MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

SUJET

- *La probabilité d'un événement G est notée $P(G)$.*

EXERCICE 1

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-2(t-a)} & \text{si } t \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.a) Soit B un réel supérieur ou égal à a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^B 2\,\mathrm{e}^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2\,\mathrm{e}^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

3. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par : $F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-2(x-a)} & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

4. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - a$.

a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c) Donner la valeur de l'espérance de Y.

d) En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 \big(\ln(1+t)\big)^n \, dt$.

1. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $t \geqslant 0$, $g(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$.
   a) On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.
   b) En déduire la valeur de u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs réelles telle que : $f(t) = \ln(1+t)$.
   a) On note f' et f'' respectivement, les dérivées première et seconde de f.
   Calculer pour tout réel t de $[0,1]$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
   b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,1]$ et tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (on donne : $\ln 2 \simeq 0,7$).
   c) Montrer que la fonction f est concave sur $[0,1]$.

3.a) Justifier pour tout réel t de $[0,1]$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant \ln 2$.
   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0.

4.a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$u_{n+1} = 2\big(\ln 2\big)^{n+1} - (n+1)\,u_n\,.$$

   (On pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \longmapsto 1$ est $t \longmapsto 1+t$)
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $(n+1)u_n \leqslant 2\big(\ln 2\big)^{n+1}$.
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   d) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $(n+2)u_n \geqslant 2\big(\ln 2\big)^{n+1}$.
   e) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n u_n}{2\big(\ln 2\big)^{n+1}}$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.a) On note f' la fonction dérivée de f. Calculer pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   Placer les réels 1 et $f(1)$ dans ce tableau.

2.a) Montrer que pour tout entier naturel n, le réel u_n appartient à l'intervalle $[0,1]$.
   b) Établir pour tout réel x de $[0,1]$, l'inégalité suivante : $|f'(x)| \leqslant \dfrac{3}{4}$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - 1|$.
   d) Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
   e) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

3. Soit A, J et I les matrices d'ordre 2 suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $J^2 = 2\,J$.

b) Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante : $A^n = I + \frac{1}{2}(3^n - 1)J$ (on rappelle que $A^0 = I$).

c) Donner sous forme matricielle, l'expression de A^n en fonction de n.

4. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par :

$$p_0 = 1,\ q_0 = 2, \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ \begin{cases} p_{n+1} = 2\,p_n + q_n \\ q_{n+1} = p_n + 2\,q_n \end{cases}.$$

On considère pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice à deux lignes et une colonne X_n définie par : $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

a) Établir par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $X_n = A^n X_0$.

b) En déduire l'expression de X_n en fonction de n et donner les valeurs de p_n et de q_n en fonction de n.

5.a) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité : $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 4

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets, numérotés 1, 2, 3 et 4, d'un carré selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se trouve sur le sommet 1.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 0$) la puce se trouve sur le sommet 1, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 2, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 3, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à l'instant n ($n \geqslant 1$) la puce se trouve sur le sommet 4, elle sera à l'instant $n+1$ sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet occupé par la puce à l'instant n et on a donc $P([X_0 = 1]) = 1$.

1.a) Déterminer la loi de X_1.

b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.

2. Déterminer la loi de X_2.

3.a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{3}\,P([X_n = 1]) + \frac{1}{2}\,P([X_n = 2])\,.$$

b) Exprimer de même, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P([X_{n+1} = 2])$, $P([X_{n+1} = 3])$, $P([X_{n+1} = 4])$ en fonction de $P([X_n = 1])$, $P([X_n = 2])$, $P([X_n = 3])$ et $P([X_n = 4])$.

c) Vérifier que les relations précédentes sont encore valables pour $n = 1$ et $n = 0$.

d) Que vaut pour tout n de $\mathbb{N}$, la somme : $P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4])$?

4. On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on note U_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) \\ P([X_n = 2]) \\ P([X_n = 3]) \end{pmatrix}.$$

De plus, on pose : $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant les relations trouvées précédemment, établir pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation : $U_{n+1} = AU_n + B$.

5.a) Déterminer une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant : $L = AL + B$.

b) Établir pour tout entier naturel n, la relation suivante : $U_n = A^n(U_0 - L) + L$.

6. On pose $C = 6A$. Soit R, D et Q les matrices d'ordre 3 définies par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer RQ. En déduire que R est inversible et donner R^{-1}, où R^{-1} désigne la matrice inverse de la matrice R.

b) Calculer $CR - RD$.

c) En déduire pour tout entier naturel n, la relation suivante : $A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$.

7. On admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$, est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Déterminer U et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n = 4])$.

CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. B étant un réel supérieur ou égal à a, on a :

$$\int_a^B \mathbf{2e^{-2(t-a)}dt} = \left[-e^{-2(t-a)}\right]_a^B \mathbf{= 1 - e^{-2(B-a)}}$$

b. On déduit de la question 1.a que :

$$\lim_{B\to+\infty} \int_a^B 2e^{-2(t-a)}dt = \lim_{B\to+\infty}\left(1-e^{-2(B-a)}\right) = 1$$

Car :

$$\lim_{B\to+\infty}\left(-2(B-a)\right) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)}dt$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty} \mathbf{2e^{-2(t-a)}dt} = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B 2e^{-2(t-a)}dt \mathbf{= 1}$$

2. f est continue sur $]-\infty,a[$ comme fonction constante nulle, et sur $[a,+\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues.
f admet des limites finies à gauche et à droite en a, car :

$$\lim_{t\to a^-} f(t) = \lim_{t\to a^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{t\to a^+} f(t) = \lim_{t\to a^+} 2e^{-2(t-a)} = 2$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ car :

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} > 0 & \text{si } t \geq a \\ 0 \geq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $\int_{-\infty}^a f(t)dt = \int_{-\infty}^a 0dt = 0$ et que $\int_a^{+\infty} f(t)dt = 1$ d'après la question 1.b, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Donc **f peut être considérée comme une densité de probabilité**.

3. Par définition de la fonction de répartition F_X de X, on a, pour tout réel x :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Il vient donc, pour tout réel x strictement négatif :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

Et, pour tout réel x positif ou nul :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_{-\infty}^x 2e^{-2(t-a)}dt = 0 + \left[-e^{-2(t-a)}\right]_a^x = 1 - e^{-2(x-a)}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$\mathbf{F_X(x) = \begin{cases} 1 - 2e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

4.a. On a, pour tout réel x :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - a \leq x) = P(X \leq x + a) = F_X(x+a)$$

On a :

$$x + a \geq a \Leftrightarrow x \geq 0$$

Il en résulte, en utilisant la fonction de répartition F_X de X obtenue à la question 3, que :

$$\mathbf{F_Y(x)} = \begin{cases} 1 - 2e^{-2(x+a-a)} \mathbf{= 1 - 2e^{-2x}} & \textbf{si } \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{0} & \textbf{sinon} \end{cases}$$

b. En posant $\lambda = 2$, la fonction de répartition F_Y de Y se présente sous la forme :

$$\begin{cases} F_Y(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit que **Y suit la loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda = 2}$**.

c. L'espérance de Y est donc :

$$\mathbf{E(Y)} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{= \frac{1}{2}}$$

d. Puisque Y admet une espérance, et que $X = Y + a$, **X admet une espérance** et on a, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E(X)} = E(Y + a) = E(Y) + a \mathbf{= \frac{1}{2} + a}$$

EXERCICE 2

1.a. On a, **pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$** :

$$\mathbf{g'(t)} = \ln(1+t) + (1+t) \cdot \frac{1}{1+t} - 1 = \ln(1+t) + 1 - 1 \mathbf{= \ln(1+t)}$$

b. D'après la question 1.a, g est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, donc :

$$\mathbf{u_1} = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \left[g(t)\right]_0^1 = g(1) - g(0) \mathbf{= 2\ln 2 - 1}$$

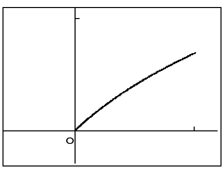
2.a. On a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$\mathbf{f'(t) = \frac{1}{1+t}} \text{ et } \mathbf{f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}}$$

b. f est (strictement) croissante sur $[\mathbf{0,1}]$, car on a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} > 0$$

La courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé est la suivante :



c. f est concave sur $[\mathbf{0,1}]$ car on a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} < 0$$

ESCP-EUROPE

CORRIGÉ

3.a. f étant croissante sur $[0,1]$, on a :

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow f \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2$$

On a donc, **pour tout réel t de $[0,1]$**, l'encadrement suivant :

$$\mathbf{0 \leq \ln(1+t) \leq \ln 2}$$

b. On déduit de l'encadrement obtenu à la question 3.a que, pour tout réel t de $[0,1]$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq (\ln(1+t))^n \leq (\ln 2)^n$$

D'après les inégalités de la moyenne, il vient, pour tout entier naturel n :

$$(1-0)0 \leq \int_0^1 (\ln(1+t))^n \, dt \leq (1-0)(\ln 2)^n$$

Ainsi a-t-on montré que, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n}$$

c. Puisque $-1 < \ln 2 < 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (\ln 2)^n = 0 = \lim_{n \to +\infty} 0$$

L'encadrement de la question 3.b et le théorème des gendarmes assurent que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0**.

4.a. Par définition de u_n, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} \, dt$$

Calculons u_{n+1} à l'aide d'une intégration par parties, en posant, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$u(t) = (\ln(1+t))^{n+1} \qquad u'(t) = (n+1)\frac{(\ln(1+t))^n}{1+t}$$

$$v'(t) = 1 \qquad v(t) = 1+t$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[0,1]$, il vient, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} \, dt = \Big[(1+t)(\ln(1+t))^{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\frac{(\ln(1+t))^n}{1+t}(1+t)\,dt$$

$$= 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)\int_0^1 (\ln(1+t))^n \, dt = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n}$$

b. On déduit de la question 3.b que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \geq 0$$

On a alors, d'après la question 4.a, les équivalences :

$$u_{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \geq 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} \geq (n+1)u_n$$

Ainsi a-t-on montré que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}}$$

MATHÉMATIQUES TECHNOLOGIQUE

c. Par définition de u_n et linéarité de l'intégrale, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\left(\ln(1+t)\right)^{n+1}dt-\int_0^1\left(\ln(1+t)\right)^{n}dt=\int_0^1\left(\left(\ln(1+t)\right)^{n+1}-\left(\ln(1+t)\right)^{n}\right)dt$$
$$=\int_0^1\left(\ln(1+t)-1\right)\left(\ln(1+t)\right)^{n}dt$$

On a vu à la question 3.b que, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel n, on a :

$$\left(\ln(1+t)\right)^{n}\geq 0$$

On a également :

$$t\leq 1\Rightarrow 1+t\leq 2\Rightarrow 1+t\leq e\Rightarrow \ln(1+t)\leq 1\Rightarrow \ln(1+t)-1\leq 0$$

Donc, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel n, il vient :

$$\left(\ln(1+t)-1\right)\left(\ln(1+t)\right)^{n}\leq 0$$

Par négativité de l'intégrale d'une fonction négative sur un segment, il en résulte que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n\leq 0$$

Donc **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante**.

d. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n\leq 0$$

On a alors, d'après la question 4.a, les équivalences :

$$u_{n+1}-u_n\leq 0\Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1}-(n+1)u_n-u_n\leq 0\Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1}\leq (n+2)u_n$$

On a donc montré que, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{(n+2)u_n\geq 2(\ln 2)^{n+1}}$$

e. D'après les questions 4.b et 4.d, on a, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+2}\leq u_n\leq\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$$

Il en résulte, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$\frac{n}{n+2}\leq\frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}\leq\frac{n}{n+1}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}=1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}=1$$

Ces deux limites, l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes assurent que :

$$\mathbf{\lim_{\nu\to+\infty}\frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}=1}$$

EXERCICE 3

1.a. On a, **pour tout réel positif ou nul x** :

$$\mathbf{f'(x)}=\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\mathbf{\frac{3}{(x+2)^2}}$$

b. D'après la question 1.a, on a, pour tout réel positif ou nul x :

$$f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0$$

On a :

$$\mathbf{f(0)=\frac{1}{2}} \text{ et } \mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} \mathbf{= 2}$$

D'où le tableau des variations de f, en y plaçant les réels 1 et $f(1)$:

x	0		1		$+\infty$
f'			$+$		
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

2.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$0 \le u_n \le 1$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$0 \le u_0 = \frac{1}{2} \le 1$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$0 \le u_n \le 1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$0 \le u_{n+1} \le 1$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \le u_n \le 1 \Rightarrow f(0) \le u_{n+1} = f(u_n) \le f(1)$$

Puisque $f(0) = \frac{1}{2} \ge 0$ et $f(1) = 1$, il vient :

$$0 \le u_{n+1} \le 1$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n, le réel $\mathbf{u_n}$ appartient à l'intervalle $\mathbf{[0,1]}$**.

b. D'après la question 1.a, on sait que, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$|f'(x)| = \left|\frac{3}{(x+2)^2}\right| = \frac{3}{(x+2)^2}$$

On a :

$$x \ge 0 \Rightarrow x+2 \ge 2 \Rightarrow (x+2)^2 \ge 4 \Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{(x+2)^2} \le \frac{3}{4}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x de $\mathbf{[0,1]}$**, l'inégalité suivante :

$$\mathbf{|f'(x)| \le \frac{3}{4}}$$

c. f est dérivable sur $[0,1]$, et d'après la question 2.b, on a, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$\left|f^{'}(x)\right| \leq \frac{3}{4}$$

De plus, d'après la question 2.a, u_n appartient à $[0,1]$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout entier naturel n :

$$\left|f(u_n) - f(1)\right| \leq \frac{3}{4}\left|u_n - 1\right|$$

Puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(1) = 1$, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\boldsymbol{\left|u_{n+1} - 1\right| \leq \frac{3}{4}\left|u_n - 1\right|}$$

d. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$\left|u_n - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$\left|u_0 - 1\right| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$\left|u_n - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$\left|u_{n+1} - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.c :

$$\left|u_{n+1} - 1\right| \leq \frac{3}{4}\left|u_n - \alpha\right| \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\boldsymbol{\left|u_n - 1\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

e. Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Cette limite, l'inégalité de la question 2.d, ainsi que le théorème des gendarmes, assurent que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente** et que :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

3.a. Les calculs donnent :

$$\mathbf{J^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{2J}$$

b. La relation peut s'établir en utilisant la formule du binôme de Newton, ou par récurrence.
Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$I + \frac{1}{2}\left(3^0 - 1\right)J = I + 0J = I = A^0$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)J$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J\right)(I + J) = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J + J + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J^2$$

Puisque, d'après la question 3.a, $J^2 = 2J$, il vient :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J + J + \left(3^n - 1\right)J = I + \left(\frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) + 1 + \left(3^n - 1\right)\right)J = I + \left(\frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2}\right)J$$

Soit, après simplification :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)J$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J}$$

c. D'après la question 3.a, on a, pour tout entier naturel n :

$$A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) + 1 & \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) \\ \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) + 1 \end{pmatrix}$$

Après simplification, il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(3^n + 1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) \\ \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n + 1\right) \end{pmatrix}}$$

4.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$X_n = A^n X_0$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$A^0X_0 = IX_0 = X_0$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_n = A^nX_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1}X_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_n + q_n \\ p_n + 2q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{X_n = A^nX_0}$$

b. D'après les questions 4.a et 3.c, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n+1) & \frac{1}{2}(3^n-1) \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & \frac{1}{2}(3^n+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n+1)+3^n-1 \\ \frac{1}{2}(3^n-1)+3^n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\cdot 3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{n+1}-1) \\ \frac{1}{2}(3^{n+1}+1) \end{pmatrix}$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{p_n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)} \text{ et } \mathbf{q_n = \frac{1}{2}(3^{n+1}+1)}$$

5.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{2} = u_0$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{2\frac{p_n}{q_n} + 1}{\frac{p_n}{q_n} + 2} = \frac{\frac{2p_n + q_n}{q_n}}{\frac{p_n + 2q_n}{q_n}} = \frac{2p_n + q_n}{p_n + 2q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{u_n = \frac{p_n}{q_n}}$$

b. Il résulte des questions 5.a et 4.b qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n} = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)}{\frac{1}{2}\left(3^{n+1} + 1\right)} = \mathbf{\frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1} + 1}}$$

Il vient donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1} + 1} = 1$$

Car :

$$\lim_{n \to +\infty} 3^{n+1} = +\infty \ \left(\text{car } 3 > 1\right) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

Ainsi a-t-on **retrouvé la limite de la suite** $\left(\mathbf{u_n}\right)_{\mathbf{n \in \mathbb{N}}}$, obtenue à la question 2.e.

EXERCICE 4

1.a. La puce se trouvant sur le sommet 1 à l'instant 0, elle sera à l'instant 1 sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

La loi de probabilité de X_1 est donc donnée par le tableau :

k	**1**	**3**
$\mathbf{P([X_1 = k])}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$

b. L'espérance de X_1 est donc :

$$\mathbf{E(X_1)} = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

On a :

$$E\left(X_1^2\right) = \frac{2}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 3^2 = \frac{11}{3}$$

On en déduit, par la formule de Koenig-Huygens, que :

$$\mathbf{V(X_1)} = E\left(X_1^2\right) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{11}{3} - \frac{25}{9} = \mathbf{\frac{8}{9}}$$

2. Si la puce se trouve sur le sommet 1 à l'instant 1, elle sera à l'instant 2 sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$; si elle se trouve sur le sommet 3 à l'instant 1, elle sera à l'instant 2 sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$P([X_2=1])=P([X_2=1]\cap[X_1=1])=P([X_1=1])P_{[X_1=1]}([X_2=1])=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P([X_2=2])=P([X_2=2]\cap[X_1=3])=P([X_1=3])P_{[X_1=3]}([X_2=2])=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P([X_2=3])=P([X_2=3]\cap[X_1=1])=P([X_1=1])P_{[X_1=1]}([X_2=3])=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P([X_2=4])=P([X_2=4]\cap[X_1=3])=P([X_1=3])P_{[X_1=3]}([X_2=4])=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

La loi de probabilité de X_2 est donc donnée par le tableau :

k	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{P([X_2=k])}$	$\mathbf{\frac{4}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$

3.a. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X_n=1],[X_n=2],[X_n=3],[X_n=4]\}$, on obtient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$P([X_{n+1}=1])=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k]\cap[X_{n+1}=1])=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=1])$$

D'après les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1])=\frac{2}{3}\ ,\ P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1])=\frac{1}{2}\ \text{et}\ P_{[X_n=3]}([X_{n+1}=1])=P_{[X_n=4]}([X_{n+1}=1])=0$$

On a donc, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{P([X_{n+1}=1])=\frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])}$$

b. On obtient de même, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{P([X_{n+1}=2])}=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=2])=\mathbf{\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{1}{3}P([X_n=4])}$$

$$\mathbf{P([X_{n+1}=3])}=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=3])=\mathbf{\frac{1}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])}$$

$$\mathbf{P([X_{n+1}=4])}=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=4])=\mathbf{\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{2}{3}P([X_n=4])}$$

c. Puisque la puce se trouve sur le sommet 1 à l'instant 0, on a :

$$P([X_0=1])=1\ \text{et}\ P([X_0=2])=P([X_0=3])=P([X_0=4])=0$$

Donc il vient, d'après la question 1.a :

$$\frac{2}{3}P([X_0=1])+\frac{1}{2}P([X_0=2])=\frac{2}{3}=P([X_1=1])$$

$$\frac{1}{2}P([X_0=3])+\frac{1}{3}P([X_0=4])=0=P([X_1=2])$$
$$\frac{1}{3}P([X_0=1])+\frac{1}{2}P([X_0=2])=\frac{1}{3}=P([X_1=3])$$
$$\frac{1}{2}P([X_0=3])+\frac{2}{3}P([X_0=4])=0=P([X_1=4])$$

D'après les questions 1.a et 2, il vient :

$$\frac{2}{3}P([X_1=1])+\frac{1}{2}P([X_1=2])=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=P([X_2=1])$$
$$\frac{1}{2}P([X_1=3])+\frac{1}{3}P([X_1=4])=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P([X_2=2])$$
$$\frac{1}{3}P([X_1=1])+\frac{1}{2}P([X_1=2])=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}=P([X_2=3])$$
$$\frac{1}{2}P([X_1=3])+\frac{2}{3}P([X_1=4])=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P([X_2=4])$$

Ainsi **les relations précédentes sont-elles encore valables pour $\mathbf{n=1}$ et $\mathbf{n=0}$**.

d. Puisque $\{[X_n=1],[X_n=2],[X_n=3],[X_n=4]\}$ est un système complet d'événements, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{P([X_n=1])+P([X_n=2])+P([X_n=3])+P([X_n=4])=1}$$

4. D'après la question 3.c, on a, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}P([X_{n+1}=1])\\P([X_{n+1}=2])\\P([X_{n+1}=3])\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\\\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{1}{3}P([X_n=4])\\\frac{1}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\end{pmatrix}$$

D'après la question 3.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$P([X_n=4])=1-P([X_n=1])-P([X_n=2])-P([X_n=3])$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\\-\frac{1}{3}P([X_n=1])-\frac{1}{3}P([X_n=2])+\frac{1}{6}P([X_n=3])+\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P([X_n=1])\\P([X_n=2])\\P([X_n=3])\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&3&0\\-2&-2&1\\2&3&0\end{pmatrix}U_n+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=AU_n+B$$

On a bien établi, **pour tout entier naturel n**, la relation :

$$\mathbf{U_{n+1} = AU_n + B}$$

5.a. L étant une matrice à trois lignes et une colonne, posons :

$$L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a les équivalences :

$$L = AL + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6}(4x+3y) \\ y = \frac{1}{6}(-2x-2y+z)+\frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{6}(2x+3y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 & (L_1) \\ 2x + 8y - z = 2 & (L_2) \\ 2x + 3y - 6z = 0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 & (L_1) \\ 11y - z = 2 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 6y - 6z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y & (L_1) \\ 10y = 2 & (L_2) \\ y = z & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{10} \\ y = z = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant $\mathbf{L = AL + B}$ est donc :

$$\mathbf{L = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0(U_0 - L) + L = I(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$U_{n+1} = A^{n+1}(U_0 - L) + L$$

On a, d'après la question 4, l'hypothèse de récurrence et la question 5.b :

$$U_{n+1} = AU_n + B = A\left(A^n(U_0 - L) + L\right) + B = A^{n+1}(U_0 - L) + AL + B = A^{n+1}(U_0 - L) + L$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{U_n = A^n\left(U_0 - L\right) + L}$$

6.a. Le calcul donne, en notant I la matrice identité d'ordre trois :

$$RQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$R\left(\frac{1}{10}Q\right) = I$$

Ceci prouve que **R est inversible** et que :

$$\mathbf{R^{-1} = \frac{1}{10}Q}$$

b. En notant 0 la matrice carrée nulle d'ordre 3, le calcul donne :

$$CR - RD = 6AR - RD = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi a-t-on :

$$\mathbf{CR - RD = 0}$$

c. D'après la question 6.b, on a les équivalences :

$$CR - RD = 0 \Leftrightarrow CR = RD \Leftrightarrow 6AR = RD \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}RDR^{-1}$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^0 RD^0R^{-1} = RIR^{-1} = RR^{-1} = I = A^0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^{n+1}R^{-1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et le début de cette question :

$$A^{n+1} = A^nA = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}\frac{1}{6}RDR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^nIDR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^{n+1}R^{-1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}}$$

7. D'après les questions 5.b et 6.c, il vient, pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}(U_0 - L) + L$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a, pour tout entier naturel n :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n D^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{6} < 1$, $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0,\ \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Il vient donc, puisqu'on admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$ est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\mathbf{U} = \lim_{n\to+\infty} U_n = R\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n D^n\right)R^{-1}(U_0 - L) + L = R0R^{-1}(U_0 - L) + L = L = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Par définition de U_n, il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} P([X_n = 1]) = \frac{3}{10} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} P([X_n = 2]) = \lim_{n\to+\infty} P([X_n = 1]) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

D'après la question 3.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$P([X_n = 4]) = 1 - P([X_n = 1]) - P([X_n = 2]) - P([X_n = 3])$$

Il vient donc :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} P([X_n = 4])} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - P([X_n = 1]) - P([X_n = 2]) - P([X_n = 3])\right) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$$