant ainsi leur non-compréhension de ces dernières : (calculs fractionnaires, « suite continue », équivalents, égalité entre $\ln(a+b)$ et $\ln(a)+\ln(b)$, etc.).

On retrouve bien trop souvent l'expression « la fonction [...] est une bijection », ce qui est erroné si l'on ne précise pas les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction (et ce qui n'est jamais précisé par les candidats). Dans ces situations (étude de fonction, justification de changement de variable d'intégrale impropre notamment), la détermination de l'image de la fonction manipulée est une étape primordiale. Nous ne pouvons qu'encourager les candidats à adopter le vocabulaire « la fonction [...] réalise une bijection de [...] sur/vers [...] ». Le plus souvent, un tableau de variations répond explicitement à la question posée, et est tout à fait clair. Peu de candidats dressent des tableaux de variations. Pourtant, un tel tableau est souvent l'argument le plus clair et le plus lisible permettant de répondre à un grand nombre de questions (existence et unicité de solution d'une équation, sens de variation d'une fonction, justification d'un changement de variable d'une intégrale impropre).

Exercice 1

Cet exercice d'analyse étudie une suite définie implicitement et cherche un développement asymptotique du terme général de cette suite.

1. (a) Cette question est en général bien traitée. Cependant certains tentent une résolution par récurrence.
   (b) Beaucoup d'erreurs étonnantes dans un algorithme classique qui était bien préparé. L'utilisation de la fonction `sum` de manière inappropriée est regrettable, elle est visiblement mal maîtrisée par ceux qui l'emploient. Certains candidats traitent la variable `S` comme un compteur (`S=S+1`).
2. La mise en place du théorème de la bijection est en général bonne mais la condition $a \in f_n(\mathbb{R}^+)$ pour s'assurer de l'existence (et unicité) de la solution est très souvent escamotée.
   Quelques manques de rigueur dans le raisonnement sont cependant à noter : « $f_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ » , des erreurs de calcul sur $f_n(0)$: ici $f_n(0) = 1$ et non 0. Une justification de la stricte croissance est attendue et la positivité large de f_n' est insuffisante.
   Les candidats confondent parfois le vocabulaire employé : on lit « la fonction est croissante et strictement continue »
   Le calcul de la dérivée pose parfois quelque problèmes : la constante se dérive en 1 ou la somme commence à 0 avec un terme général $\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$.

On relève enfin quelques confusions entre suite et fonction du type : « la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$ car somme de fonctions positives ».

Certains candidats croient justifier correctement la croissance de la fonction f_n en comparant $f_n(x+1)$ à $f_n(x)$.

Dans certaines copies, le candidat confond somme partielle et somme d'une série, et justifie la croissance de la fonction f_n par celle de la fonction exponentielle.

Quelques candidats énoncent « un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires » sans évoquer clairement le terme bijection.

3. (a) Cette question est en général bien traitée.
   Il y a parfois eu confusion entre la suite $(f_n(x))$ et la fonction f_n pour déterminer la monotonie.
   La limite de la suite $(f_n(x))$ est parfois $+\infty$, parfois 0, avec toujours l'argument « f_n est croissante ».

   (b) La démarche est dans l'ensemble comprise, certains candidats pensent encore pouvoir relier directement le sens de variation de f_n (ou celui de f_n^{-1}) à celui de (u_n) malheureusement.
   Certains affirment que la suite (u_n) est croissante !

   (c) Cette question est en général bien traitée, mais quelques raccourcis entraînent des erreurs pénalisant les candidats comme des confusions entre limite de la suite et limite de la fonction. Certains candidats trouvent des limites qui dépendent de n ou de x : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \exp(u_n)$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \exp x$.

4. La question 4 dans l'ensemble est ratée. Les arguments donnés sont trop souvent faux, des erreurs de raisonnement sont faites. Les candidats ne prennent pas le temps de regarder ce qu'ils affirment et ne se posent pas de questions.

   (a) Certains candidats estiment que le fait que $\ln(a)$ soit un minorant de u_n suffit à conclure qu'il s'agit de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Beaucoup de candidats déduisent à tort que comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x)) = e^x$ alors $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(u_n)) = e^{u_n}$.
   L'inégalité $f_n(x) \leqslant \exp x$ n'est souvent malheureusement justifiée que par un argument de limite.

   (b) On retrouve bien trop souvent l'argument erroné suivant : « $\ln(a) \leqslant u_n$ et K minore (u_n), donc $K \leqslant \ln(a)$ ». Les manipulations sur les inégalités posent beaucoup de difficultés aux candidats.
   Il y a souvent confusion entre la croissance de la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ à x fixé, et la croissance de la fonction f_n à n fixé.

   (c) Cette question est dans l'ensemble bâclée. Trop de candidats affirment que la suite (u_n) est décroissante et minorée par $\ln(a)$ donc converge vers $\ln(a)$!
   Le théorème des gendarmes est souvent invoqué ici, alors qu'il n'intervient nulle part : on a déjà montré l'existence de la limite de la suite (u_n).
   Certains, cependant, tentent d'utiliser le fait que $\ln(a)$ est le plus grand des minorants de u_n, mais la propriété de la borne inférieure ne peut pas être utilisée sans justifications.

5. (a) Cette question d'application directe du cours n'est pas toujours reconnue. Certains font des efforts inutiles pour essayer de donner un minorant et un majorant (en cherchant parfois même à majorer u_1 par une expression ne dépendant que de a).

CONCOURS ECRICOME PREPA

(b) Les imprécisions dans la gestion des inégalités gâchent régulièrement des initiatives au départ intéressantes. De nombreux candidats peinent à utiliser correctement les valeurs absolues et les inégalités.

(c) La limite de $\dfrac{M^{n+1}n^2}{(n+1)!}$ est très rarement justifiée de manière correcte. Certaines opérations sur les équivalents sont très maladroites ou incorrectes : on lit souvent des multiplications membre à membre de n équivalents lorsque n tend vers $+\infty$. Certains candidats pensent que « $n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ » .

L'implication suivante, souvent rencontrée est incorrecte : « $R_n(U_n)$ tend vers 0, $\dfrac{1}{n^2}$ tend vers 0 donc $R_n(U_n)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{n^2}$ ».

6. (a) Un trop grand nombre de candidats ne reconnaissent pas cette question d'application directe du cours. Les hypothèses du théorème ne sont souvent pas contrôlées. Certains candidats perdent du temps en distinguant deux cas $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$ pour appliquer le théorème.

(b) Cette question demandait une manipulation propre des relations de comparaison et en particulier ici la négligeabilité. La correction des copies a montré que dans l'ensemble les candidats se permettent toute opération sans prendre en compte le terme $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La relation $\mathrm{e}^{u_n} = a + R_n(u_n)$ est le plus souvent transformée directement en $u_n = \ln(a) + R_n(u_n)$, ou en $u_n = \ln(a) + \ln(R_n(u_n))$, ou encore en « $R_n(u_n) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Longrightarrow \ln(R_n(u_n)) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ » .

7. (a) Certains candidats perdent du temps en redémontrant cette question à l'aide d'une intégration par parties et de la question 6.(a).

(b) Cette question est peu traitée correctement : on voit souvent apparaître une confusion entre $R_{n+1}(u_n)$ et $R_{n+1}(u_{n+1})$. À nouveau la négligeabilité de $R_{n+1}(u_n)$ a posé de nombreux problèmes.
Pour certains, l'intégrale d'un produit de deux fonctions est égal au produit des intégrales.

(c) Parmi les candidats qui abordent cette question, l'erreur grossière de raisonnement qui est apparue consistait à dire que, puisque $u_n \sim \ln(a)$, alors $u_n^{n+1} \sim (\ln(a))^{n+1}$, par composition ou élévation à la puissance $n+1$.
Par contre, la justification de la limite nulle est correctement donnée.

(d) Cette question est peu traitée.
La présence de la fonction ln a posé des difficultés : les propriétés algébriques de cette fonction sont loin d'être bien maîtrisées.
Pour certains, si deux suites numériques tendent vers 0, alors elles sont systématiquement équivalentes (dans le cas présent, $(u_n - \ln(a))$ et $\left(\dfrac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}\right)$.

CONCOURS ECRICOME PREPA

Exercice 2

Cet exercice d'algèbre a pour objectif d'écrire une matrice donnée comme somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente, qui commutent, appelée décomposition de Dunford de la matrice. Une approche théorique et par les endomorphismes était choisie ici, mais il était tout à fait possible de traiter l'ensemble des questions de manière matricielle, ce qui a été fait par certains candidats et ce qui se révèlait assez efficace pour certaines questions.

De nombreuses confusions sur la nature des objets manipulés sont à noter : un endomorphisme est égal à une matrice ; des signes d'égalités entres des matrices non égales mais dont la deuxième est obtenue de la première par des opérations élémentaires ; un sous-espaces vectoriel est confondu avec une de ses familles génératrices ...De manière similaire, bon nombre de candidats confond le carré de composition avec un carré de multiplication, et multiplient donc des vecteurs, ce qui n'a aucun sens ici.
Certains candidats confondent le signe d'inclusion $\subset$ avec le signe inférieur $<$ lorsqu'ils manipulent des sous-espaces vectoriels.
D'une manière générale, il ne faut pas faire « semblant » de répondre aux questions en essayant de noyer le poisson ...Une démarche rigoureuse et honnête, même si elle n'aboutit pas, est toujours préférable.

1. (a) Trop de candidats ne lisent pas correctement la question, et se lancent dans une recherche de toutes les valeurs propres, ce qui n'était pas demandé. Une telle recherche n'est pas valorisée par le correcteur, bien au contraire. Plusieurs candidats ayant choisi cette mauvaise méthode ont fait des opérations illicites dans leur pivot. Les candidats les plus habiles ont su observer les matrices $A + I_3$ et $A - 2I_3$ et en déduire immédiatement leurs rangs et leurs noyaux. D'autres se sont perdus dans des pages de calculs. Quand le pivot de Gauss est utilisé beaucoup remplacent une ligne L par $\lambda L + \dots$ sans vérifier que $\lambda \neq 0$.

   Enfin, certains candidats ne répondent pas explicitement à la question, alors qu'ils ont obtenu tous les éléments nécessaires : ils donnent les sous-espaces propres mais ne justifient pas que -1 et 2 sont des valeurs propres, ou donnent des vecteurs propres mais pas des sous-espaces propres. Le jury ne peut qu'encourager les candidats à lire attentivement chaque question, et à y répondre le plus explicitement possible.
   Certains candidats croient qu'à une valeur propre n'est associé qu'un unique vecteur propre.

   (b) Un trop grand nombre de candidats pense que la trace d'un endomorphisme diagonalisable est la somme de ses valeurs propres, ce qui est grossièrement faux si l'on ne précise pas qu'elles sont comptées avec leurs multiplicités.
   Des raisonnements trop hâtifs sont trop souvent faits : « si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors A n'est pas diagonalisable » ou encore « si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors 0 est valeur propre de A » ou encore « si $\mathrm{tr}(A) = 0$ alors A est semblable à la matrice nulle » . On rappelle que la trace est la somme des éléments diagonaux, et non pas la liste de ces éléments.
   Pour certains, les matrices diagonales ne sont pas diagonalisables , ou encore que seules les matrices symétriques sont diagonalisables.

De grosses erreurs indiquent une incompréhension de la réduction des matrices : « A ne possède pas 3 valeurs propres donc A n'est pas diagonalisable » , ou encore « -1 est valeur propre et son sous-espace propre associé est $\text{Vect}\big((0,0,0)\big)$ ».

2. L'inclusion est en général bien traitée, mais l'inclusion stricte est confuse.
   Des pertes de temps regrettables pour l'inclusion, en exprimant $f(x)$ en fonction de x, alors qu'elle est immédiate en composant par $f + \text{Id}$.
   Certains étudiants cherchent à prouver qu'aucun des vecteurs non nuls de $\text{Ker}(f+id)^2$ ne se trouve dans $\text{Ker}(f+id)$, croyant ainsi démontrer une inclusion stricte.

3. Beaucoup de candidats ne comprennent pas la signification de $(f + Id)^2$ et n'hésitent pas à prendre le carré du vecteur $(f + Id)(x)$.
   Pour affirmer que $\dim(\text{Ker}(f-2\text{Id})) + \dim(\text{Ker}((f+\text{Id})^2)) \leqslant 3$, il faudrait avoir déjà prouvé que la somme des deux espaces vectoriels est directe.
   La justification de la dimension de $\text{Ker}(f+\text{Id})^2$ égale à 2 se réduit souvent à « parce qu'elle ne peut pas être égale à 3 ».

4. Cette question de méthode, qui se résout de manière très directe pour F notamment, permet de distinguer les candidats qui savent comment prouver une inclusion et manipuler correctement les objets algébriques des autres.
   La nature des objets manipulés est peu identifiée. Ainsi, il est courant de rencontrer un produit, un carré de vecteurs comme $f(x)(f(x)-2x)$ ou un produit à gauche de vecteurs et d'endomorphismes comme $(f(x)-2x)f$ ou encore x^2 ou $f(x)^2$.
   Peu de candidats ont vu que si $x \in F$, alors $f(x) = 2x \in F$, car F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Trop d'étudiants pensent avoir prouvé rigoureusement la stabilité en composant par f à gauche et en omettant de « passer » le $f(x)$ à droite pour prouver que $f(x)$ est bien dans le sous-espace vectoriel.
   Quelques étudiants citent plus rapidement que tout sous-espace propre d'un endomorphisme f est stable par f.

5. Aucun énoncé au programme ne permet d'affirmer que si λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de f alors $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ ou $(X-\lambda_1)^2(X-\lambda_2)$ est un polynôme annulateur de f ; de plus ici, ce résultat est faux.
   La commutativité des polynômes (du premier degré ici) en f est peu citée.

6. Que de calculs très lourds dans cette question, pour arriver parfois à un développement élaboré de $\pi_1 \circ \pi_2$ comme polynôme en f de degré 4 (et quelquefois faux !).

7. (a) Les candidats (nombreux) qui laissent ici une expression de $\pi_2 \circ \pi_1$ pas du tout simple (polynôme en f notamment) devraient se poser des questions, notamment au vu de la question suivante.
   (b) Le « en déduire » ne signifie pas « recopier la question précédente et mettre un donc pour écrire une conclusion non justifiée ». Le raisonnement suivant, souvent rencontré, est incorrect: « $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$, donc $\pi_2(\pi_1) = 0$, donc $\pi_1 \in \text{Ker}(\pi_2)$ ».

8. (a) Cette question est en général bien réussie, via les endomorphismes ou les matrices.
   (b) Cette question est souvent bien traitée.
   Cependant, parfois l'inclusion obtenue est la réciproque de celle attendue.
9. Cette question est souvent bien traitée, pour certains en admettant 7(a) et/ou 7(b).
   Cependant, certains candidats se lancent dans de longues démonstrations pour établir la deuxième égalité (théorème du rang ...) au lieu d'invoquer plus rapidement le rôle symétriques des deux applications $\pi 1$ et $\pi 2$.
10. Cette question est assez moyennement traitée. Peu reviennent simplement à la définition d'un projecteur. De nombreux candidats justifient « π_1 et π_2 sont des projecteurs » par l'argument : $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$, $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$, $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \mathrm{Im}(\pi_2)$ et $\mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Im}(\pi_1)$.
11. Cette question est peu abordée ; lorsqu'elle l'est, les candidats privilégient la preuve $\pi_2(x_F + x_G) = x_G$ aux double inclusions $\mathrm{Im}(\pi_2) = G$ et $\mathrm{Ker}(\pi_2) = F$.
12. Beaucoup de candidats ont déjà abandonné l'exercice, c'est dommage ! On lit des preuves bien détaillées avec les polynômes explicités.
13. Cette question est très rarement abordée.
14. Peu de candidats pensent à utiliser $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$ et se lancent dans de longs et laborieux calculs qui n'aboutissent que rarement (en remplaçant les deux projecteurs par leur définition en tant que polynômes de f). La méthode matricielle est ici plus rentable pour les candidats.
15. Parmi ceux qui traitent cette question, beaucoup oublient d'évoquer (et de justifier) que g et h commutent.
    Il ne suffit pas de recopier la phrase définissant l'objectif en début d'exercice pour espérer obtenir les points, en particulier une référence précise aux questions traitées ou admises est attendue.

Problème

Le problème proposé cette année étudiait la loi de Gumbel, ainsi qu'une simulation informatique et le calcul de son espérance. On étudiait ensuite la loi de la différence de variables aléatoires de loi de Gumbel, pour aboutir sur une étude statistique donnant un estimateur d'un des paramètres de la loi de Gumbel.

1. (a) Cette question de dérivabilité et de calcul de dérivées n'a pas été aussi bien traitée qu'attendue.
   Pour certains, la fonction est $\mathscr{C}^2$ par composée de fonctions $\mathscr{C}^0$ ou par composée de fonctions dérivables. Elle est même polynomiale ou de dérivée seconde nulle.
   La factorisation par $\dfrac{1}{a}$ est souvent très compliquée. La dérivée première est souvent réussie mais pas la dérivée seconde. La composition des deux exponentielles intervenant dans l'expression de $f_{u,a}$ est quelquefois dérivée comme un produit de deux fonctions, ou bien parfois la fonction $x \mapsto \exp(v(x))$ est dérivée en $x \mapsto \exp(v'(x))$
   (b) Cette question porte sur l'étude d'une fonction et son allure, elle n'aurait pas dû être un obstacle pour la grande majorité des candidats. Cependant, beaucoup d'incohérences entre les résultats trouvés dans la question précédente et l'étude de la convexité sont observées lors de la correction.

Une confusion fréquente entre concave et convexe est faite, ce qui est assez troublant. Certains candidats semblent penser qu'étudier la convexité, c'est dire les intervalles sur lesquelles la fonction est convexe uniquement ; de fait, ils omettent de parler de la concavité.

De nombreux candidats oublient de répondre à la question des variations, passant directement à la convexité, ou se contentent de tracer un tableau de variation sans aucune explication ni réponse effective à la question des variations.

Le tracé de $F_{\mu,a}$ est trop souvent bâclé, lorsqu'il est tenté. Rappelons qu'il est nécessaire d'y consacrer une place suffisante (5 à 10 lignes de hauteur au moins, et toute la largeur de la page), et de faire ressortir les éléments pertinents (ici, la tangente au point d'inflexion, et les asymptotes horizontales), l'utilisation de couleurs peut être une bonne initiative lors des tracés.

(c) L'identification de l'intervalle image est souvent défaillante (et non détaillée) : on retrouve fréquemment la réponse $I = [0, 1]$. Des fautes de signes, des valeurs absolues apparaissent quelquefois dans l'expression algébrique de la fonction G.
L'énoncé n'est pas toujours bien lu et le candidat donne souvent la bijection réciproque de $F_{u,a}$ et non de $F_{0,1}$.

2. Les conditions pour qu'une fonction soit une densité de variable aléatoire (à densité) sont généralement connues, mais, dans la suite, trop souvent on lit des justifications fausses comme « f est une densité et $F' = f$ donc F est la fonction de répartition ».
Trop de candidats ont oublié qu'une primitive de $f_{u,a}$ est $F_{u,a}$ pour établir que l'intégrale de $f_{u,a}$ vaut 1.
3. Certains candidats ont visiblement oublié que la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire, et perdent du temps à dériver la relation (suffisante) qu'ils ont obtenue. Pire : ils commettent parfois une erreur dans cette dérivation !
Certains ne peuvent s'empêcher de revenir à l'écriture intégrale de la fonction de répartition, ce qui est au mieux maladroit et inutile, et au pire conduit à des erreurs.
La formule donnant une densité par transfert affine d'une variable aléatoire réelle à densité est très souvent utilisée, quelque fois non menée à son terme ($x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right) f_{0,1}\left(x - \dfrac{u}{a}\right)$ est une densité de la loi de Gumbel de paramètres $(0, 1)$).
4. (a) La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$ n'est pas bien connue : ce n'est pas « $x \mapsto x$ ».
L'argument « par la méthode d'inversion »a parfois été donné, et ne peut être accepté.
Des erreurs de gestion des signes – et des inégalités lors de la recherche de la fonction de répartition de Y ont souvent gêné les candidats.
De nombreux candidats abordent correctement cette question, mais bâclent la conclusion en oubliant de signaler que $F_{0,1}(x) \in]0, 1[$.

(b) Il est toujours recommandé de bien contrôler ses variables, une fonction démarrant par `function g=` et ne conduisant à aucune affectation de la variable `g` est un échec.
Dans plusieurs copies, on relève une confusion entre une réalisation de la variable aléatoire X suivant la loi de Gumbel et la densité de probabilité de la loi de Gumbel $G(u, a)$.

5. (a) Le caractère impropre en $+\infty$ est généralement réussi lorsque cette question est traitée, celui en 0 beaucoup moins. Certains ont vu, à tort, un prolongement par continuité en 0 de l'intégrande et certains même en $+\infty$.
   La convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est supposée acquise pour un certain nombre de candidats.
   Attention aux écritures automatiques : la phrase « l'intégrande est positive sur $]0,1]$ » est fausse ici.
   (b) Les hypothèses pour un changement de variable sur une intégrale impropre sont trop peu souvent correctement connues, et le changement de variable est souvent mal rédigé (l'égalité des intégrales est écrite sans parler de convergence, les domaines de départ et d'arrivée du changement de variable sont fréquemment intervertis ou erronés).
   Des entourloupes avec le signe – sont rencontrées, et jamais appréciées par les correcteurs.
   (c) Quand des calculs sont menés sous réserve de convergence, il est indispensable de soulever cette réserve de convergence et pas en expliquant que puisque le calcul est possible, alors l'intégrale converge.
   La réponse étant dans la question, on regrette que les étapes intermédiaires permettant de montrer que $E(Z) = \gamma$ soient parfois quasi inexistantes.
   Il est tout à fait possible, comme certains étudiants l'ont fait, de ne pas utiliser le changement de variable proposé, mais le théorème de transfert : puisque Z suit la loi de Gumbel de paramètres $(0,1)$ (admis par énoncé) et donc que Z et $-\ln(-\ln(U))$ suivent la même loi par 4(a) avec la variable aléatoire réelle U suivant la loi uniforme sur $]0,1]$, donc ont même espérance le cas échéant.
   (d) Cette question est en général bien réussie.
6. (a) Ici encore, la formule de transfert affine de densité est souvent sollicitée.
   Que d'erreurs de signe et/ou de sens des inégalités pour ceux qui cherchent dans un premier temps la fonction de répartition de $-Z$, et qui aboutissent à des propositions de densités négatives !
   Quelques confusions parfois pour prouver que la variable aléatoire réelle $-Z$ est à densité : la classe $\mathscr{C}^1$ de la fonction $x \mapsto -x$ est donnée au lieu de s'intéresser à la régularité de la fonction de répartition de $-Z$.
   (b) La convergence est souvent mal faite avec l'oubli de l'argument $e^{-x} + 1 > 0$.
   Certains prennent du temps à essayer de justifier la convergence de l'intégrale sans ensuite chercher à la calculer alors que la façon dont était rédigée la question devait inciter à trouver une méthode permettant de tout faire en même temps.
   (c) Cette question est peu traitée et les hypothèses du changement de variable sont à nouveau peu vérifiées.
   (d) Le résultat est donné dans cette question donc une attention particulière du correcteur est portée sur les étapes et les justifications du raisonnement ou des calculs. Ainsi lorsqu'une expression de $g(t)$ juste apparaît dans l'intégrande alors que la question 6(a) n'a pas été rédigée, avec un résultat de l'intégrale juste au final, le correcteur est en droit de se demander d'où provient un tel résultat et de conclure à une certaine entourloupe du candidat. Il est alors préférable de bien indiquer le théorème utilisé et de préciser les points admis, ici la densité de la variable aléatoire $-Z$.

Il est dommage que les candidats confondent encore densité et fonction de répartition. De plus, les calculs de puissances de l'exponentielle ne sont parfois pas éloignés d'un certain bidouillage.
Enfin, signalons que l'argument d'indépendance de Y et $-Z$ n'est pas toujours évoqué.

7. (a) Cette question est peu traitée.
Certains tentent le théorème de Slutsky. Mais toujours sans succès !
Toute tentative sérieuse fut néanmoins valorisée : quelques étudiants tentent de reproduire la preuve de l'inclusion « $(|X+Y| \geqslant \varepsilon) \subset \left(|X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$ »avec des erreurs dans les epsilon.

   (b) Les hypothèses de la loi faible des grands nombres sont souvent incomplètes. Si l'indépendance des variables aléatoires X_i est souvent citée pour justifier la convergence en probabilité de M_n, elle l'est beaucoup moins en ce qui concerne les X_i^2 pour la convergence en probabilité de C_n.
Quelques étudiants se lancent dans la preuve de la loi faible des grands nombres à l'aide de Bienaymé-Tchebychev, preuve non attendue ici.

   (c) Certains se sentent obligés de justifier que A_n est bien un estimateur de a.
Certains étudiants tentent de calculer le biais, voire le risque quadratique de l'estimateur A_n en tant qu'estimateur de son espérance, ajoutant parfois des confusions avec de plus des formules exotiques (comme $E(\sqrt{Z}) = \sqrt{E(Z)}$).

   (d) Cette question est rarement traitée ; lorsqu'elle l'est, le lien avec 7(a) est bien établi.

8. (a) Cette question est rarement abordée.

   (b) Cette question est trop rarement tentée. Pourtant, elle est très simple, et figurait déjà dans le sujet 2021. Le cas échéant, trop de candidats ne proposent qu'une réponse superficielle : « les 5 courbes se rapprochent de 1 » , sans faire le lien avec les questions précédentes ou avec leurs cours sur les estimateurs. Le mot « convergent » apparaît plus souvent que le mot « estimateur » .