CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur en CPGE au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. Les calculs donnent :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 27/4 & 9 & 45/4 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$A^3 - 3A^2 = \begin{pmatrix} 45/4 & 27/2 & 18 \\ 9 & 45/4 & 27/2 \\ 27/4 & 9 & 45/4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 9/2 & 6 \\ 3 & 3 & 9/2 \\ 9/4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 & 0 & 0 \\ 0 & 9/4 & 0 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = \frac{9}{4}I$$

Donc $\mathbf{A^3 - 3A^2}$ **est proportionnelle à I**.

b. On a, d'après la question précédente :

$$A^3 - 3A^2 = \frac{9}{4}I \Leftrightarrow A\left(A^2 - 3A\right) = \frac{9}{4}I \Leftrightarrow A\left(\frac{4}{9}\left(A^2 - 3A\right)\right) = I$$

Ceci prouve que **A est inversible** et que :

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{4}{9}\left(A^2 - 3A\right)}$$

c. Une instruction Scilab permettant de saisir la matrice A est :

```
A=[1,2,1;1/2,1,2;1,1/2,1]
```

d. D'après la question 1.b, une instruction Scilab qui permet de calculer A^{-1} est :

```
4/9*(A^2-3*A)
```

e. Une instruction Scilab, différente de la précédente, permettant aussi de calculer A^{-1} est :

```
inv(A)
```

2. Le résultat obtenu à la question 1.a peut s'écrire :

$$A^3 = 3A^2 + \frac{9}{4}I$$

Il vient donc, **pour tout entier n supérieur ou égal à 3** :

$$\mathbf{A^n} = A^{n-3}A^3 = A^{n-3}\left(3A^2 + \frac{9}{4}I\right) = 3A^{n-3}A^2 + \frac{9}{4}A^{n-3}I = \mathbf{3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}}$$

Le script Scilab suivant a été complété afin qu'il permette de saisir A, puis de calculer et d'afficher A^n pour une valeur de n supérieure ou égale à 2 entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n:')
I=[1,0,0,;0,1,0;0,0,1]
A=[1,2,1;1/2,1,2;1,1/2,1]
```

```
B=A^2
for k=3:n
   C=3*B+(9/4)*I
   I=A
   A=A*I
   B=C
end
disp(B)
```

3.a. Le résultat obtenu à la question 1.a peut s'écrire :

$$A^3 - 3A^2 - \frac{9}{4}I = 0$$

Donc le polynôme $X^3 - 3X^2 - \frac{9}{4}$ est un polynôme annulateur de A ; toute valeur propre de A étant racine d'un polynôme annulateur de A, on a donc, si λ est une valeur propre de :

$$\boldsymbol{\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0}$$

b. On a, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré, du signe de 3 à l'extérieur des racines 0 et 2.
On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Donc le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$		**0**		**2**		$+\infty$
f'		+	**0**	−	**0**	+	
f	$-\infty$	↗	$\boldsymbol{-\frac{9}{4}}$	↘	$\boldsymbol{-\frac{25}{4}}$	↗	$+\infty$

c. On a admis que la matrice A possède au moins une valeur propre λ, et d'après la question 3.a., λ est solution de l'équation $f(x) = 0$.

D'après le tableau de variations de f, f admet un maximum de valeur $-\frac{9}{4}$ sur $]-\infty, 2]$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty, 2]$.
f est continue (comme fonction polynôme) et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, donc f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur $f([2, +\infty[) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right[$; puisque 0 appartient à l'intervalle $\left[-\frac{25}{4}, +\infty\right[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, notée λ_0, dans l'intervalle $[2, +\infty[$.
Donc **A ne possède qu'une seule valeur propre, notée λ_0**.

On a :

$$f(3)=-\frac{9}{4}<f(\lambda_0)=0<f(4)=\frac{55}{4}$$

Puisque f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$, il vient l'encadrement de λ_0 entre deux entiers consécutifs :

$$\mathbf{3<\lambda_0<4}$$

4.a. Puisque $D=P^{-1}AP$, on a :

$$D^3-3D^2-\frac{9}{4}I=\left(P^{-1}AP\right)^3-3\left(P^{-1}AP\right)^2-\frac{9}{4}I=P^{-1}A^3P-3P^{-1}A^2P-\frac{9}{4}I$$

Il en résulte, d'après la question 1.a, que :

$$\mathbf{D^3-3D^2-\frac{9}{4}I}=P^{-1}\left(A^3-3A^2-\frac{9}{4}I\right)P=P^{-1}0P=\mathbf{0}$$

puis en déduire la matrice D.

D est une matrice diagonale d'ordre 3, donc de la forme $D=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$; on a alors :

$$D^3-3D^2-\frac{9}{4}I=\begin{pmatrix}a^3-3a^2-\frac{9}{4}&0&0\\0&b^3-3b^2-\frac{9}{4}&0\\0&0&c^3-3c^2-\frac{9}{4}\end{pmatrix}$$

Il vient donc :

$$D^3-3D^2-\frac{9}{4}I=0\Leftrightarrow a^3-3a^2-\frac{9}{4}=b^3-3b^2-\frac{9}{4}=c^3-3c^2-\frac{9}{4}=0$$

Puis, d'après la question 3.c :

$$a=b=c=\lambda_0$$

On a donc :

$$\mathbf{D=\lambda_0 I}$$

b. On a :

$$D=P^{-1}AP\Leftrightarrow A=PDP^{-1}$$

Puisque d'après la question précédente $D=\lambda_0 I$, il vient :

$$A=P\lambda_0IP^{-1}=\lambda_0PIP^{-1}=\lambda_0I$$

Ce résultat étant absurde, on peut conclure que **A n'est pas diagonalisable**.

EXERCICE 2

1. X (resp. Y) représente le temps d'attente d'un premier « pile » (resp. « face »), au cours de lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » (resp. « face ») vaut $\frac{1}{2}\left(\text{resp. }\frac{1}{2}\right)$, donc **X et Y suivent la loi géométrique de paramètre $\mathbf{p=\frac{1}{2}}$**.

D'après le cours, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X sont :

$$\mathbf{E(X)=\frac{1}{p}=2} \text{ et } \mathbf{V(X)}=\frac{1-p}{p^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\mathbf{2}$$

2. Puisqu'un « pile » et un « face » ne peuvent apparaître au premier lancer, on a :

$$\mathbf{P([X=1]\cap[Y=1])=0}$$

Or on a :

$$P(X=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

Donc :

$$P([X=1]\cap[Y=1])\neq P(X=1)P(Y=1)$$

Ceci prouve que **X et Y ne sont pas indépendantes**.

3.a. Pour tout j supérieur ou égal à 2, l'événement $(Y=j)$ est réalisé si on a obtenu un « face » au j-ème lancer et des « pile » aux lancers précédents, et donc un « pile » au premier lancer ; on a donc :

$$(Y=j)\subset(X=1))$$

Il en résulte que, pour tout j supérieur ou égal à 2, on a :

$$[X=1]\cap[Y=j]=[Y=j]$$

Puis, **pour tout j supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{P([X=1]\cap[Y=j])=P(Y=j)}$$

b. De même qu'à la question précédente, pour tout i supérieur ou égal à 2, l'événement $(X=i)$ est réalisé si on a obtenu un « pile » au i-ème lancer et des « face » aux lancers précédents, et donc un « face » au premier lancer ; on a donc :

$$(X=i)\subset(Y=1))$$

Il en résulte que, pour tout j supérieur ou égal à 2, on a :

$$[X=i]\cap[Y=1]=[X=i]$$

Puis, **pour tout i supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{P([X=i]\cap[Y=1])=P(X=i)}$$

c. Rappelons que X et Y suivent une loi géométrique, donc on a :

$$X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$$

Notons que nécessairement $X=1$ ou $Y=1$ puisque le premier lancer donne nécessairement « pile » ou « face ».

Si $X=1$ (resp. $Y=1$), Y (resp. X) prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, donc on a :

$$\mathbf{(XY)(\Omega)=\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$$

Et la loi de probabilité de XY est donnée, d'après les questions 3.a et 3.b, pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, par :

$$P([XY=k])=P([X=1]\cap[Y=k])+P([X=k]\cap[Y=1])=P(Y=k)+P(X=k)$$

Puisque X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{2}$, il vient, **pour tout**

entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{\mathbf{1}\}$:

$$\mathbf{P}([\mathbf{XY}=\mathbf{k}]) = 2P(X=k) = 2p(1-p)^{k-1} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{k-1}}$$

d. Puisque $(XY)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, sous réserve de convergence, l'espérance de XY est définie par :

$$E(XY) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(XY=k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

On sait que la série $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ est la série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$; elle converge car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et sa somme vaut :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2} = 4$$

Il en résulte que **l'espérance de XY existe**, et a pour valeur :

$$\mathbf{E}(\mathbf{XY}) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 4 - 1 = \mathbf{3}$$

e. La covariance de X et Y se calcule en utilisant la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

On sait d'après la question précédente et la question 1 que :

$$E(XY) = 3 \text{ et } E(X) = E(Y) = 2$$

Il vient donc :

$$\mathbf{cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 3 - 2\cdot 2 = \mathbf{-1}$$

La variance de $X+Y$ se calcule par la formule :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

On sait d'après ce qui précède et la question 1 que :

$$\mathrm{cov}(X,Y) = -1 \text{ et } V(X) = V(Y) = 2$$

Il vient donc :

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = 2 + 2 + 2\cdot(-1) = \mathbf{2}$$

4.a. Rappelons que X et Y suivent une loi géométrique, donc on a :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Notons que nécessairement $X=1$ ou $Y=1$ puisque le premier lancer donne nécessairement « pile » ou « face ».

Si $X=1$ (resp. $Y=1$), Y (resp. X) prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, donc on a :

$$(\mathbf{X}+\mathbf{Y})(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{N}^* \setminus \{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$$

Et la loi de probabilité de $X+Y$ est donnée, d'après les questions 3.a et 3.b, pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$, par :

$$P([X+Y=k]) = P([X=1]\cap[Y=k-1]) + P([X=k-1]\cap[Y=1])$$

$$= P(Y = k-1) + P(X = k-1)$$

Puisque X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$, il vient, **pour tout entier naturel k de** $\mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$:

$$\mathbf{P([X+Y=k-1])} = 2P(X=k-1) = 2p(1-p)^{k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

b. La loi de XY a été obtenue à la question 3.c ; on sait que $(XY)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et que pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$P([XY = k]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Il en résulte que :

$$(XY+1)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\} = (X+Y)(\Omega)$$

Et que pour tout entier naturel k de $\mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$, on a :

$$P([XY+1=k]) = P([XY=k-1]) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = P([X+Y=k])$$

Donc **les variables aléatoires $X+Y$ et $XY+1$ sont de même loi**.

5. Le script Scilab suivant a été complété afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice ; à noter qu'il manquait un end de fin de la seconde boucle while dans l'énoncé…

```
x=1
y=1
lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
if lancer==1 then
        while lancer==1
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
        y=y+1
        end
    else
        while lancer==0
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
        x=x+1
        end
    end
disp(x)
disp(y)
```

EXERCICE 3

1.a. x étant un réel supérieur ou égal à 1, on a, pour tout réel t de $[1, x]$:

$$1 \le t \le x \Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{1}{t} \le 1$$

Donc $\frac{1}{t}$ **est minoré par** $\frac{1}{x}$ **pour tout réel t de** $[1,x]$.

D'après ce qui précède et puisque $e^t > 0$, on a, pour tout réel t de $[1,x]$:

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}$$

Par intégrations d'inégalités sur l'intervalle $[1,x]$, il vient :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}dt \geq \int_1^x \frac{e^t}{x}dt = \left[\frac{e^t}{x}\right]_1^x = \frac{e^x}{x} - \frac{e}{x} = \frac{e^x - e}{x}$$

Ainsi a-t-on montré que, **pour tout réel x de** $[1,+\infty[$, on a :

$$\mathbf{f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}}$$

b. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x} - \frac{e}{x}\right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (par croissance comparée) et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$$

D'après l'inégalité de la question précédente et par un théorème de comparaison de limites, il vient :

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

c. f est la primitive sur $[1,+\infty[$ s'annulant en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$, donc **f est dérivable sur** $[1,+\infty[$, et on a, **pour tout réel x de** $[1,+\infty[$:

$$\mathbf{f'(x) = \frac{e^x}{x}}$$

d. On a, pour tout réel x de $[1,+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$, $e^x > 0$ et $x - 1 \geq 0$ sur $[1,+\infty[$, on a, pour tout réel x de $[1,+\infty[$:

$$f''(x) \geq 0$$

Donc **la fonction f est convexe sur** $[1,+\infty[$.

e. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1) + 0 = \mathbf{ex - e}$$

2.a. On a, pour tout réel t de $[1,+\infty[$:

$$g'(t) = \frac{t^3e^t - 3t^2e^t}{(t^3)^2} = \frac{t^2(t-3)e^t}{t^6} = \frac{(t-3)e^t}{t^4}$$

Puisque $e^t > 0$ et $t^4 > 0$ sur $[1,+\infty[$, $g'(t)$ est du signe de $t-3$ sur $[1,+\infty[$ et on a :

$$t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3$$

On a :

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^3} = +\infty \text{ (par croissance comparée)}$$

Donc le tableau de variation de la fonction g est le suivant :

x	**1**		**3**		**+∞**
g'		**−**	**0**	**+**	
g	**e**	↘	$\mathbf{\frac{e^3}{27}}$	↗	**+∞**

b. D'après le tableau de variations de g, on a, pour tout réel t de $[1,3]$:

$$0 \le g(t) \le e$$

Par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur $[1,3]$, on a :

$$\int_1^3 g(t)\,dt \ge 0$$

Par utilisation d'une inégalité de la moyenne sur $[1,3]$, on a :

$$\int_1^3 g(t)\,dt \le (3-1)e$$

Ainsi a-t-on, l'encadrement :

$$\mathbf{0 \le \int_1^3 g(t)\,dt \le 2e}$$

c. Pour tout réel x supérieur ou égal à 3, toujours par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur $[3,x]$, on a :

$$\int_3^x g(t)\,dt \ge 0$$

Puisque g est croissante sur $[3,+\infty[$, on a, pour tout réel x supérieur ou égal à 3 :

$$g(t) = \frac{e^t}{t^3} \le g(x) = \frac{e^x}{x^3}$$

Par utilisation d'une inégalité de la moyenne sur $[3,x]$, on a :

$$\int_3^x g(t)\,dt \le (x-3)\frac{e^x}{x^3} = \frac{x-3}{x^3}e^x$$

Ainsi a-t-on, l'encadrement, **pour tout réel x supérieur ou égal à 3** :

$$\mathbf{0 \le \int_3^x g(t)\,dt \le \frac{x-3}{x^3}e^x}$$

3.a. Pour tout réel x de $[1,+\infty[$, calculons $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant :

$$u(t) = \frac{1}{t} \qquad u'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

$$v'(t) = e^t \qquad v(t) = e^t$$

Pour tout réel x de $[1,+\infty[$, il vient, par intégration par parties, les fonctions u, v, u' et v' étant continues sur $[1,x]$:

$$\mathbf{f(x)} = \left[\frac{e^t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2}\right) e^t \, dt = \mathbf{\frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt}$$

b. Reprenons l'expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente pour tout réel x de $[1,+\infty[$, à savoir :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$$

Calculons $\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$ à l'aide d'une deuxième intégration par parties, en posant :

$$u(t) = \frac{1}{t^2} = t^{-2} \qquad u'(t) = -2t^{-3} = -\frac{2}{t^3}$$
$$v'(t) = e^t \qquad v(t) = e^t$$

Il vient, par intégration par parties, les fonctions u, v, u' et v' étant continues sur $[1,x]$:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \left[\frac{e^t}{t^2}\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{2}{t^3}\right) e^t \, dt = \frac{e^x}{x^2} - e + 2\int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \frac{e^x}{x^2} - e + 2\int_1^x g(t) dt$$

Il en résulte que l'on a, **pour tout réel x de $[1,+\infty[$** :

$$\mathbf{f(x)} = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x} - e + \frac{e^x}{x^2} - e + 2\int_1^x g(t) dt = \mathbf{\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x g(t) dt}$$

4.a. D'après la question 1.a, on a, pour tout x de $[1,+\infty[$, et donc pour tout x de $[3,+\infty[$:

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}$$

D'après la question 3.b, on a, pour tout x de $[1,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^x g(t) dt$$

Il vient donc, en utilisant la relation de Chasles, pour tout réel x de $[1,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2\int_1^3 g(t) dt + 2\int_3^x g(t) dt$$

Compte-tenu des questions 2.b et 2.c, il en résulte qu'on a, pour tout réel x de $[3,+\infty[$:

$$f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2(2e) + 2\frac{x-3}{x^3} e^x$$

Un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout x de $[3,+\infty[$ est donc :

$$\mathbf{\frac{e^x - e}{x} \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2e + 2\frac{x-3}{x^3} e^x}$$

b. Puisque $xe^{-x} > 0$ sur $[3,+\infty[$, on obtient, en multipliant l'encadrement précédent par xe^{-x} et en simplifiant :

$$1 - e^{1-x} \leq xf(x)e^{-x}f(x) \leq 1 + \frac{1}{x} + 2exe^{-x} + 2\frac{x-3}{x^2}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-e^{1-x}\right)=1$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1-x}=0$$

Et :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+2xe^{-x}+2\frac{x-3}{x^2}\right)=1$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=0 \text{ (croissance comparée) et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=0$$

Il résulte de l'encadrement précédent et du théorème d'encadrement que :

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty} xf(x)e^{-x}=1}$$

EXERCICE 4

1.a. Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, si le mobile est au point d'abscisse $i-1$ à l'instant $i-1$, alors, par hypothèse, en prenant , $k=i$, à l'instant $(i-1)+1=i$, il sera sur le point d'abscisse i avec la probabilité $\frac{i}{i+1}$, et si le mobile est au point d'abscisse $i-1$ à l'instant $i-1$, alors, par hypothèse, à l'instant $(i-1)+1=i$, il sera sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{i+1}$, donc :

$$\mathbf{P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i=i)=\frac{i}{i+1} \text{ et } P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i=0)=\frac{1}{i+1}}$$

b. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'événement $(U=k)$ est réalisé si et seulement si le mobile n'est pas au point d'abscisse 0 à tous les instants compris ente 1 et $k-1$ et à l'instant k au point d'abscisse 0, donc on a, **pour tout k de $\mathbb{N}^*$** :

$$\mathbf{(U=k)=(A_0=0)\cap(A_1=1)\cap(A_{k-1}=k-1)\cap(A_k=0)}$$

c. D'après la formule des probabilités composées, on a, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}P(U=k)&=P\left((A_0=0)\cap(A_1=1)\cap\cdots(A_{k-1}=k-1)\cap(A_k=0)\right)\\&=P(A_0=0)P_{(A_0=0)}(A_1=1)\cdots P_{(A_0=0)\cap(A_1=1)\cap\cdots(A_{k-2}=k-2)}(A_{k-1}=k-1)\\&\quad xP_{(A_0=0)\cap(A_1=1)\cap\cdots\cap(A_{k-1}=k-1)}\cdots(A_k=0)\\&=P(A_0=0)P_{(A_0=0)}(A_1=1)\cdots P_{(A_{k-2}=k-2)}(A_{k-1}=k-1)P_{(A_{k-1}=k-1)}\cdots(A_k=0)\end{aligned}$$

On trouve donc, en utilisant la question 1.a :

$$P(U=k)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1}{k}$$

Ce produit est un produit télescopique, après simplification par $2, 3,\ldots,k-1$, il reste, **pour tout k de $\mathbb{N}^*$** :

$$\mathbf{P(U=k)=\frac{1}{k(k+1)}}$$

d. Pour tout entier naturel non nul k, on obtient, en réduisant au même dénominateur :

https://vertuprepas.com/

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\mathbf{\frac{1}{k(k+1)}}$$

Pour tout entier naturel non nul n, on a, d'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=1}^{n} P(U=k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Cette somme est une somme télescopique ; après simplification par $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}$, il reste :

$$\sum_{k=1}^{n} P(U=k)=1-\frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} P(U=k)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Ceci prouve que la série $\sum_{k\geq 1} P(U=k)$ converge et que sa somme vaut :

$$\mathbf{\sum_{k=1}^{+\infty} P(U=k)=1}$$

e. Il a été admis que U est une variable aléatoire, et puisque $U(\Omega)=\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(U=k)=1$$

Il en résulte, d'après la question précédente que :

$$\mathbf{P(U=0)}=1-\sum_{k=1}^{+\infty} P(U=k)=1-1=\mathbf{0}$$

2. Puisque $P(U=0)=0$, et d'après un calcul de la question 1.d, il vient, **pour tout n de** $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P(U>n)}=1-P(U\leq n)=1-\sum_{k=1}^{n} P(U=k)=1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\mathbf{\frac{1}{n+1}}$$

3. Le script Scilab suivant a été complété afin qu'il calcule et affiche la valeur prise par U lors de l'expérience aléatoire étudiée :

```
k=1
hasard=grand(1,1,'uin',1,k+1)
while hasard<>1
   k=k+1
   hasard=grand(1,1,'uin',1,k+1)
end
disp(k,'U a pris la valeur:')
```

4.a. f est continue sur $]-\infty,0[$ comme fonction nulle, et continue sur $[0,+\infty[$ comme fonction rationnelle de dénominateur non nul.

f, étant continue sur $[0,+\infty[$, admet une limite finie à droite en 0 ; f admet aussi une limite finie à gauche en 0, car :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{t\to 0^-} 0=0$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
f est positive sur $\mathbb{R}$ car :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}>0 & \text{si } x\geq 0\\ 0\geq 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$, $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ converge, et on a :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=0$$

On a, pour tout réel A positif ou nul :

$$\int_0^A f(x)\,dx=\int_0^A \frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^A=1-\frac{1}{A+1}$$

Il vient donc :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{A+1}\right)=1$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,dx=1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=0+1=1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité**.

b. On a, pour tout réel x :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Il en résulte que, si $x<0$, on a :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$$

Tandis que si $x\geq 0$, on a :

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_0^x \frac{1}{(t+1)^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x=1-\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

En résumé, **la fonction de répartition F de T est bien donnée par** :

$$\mathbf{F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}}$$

5.a. Puisque T prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$, $\lfloor T\rfloor$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$; puisque $N=\lfloor T\rfloor+1$, **N prend ses valeurs dans** $\mathbb{N}^*$ et on a, **pour tout n de** $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P(N=n)}=P(\lfloor T\rfloor+1=n)=P(\lfloor T\rfloor=n-1)=\mathbf{P(n-1\leq T<n)}$$

b. On a donc, d'après les deux questions précédentes, pour **tout n de** $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P(N=n)} = P(n-1 \le T < n) = F(n) - F(n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$$
$$= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2 - (n^2-1)}{n(n+1)} = \mathbf{\frac{1}{n(n+1)}}$$

c. D'après les questions 1.c et 5.b, on constate que U et N suivent la même loi, donc **le script Scilab de la question 3 donne une simulation de N**.

6.a. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 et tout réel t de $[k, k+1]$, on a :

$$k \le t \le k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{t} \le \frac{1}{k}$$

En utilisant une inégalité de la moyenne, on a :

$$\frac{1}{t} \le \frac{1}{k} \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \le (k+1-k)\frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

On a bien, **pour tout k entier supérieur ou égal à 1** :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \le \frac{1}{k}$$

b. D'après les questions 5.a et 5.b, sous réserve de convergence, l'espérance de N est définie par :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

On a, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt$$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt = \int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt = [\ln t]_2^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 2$$

Ainsi a-t-on, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ge \ln(n+1) - \ln 2$$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln(n+1) - \ln 2\right) = +\infty$$

D'après l'inégalité précédente et un théorème de comparaison de limites, il vient :

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

Donc la série $\sum_{k \ge 2} \frac{1}{k}$ diverge, donc **la variable N ne possède pas d'espérance**.