ESCP 2015

Exercice 1 :

1) a) Beaucoup de candidats sont passés totalement à côté de l'exercice car ils ont cru qu'il fallait primitiver $\frac{e^t}{t}$.

Or, c'est bien $\frac{e^t}{t}dt$ et pas $\frac{e^x}{x}dx$. De plus, juste avant les questions, l'énoncé précise bien que "on ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définie $f(x)$".

Il suffisait juste de poser une relation avec $G(t)$.

On a $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$

$$f(x) = \int_1^x g(t)\, dt = [G(t)]_1^x = G(x) - G(1)$$

$$\boxed{f(x) = G(x) - G(1)}$$

b) Attention !! Ne commencez pas à chercher des théorèmes douteux et surtout faux pour justifier de la dérivabilité de $f(x)$ et pour affirmer que $f(x) = \frac{e^x}{x}$, même si vous vous doutez que c'est ça le résultat.

Vous venez d'établir une formule pour exprimer $f(x)$, alors utilisez-la.

D'après 1.a) on a $f(x) = G(x) - G(1)$

$$f'(x) = (G(x))' - (G(1))'$$

$$= g(x) - 0 = g(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x}{x}}$$

c) Encore une fois utiliser la formule établie en 1.a) nous facilitera grandement la tâche.

Après, un bon élève en maths sait que $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

D'après 1.a) on a $f(x) = \ln(x) - \ln(1)$

$$f(1) = \ln(1) - \ln(1) = 0$$

$$\boxed{f(1) = 0}$$

2) Premier élément important, il ne faut pas oublier que $x \geq 1$ dans cette question donc il faut construire l'inégalité à partir de cette information.

Ensuite, il faut bien faire attention à ne pas mélanger les t et les x (mettre dt à la fin prend tout son sens dans cet exercice pour savoir quelle variable est primitivée).

On a $x \geq 1$ et e^t est une fonction croissante donc on a :

$$e^t \geq e$$

$$\frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$$

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \geq e\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

⚠ n'oubliez pas le 1 ! avec ln

Or, $e\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = e\left[\ln|t|\right]_1^x = e\ln(x) - e\ln(1) = e\ln(x)$

$$\boxed{f(x) \geq e\ln(x)}$$

b) Il suffit juste d'utiliser l'inégalité précédente.

D'après 2.a) on a $f(x) \geq e\ln(x)$

Or, $\lim_{x \to +\infty} e\ln(x) = +\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

3) a) Là aussi, il faut bien faire attention à l'intervalle dans lequel on travaille.

Il faut également prendre en compte le fait que $t \leq x$.

On a $x \in [0;1]$ donc :

$$0 \leq t \leq x \leq 1$$

$$e^t \leq e^x$$

$$\frac{e^t}{t} \leq \frac{e^x}{t}$$

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \leq e^x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$f(x) \leq e^x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

Or, $e^x \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = e^x [\ln|t|]_1^x = e^x\ln(x) - e^x\ln(1)$
$= e^x\ln(x)$.

On a donc :

$$\boxed{f(x) \leq e^x\ln(x)}$$

b) D'après 3.a) on a $f(x) \leq e^x \ln(x)$

Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x \ln(x) = -\infty$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$$

5) Pour dresser votre tableau de variations, vous devez réutiliser toutes les infos précédentes soit : - les limites
- $f(1) = 0$
- $f'(x) = \frac{e^x}{x}$

x	0^+		1		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$			$+$		

→ car $\frac{e^x}{x} \geq 0$ pour $x \in]0;+\infty[$

5) a) Cette fois-ci, c'est du calcul de dérivée tout simplement, avec la formule $\frac{U}{V} = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

On pensera à factoriser pour que ce soit plus simple par la suite.

D'après 1.b) on a $f'(x) = \frac{e^x}{x}$

$$f''(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}}$$

b) Avoir factorisé $f''(x)$ vous permet de voir directement que le point d'inflexion (là où $f''(x)$ s'annule) est 1.

D'après 5. a) on a $f''(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

$\boxed{A = 1}$ ou plutôt $A(1,0)$ car on demande les coordonnées (donc un graphique).

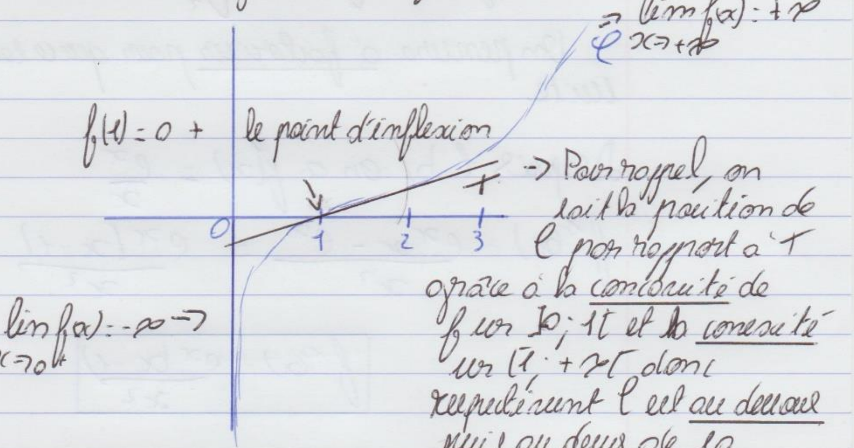
c) Il suffit de connaître la formule $T = f'(A)(x-A) + f(A)$.

D'après 5. b) on a $A = 1$. par conséquent :

$$T = f'(A)(x-A) + f(A)$$
$$= f'(1)(x-1) + f(1)$$ ↗ en 1. c) on a vu que $f(1) = 0$
$$= e(x-1)$$

$$\boxed{T = e(x-1)}$$

d) Pour tracer la courbe, aidez-vous non seulement des tableaux de variations mais également de $f''(x)$ et de T.



6) a) Lorsque vous avez une question du type $f(a) = a$, il faut mobiliser le théorème de la bijection et l'utiliser correctement, c'est à dire : - dire que f est continue et pourquoi
- f est strictement monotone (donc croissant ou décroissant)
- donner l'intervalle où se fait la bijection.

On a $\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} \, dt = f(u_n)$

Or, d'après 1.b) on sait que f est dérivable donc f est continue sur $]0;+\infty[$.

De plus, d'après le tableau de variations en 5) on sait que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

f réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.*

Par conséquent, il existe bien sur $\mathbb{N}$ un unique réel u_n tel que :

$$\boxed{f(u_n) = n}$$

* $f(]0;+\infty[) =]\lim_{x \to 0^+} f(x) ; \lim_{x \to +\infty} f(x)[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{N}$

b) Le sujet est gentil en vous donnant l'astuce pour pouvoir affirmer que u_n est croissante.

On a $u_n < u_{n+1}$

Or, puisque, d'après 5.), f est strictement croissante, on a donc :

$$\boxed{f(u_n) < f(u_{n+1})}$$

u_n est donc bien ~~dé~~croissante.

c) D'après 6. b) on a u_n croissante. Or, u_n n'a aucune majoration. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 2 :

1) a) Il suffit de connaître les propriétés de base des matrices 2x2. si $\Delta = ad - bc = 0$, donc M n'est pas inversible.

On a $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Delta = ad - bc = 1 \times (-1) - (-1) \times 1 = -1 + 1 = 0$

On a $\boxed{\Delta = 0}$ M n'est pas inversible si $a = b = -1$.

b) En calculant d'abord M^2, on remarque $M^2 = 0$ donc le reste de la question vient tout seul.

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{M^2 = 0}$$

Pour $n \geq 2$ on a $M^n = M^{n-2} M^2$. Par conséquent :

$$\boxed{M^n = 0 \text{ pour } n \geq 2}$$

2) a) On a $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. $\Delta = b - a = a - a = 0$

$\boxed{\Delta = 0}$ M n'est pas inversible si $a = b$

b) Le plus simple est de procéder par récurrence, comme souvent avec des questions du type "pour $n \geq a$"

Initialisation : pour $n=2$ on a $(1+a)\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix} = (1+a)\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & a\end{pmatrix}$

⚠ On oublie pas que pour cette question $a=b$ $= \begin{pmatrix}1+a & a+a^2\\ 1+a & a+a^2\end{pmatrix}$

Or, $M^2 = \begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a & a+ab\\ 1+b & a+b^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a & a+a^2\\ 1+a & a+a^2\end{pmatrix}$

$M^2 = (1+a)M$ ⟹ ce sera utile pour l'hérédité.

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n=2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $(1+a)^{n-1}M = M^n$

et on a $M^2 = (1+a)M$.

$$M^n = (1+a)^{n-1}M$$
$$M \cdot M^n = (1+a)^{n-1}M^2$$
$$M^{n+1} = (1+a)^{n-1}(1+a)M$$
$$\boxed{M^{n+1} = (1+a)^n M}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant !

3) D'après 2.a) on a M non inversible si $a=b$ car $\Delta=0$.

Par conséquent, si $a \neq b$, on a $\Delta = b-a \neq 0$.

donc M sera inversible.

5) a) Cette question peut paraître compliquée pour un élève peu habile en maths mais il suffit pourtant d'écrire les lois de X et Y sous forme de somme et d'utiliser l'indépendance pour trouver l'égalité demandée.

On a $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \cap \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)$

Or, X et Y sont indépendantes donc on a :

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)$$

$$\boxed{P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y=k)}$$

b) Il faut déjà comprendre, entre p et q, quelle variable nous aurons le droit de sortir de la somme, en l'occurrence ici c'est p car q dépend de k comme la somme.

Ensuite il faut connaître les propriétés de base sur les puissances pour savoir que $q^{ab} = (q^a)^b$

De cette manière, nous pourrons obtenir le terme général d'une série géométrique de raison q avec $0<q<1$ qui donne $\sum q = \frac{1}{1-q}$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2}$$

$$= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-2}$$

Par changement d'indice, on reconnaît donc le terme général d'une série géométrique de raison q avec $0<q<1$, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2}$$
$$= \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$$
$$= \frac{p^2}{1-(1-2p+p^2)}$$
$$= \frac{p^2}{2p-p^2}$$
$$= \frac{p^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p} = \frac{p}{2-(1-q)}$$
$$= \frac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p}{1+q}}$$

c) A étant l'évènement "M est inversible", on a donc $1-P(X=Y) = P(A)$ car on a vu que M n'est inversible que si a et b étaient différents !

Il faut donc arriver à faire le lien entre $P(X=Y)$ et le calcul précédent.

D'après 3) M est inversible si et seulement si $X \neq Y$ donc

$$P(A) = 1 - P(X=Y)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) \times P(Y=k)$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \times p(1-p)^{k-1}$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{k-1} \times q^{k-1}$$
$$= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$$
$$= 1 - \frac{p}{1+q} = \frac{1+q-p}{1+q} = \frac{1+q-(1-q)}{1+q} = \frac{2q}{1+q}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2q}{1+q}}$$

5) a) Il suffit de connaître la <u>formule du binôme de Newton.</u>

Pour $(x+1)^{2n}$, <u>le $2n$ ne doit pas vous gêner</u>. Vous gardez la même formule en remplaçant n par $2n$.

Grâce à la formule du binôme de newton on a :

$$(x+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} \text{ soit}$$

$$\boxed{(x+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

De même, on a : $(x+1)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} x^k 1^{2n-k}$ soit

$$\boxed{(x+1)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} x^k}$$

b) On a $(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n$ soit

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

$\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le polynôme $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$,

donc le membre de droite de l'égalité le terme de degré n est obtenu comme somme des termes $\binom{n}{k} x^k \binom{n}{i} x^i$ avec $k+i=n$

donc on a : $\binom{2n}{n} = \sum_{k+i=n} \binom{n}{k}\binom{n}{i} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

c) On conduit le même raisonnement dans la question 5.).

On a $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \cap \sum_{k=0}^{n} P(Y=k)$

Or, puisque X et Y sont indépendantes on a :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \times P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{2}$$

$$= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

$$= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

$$\boxed{P(X=Y) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

d) Les questions précédentes étaient assez complexes donc même si vous n'y êtes pas arrivés, vous pouvez toujours trouver P(A) car le sujet donne $P(X=Y)$ cette fois.

On a $P(A) = 1 - P(X=Y)$

$$= 1 - \frac{4}{n}\binom{2n}{n}$$

$$\boxed{P(A) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

Exercice 3 :

1) C'est du cours, c'est cadeau.

On a $T \sim \mathcal{E}(1)$, on a donc :

$$\boxed{E(T) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{V(T) = 1}$$

Pour rappel, pour $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$ on a $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

A savoir par cœur !!

2) a) Question de densité des plus classiques. On rappelle les trois critères : - positive
- continue
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Attention pour le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ ici ! Ne cherchez pas la primitive de $t\,e^{-t}\,dt$. Si on vous a demandé l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1, c'est pas pour rien !

En effet, $E(T)$ s'écrit $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt$ donc on a directement le résultat grâce à 1).

continuité et signe : - pour $t < 0$ on a $f(t) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$ et f est continue et positive sur $]-\infty; 0[$.

- Pour $f(0)$, on a $f(0) = 0$ donc f est continue et positive en 0.

- Pour $t \geq 0$ on a $f(t) = t e^{-t}$ avec $t \geq 0$ et $e^{-t} \geq 0$

donc f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$: $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 1$ d'après 1) car

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t}\,dt = 1.$$

Conclusion : f est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

f est bien une densité de probabilité.

b) Cette fois, le sujet vous précise bien que vous devez utiliser $T \sim \mathcal{E}(1)$.

Mais il faut également penser à la formule de Koenig-Huygens de la variance.

$E(X)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt.$$

Or, d'après 1) on a $V(T) = 1$, c'est à dire, grâce à la formule de Koenig-Huygens,

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2$$
$$1 = E(T^2) - 1$$

$$\boxed{E(T^2) = 2}$$

Or, $E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$. Par conséquent, on a :

$$\boxed{E(X) = 2}$$

3) Cette fois-ci par contre, vous ne pourrez pas esquiver et être obligé d'utiliser une intégration par partie. On remarquera que $(t)' = 1$ pour le choix de u et v.

On a $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

- Pour $x < 0$, on a $f(t) = 0$.

- Pour $x \geq 0$, on pose $u' = e^{-t}$ $\quad u = -e^{-t}$

$v = t$ $\quad v' = 1$

Grâce à une intégration par partie on a alors :

$$\int_0^x f(t)\,dt = [-t e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= -x e^{-x} + [-e^{-t}]_0^x$$

$$= -x e^{-x} + (-e^{-x} + 1)$$

$$= 1 - x e^{-x} - e^{-x}$$

$$= 1 - (x+1) e^{-x}$$

On a donc bien :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - (x+1) e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5) a) C'est une des rares fois où le sujet n'a pas expliqué ce qui représente le min entre plusieurs variables aléatoires, d'où l'importance de connaître par cœur ce que sont les fonctions min et max.

On oubliera pas de mentionner l'indépendance entre X_1 et X_2.

C'est ça la déf de min

On a $Z = \min(X_1, X_2)$

$= P(X_1 > x) \cap P(X_2 > x)$

Or, X_1 et X_2 sont indépendantes donc :

$$\boxed{P(Z > x) = P(X_1 > x) \times P(X_2 > x)}$$

b) Il ne faut pas oublier que $H_n(x)$ est donnée par $P(Z \leq x)$ soit $1 - P(Z > x)$.

D'après 5. a) on a $P(Z > x) = P(X_1 > x) \times P(X_2 > x)$

$$= (1 - P(X_1 \leq x)) \times (1 - P(X_2 \leq x))$$

$$= (1 - (1 - (x+1)e^{-x}))(1 - (1 - (x+1)e^{-x}))$$

$$= (x+1)e^{-x} \times (x+1)e^{-x}$$

$$= (x+1)^2 e^{-2x}$$

Or, $P(Z \leq x) = 1 - P(Z > x)$ donc :

$$P(Z \leq x) = 1 - (x+1)^2 e^{-2x}$$

Ainsi on a :

$$H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Maintenant que vous avez la fonction de répartition de H, vous n'avez plus qu'à la dériver pour obtenir la densité. C'est le raisonnement inverse de la question 3.).

D'après 5. b) on a $H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

c'est la forme $(UV)' = U'V + UV'$

$$H'(x) = -(x^2 + 2x + 1)e^{-2x}$$
$$= -((2x+2)e^{-2x} - 2(x^2 + 2x + 1)e^{-2x})$$
$$= -(2xe^{-2x} + 2e^{-2x} - 2x^2 e^{-2x} - 4xe^{-x^2} - 2e^{-2x})$$
$$= -(2x(-x-1)e^{-2x})$$
$$= -(-2x(x+1)e^{-2x})$$
$$= 2x(x+1)e^{-2x}$$

On a donc bien :

$$h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5) a) La question est un simple calcul de dérivée de la forme $(UV)' = U'V + UV'$ mais les calculs sont longs et laborieux donc il faut y aller avec prudence pour éviter les erreurs de calcul.

$$g(x) = -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}$$

$$g'(x) = -\left(3x^2 + \frac{10}{2}x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - 2\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}$$

$$= -\left(3x^2 + \frac{10}{2}x + \frac{5}{2} - 2x^3 - \frac{10}{2}x^2 - \frac{10}{2}x - \frac{10}{4}\right)e^{-2x}$$

$$= -\left(-2x^2 - 2x^3\right)e^{-2x}$$

$$= 2x^2(1+x)e^{-2x}$$

$$\boxed{g'(x) = 2x^2(1+x)e^{-2x}}$$

b) $E(Z)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x h(x)\,dx$ converge.

Pour $x < 0$ on a $h(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{0} x h(x)\,dx = 0$.

$$\int_0^{+\infty} x h(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2(1+x)e^{-2x} = \int_0^{+\infty} g'(x) = [g(x)]_0^A$$

$$= \left[-\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x}\right]_0^A$$

$$= -\left(A^3 + \frac{5}{2}A^2 + \frac{5}{2}A + \frac{5}{4}\right)e^{-2A} + \frac{5}{4}$$

Or $\lim_{A \to +\infty} e^{-2A} = 0$ donc $\lim_{A \to +\infty} -\left(A^3 + \frac{5}{2}A^2 + \frac{5}{2}A + \frac{5}{4}\right)e^{-2A} = 0$.

À ne pas oublier !

Par la relation de Chasles on a alors : $\boxed{E(Z) = \frac{5}{4}}$

6) a) Il faut bien comprendre concrètement ce que représente min et max pour aborder la question.

On a Z qui représente la plus petite valeur de x entre X_1 et X_2 et W la plus grande.

Or, peu importe laquelle de X_1 et X_2 est la plus grande et la plus petite, si on additionne X_1 et X_2, on additionne alors le max entre X_1 et X_2 et le min entre X_1 et X_2, soit W et Z.

On a $Z = \min(X_1, X_2)$ et $W = \max(X_1, X_2)$.

Dès lors, peu importe que $X_1 < X_2$ ou $X_2 < X_1$, on a :

$$\boxed{Z + W = X_1 + X_2}$$

b) Vous n'avez qu'à utiliser la relation précédente. N'oubliez pas la linéarité de l'espérance.

D'après 6.a) on a $Z + W = X_1 + X_2$

Par conséquent : $\boxed{W = X_1 + X_2 - Z}$

$$\begin{aligned}
E(W) &= E(X_1 + X_2 - Z) \\
&= E(X_1) + E(X_2) - E(Z) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= 2 + 2 - \frac{5}{4} \\
&= 4 - \frac{5}{4} \\
&= \frac{16 - 5}{4} = \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(W) = \frac{11}{4}}$$

c) Là par contre, il faut bien penser à distinguer les cas où $X_1 < X_2$ et $X_2 < X_1$.

Il faut également prendre en compte le fait que il y a les valeurs obtient

- si $X_1 < X_2$, on a $|X_1 - X_2| = Z - W$

car $Z = \min(X_1, X_2) = X_1$ et $W = \max(X_1, X_2) = X_2$.

Or $|X_1 - X_2| = X_2 - X_1$ car $X_1 - X_2 \leq 0$. On a donc

$$\boxed{|X_1 - X_2| = W - Z}$$

- si $X_2 < X_1$, on a $|X_1 - X_2| = W - Z$.

car $Z = \min(X_1, X_2) = X_2$ et $W = \max(X_1, X_2) = X_2$.

Or $|X_1 - X_2| = X_1 - X_2$ car $X_1 - X_2 \geq 0$. On a donc

$$\boxed{|X_1 - X_2| = W - Z}$$

Donc les deux cas on a donc :

$$\boxed{|X_1 - X_2| = W - Z}$$

d) $E(|X_1 - X_2|) = E(W - Z)$

$= E(W) - E(Z)$ par linéarité de l'espérance

$= \frac{11}{4} - \frac{5}{4}$

$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{E(|X_1 - X_2|) = \frac{3}{2}}$$

Exercice 4 :

1) $X_0 = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad X_1 = \begin{pmatrix} U_3 \\ U_2 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 - \frac{5}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) a) Question incontournable qu'il faut absolument maîtriser.
Le simple fait de faire le produit AX_n donne X_{n+1}, comme toujours dans cette question.

$$AX_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{n+2} \\ U_{n+1} \\ U_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U_{n+2} - \frac{5}{5}U_{n+1} + \frac{1}{5}U_n \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{n+3} \\ U_{n+2} \\ U_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a donc bien : $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$

b) Et comme à chaque fois après nous avoir demandé de montrer que $X_{n+1} = AX_n$, le sujet nous demande de montrer que $X_n = A^n X_0$, car la question précédente est indispensable pour effectuer la récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $A^0 X_0 = X_0$
$I X_0 = X_0$
$X_0 = X_0$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $X_n = A^n X_0$ et d'après 2.a) on a $X_{n+1} = AX_n$.

$$X_n = A^n X_0$$
$$AX_n = A.A^n X_0$$

$$\boxed{X_{n+1} = A^{n+1} X_0}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

3) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

On a $\boxed{PQ = 4I}$

ce qui donne : $P \frac{1}{4} Q = I$.

Par conséquent, P est inversible et on a :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4} Q}$$

b) $PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$AP = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

On a $\boxed{AP = PT}$ ↗ cette relation était prévisible ! Si vous ne la trouvez pas, c'est qu'il y a une erreur de calcul.

On en déduit la relation : $AP = PT$

$APP^{-1} = PTP^{-1}$

$$\boxed{A = PTP^{-1}}$$

⚠ la récurrence qui suit est à connaître par cœur ! !

<u>Initialisation</u> pour $n = 0$ on a $A^0 = PT^0P^{-1}$

$I = PIP^{-1}$

$= PP^{-1}$

$= I$

La propriété est bien vraie pour le premier terme $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un n entier quelconque, qu'en est-il au rang suivant ?

D'après l'hypothèse de récurrence on a $A^n = PT^nP^{-1}$ et on sait que $A = PTP^{-1}$.

$$A^n = PT^nP^{-1}$$
$$A.A^n = APT^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PTP^{-1}PT^nP^{-1}$$
$$A^{n+1} = PT.T^nP^{-1}$$

$$\boxed{A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}}$$

Conclusion : Par récurrence, la propriété est bien vraie pour tout n entier au rang suivant.

5/a) On a $N = T - D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{N^2 = 0}$$

il est assez évident que dans une question du type " Déterminer N^h pour $h \geq a$ ", la matrice deviendra nulle pour une certaine puissance.

Or, pour $h \geq 2$ on a $N^h = N^{h-2}N^2 = 0$

On a donc : $\boxed{N^h = 0 \text{ pour } h \geq 2}$

b) $DN = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$ND = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\boxed{DN = ND}$ → Si on nous demande de vérifier cela, ce n'est pas pour rien. Cela peut en effet être utile dans la formule du binôme de Newton par exemple.

On a $N = T - D$ donc :

$$\boxed{T = N + D}$$

Grâce à la formule du binôme de Newton on a :

$T^n = (N+D)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} N^k D^{n-k}$

$= \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N D^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 D^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} N^n D^0$

Or, d'après 5.a) on a $N^k = 0$ pour $k \geq 2$ donc :

$T^n = D^n + n N D^{n-1}$. Or, D est une matrice diagonale donc on a :

$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n-1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc bien :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Les calculs sont longs et lourds donc allez-y par étape pour éviter les erreurs de calcul.

D'après 3.b) on a $A^n = P T^n P^{-1}$

$$P T^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2(n+2) \\ 2^n & 2 & 4(n+1) \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

$A^n = P T^n P^{-1} = P T^n \frac{1}{4} Q$ d'après 3.a)

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2(n+2) \\ 2^n & 2 & 4(n+1) \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n \times 4 - 1 - (n+2) & -4 \times 2^n + 1 + \frac{3}{2}(n+2) & 2^n - \frac{1}{2}(n+2) \\ 2^n \times 4 - 2 - 2(n+1) & -4 \times 2^n + 2 + 3(n+1) & 2^n - (n+1) \\ 2^n \times 4 - 4 - 4n & -4 \times 2^n + 4 + 6n & 2^n - 2n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & -4 \times 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & -4 \times 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & -4 \times 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}$$

5) a) D'après 2. b) on a $X_n = A^n X_0$.

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 5\times 2^n - n - 3 & -5\times 2^n + \frac{3}{2}n + 5 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 5\times 2^n - 2n - 5 & -5\times 2^n + \frac{3}{2}n + 5 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 5\times 2^n - 5n - 5 & -5\times 2^n + 6n + 5 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 5\times 2^n - n - 3 \\ 5\times 2^n - 2n - 5 \\ 5\times 2^n - 5n - 5 \end{pmatrix}$$

On a donc : $\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (5\times 2^n - 5n - 5)}$

b) Attention !! Ne tombez pas dans le piège de dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Certes, c'est vrai, et vous aurez besoin de cette info pour déterminer la limite, mais il faut garder en tête que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \neq \lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 5\times\frac{2^n}{2^n} - 5n\frac{1}{2^n} - 5\times\frac{1}{2^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 5 - \frac{5n}{2^n} - \frac{5}{2^n}$$

Or, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

il faut trouver une façon de l'écrire qui permette d'en déterminer la limite.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\ln(n)}}{e^{n\ln(2)}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n) - n\ln(2)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\ln(n)}{n} - \ln(2)\right)} = 0.$$

Ainsi, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 5}$