EXERCICE 1

1) • On a :

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0+1+1 & 0+0+1 & 0+1+0 \\ 0+0+1 & 1+0+1 & 1+0+0 \\ 0+1+0 & 1+0+0 & 1+1+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= A + 2I.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{A^2 = A + 2I.}$$

• D'après le point précédent, on a : $A^2 - A - 2I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Donc :

$$\boxed{\text{le polynôme } X^2 - X - 2 \text{ (qui est bien de degré 2) est annulateur de } A.}$$

2) a) Le polynôme $X^2 - X - 2$ est de discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 \ > 0$$

donc il admet deux racines, qui sont données par :

$$\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Comme le polynôme $X^2 - X - 2$ est annulateur de A (*cf* question précédente), on peut conclure que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1 \text{ et } 2.}$$

Remarque : plus rigoureusement, on peut conclure que le spectre de A est inclus dans $\{-1; 2\}$.

b) D'après la question 1), on a :

$$\begin{aligned}
A^2 = A + 2I \quad &\text{d'où} \quad A^2 - A = 2I \\
&\text{d'où} \quad A(A - I) = 2I \\
&\text{d'où} \quad \frac{1}{2}A(A - I) = I \\
&\text{d'où} \quad A\left(\frac{1}{2}(A - I)\right) = I.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible et son inverse est donné par : } A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I).}$$

3) a) • On a :

$$\boxed{AU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et}}$$

$$\boxed{AW = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

• D'après le point précédent, on a : $AU = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U$, $AV = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)V$ et $AW = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)W$.

Comme de plus les matrices U, V et W sont toutes distinctes de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on peut conclure que : U est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre 2, V est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre -1 et W est un vecteur propre pour A associé à la valeur propre -1.
En particulier :

$$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } A \text{ trouvées à la question 2)a) sont effectivement valeurs propres de } A.}$$

b) On a :

$$AQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$QD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on a bien :

$$\boxed{AQ = QD.}$$

c) • On a :

$$QR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1+1-2 & 1-2+1 \\ 1+0-1 & 1+0+2 & 1-2+1 \\ 1-1+0 & 1-1-0 & 1+2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

On a obtenu :

$$\boxed{QR = 3I.}$$

• Avec le point précédent, on obtient :

$$Q\left(\frac{1}{3}R\right) = \frac{1}{3}QR = \frac{1}{3}3I = I$$

donc :

$$\boxed{\text{la matrice } Q \text{ est inversible et son inverse est donné par : } Q^{-1} = \frac{1}{3}R.}$$

d) D'après la question 3)b), on a : $AQ = QD$. De plus, la matrice D est diagonale et d'après la question précédente, la matrice Q est inversible. Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

4) a) Notons P_n la propriété définie par : «$A^n = QD^nQ^{-1}$».
Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
Initialisation :
On a :

$$QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I = A^0$$

donc P_0 est vraie.
Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= AQD^nQ^{-1} \quad (P_n \text{ vraie}) \\ &= QDD^nQ^{-1} \quad (\textit{cf} \text{ question 3)b)}) \\ &= QD^{n+1}Q^{-1}. \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie (lorsque P_n l'est).
Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } A^n = QD^nQ^{-1}.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} A^n &= QD^nQ^{-1} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= Q\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} Q^{-1} \quad (\text{car } D \text{ est diagonale}) \\ &= Q\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \frac{1}{3}R \quad (\text{d'après la question 3)c)}) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 2^n \\ (-1)^n & (-1)^n & -2(-1)^n \\ (-1)^n & -2(-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^n - 2(-1)^n & 2^n - 2(-1)^n + (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \\ \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \\ \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc la première ligne de A^n est donnée (pour tout n de $\mathbb{N}$) par :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) & \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \end{pmatrix}.}$$

5) a) • Comme au départ le jeton se trouve sur le sommet 1 (et que X_1 est la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le jeton après son premier déplacement), la loi de X_1 est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(X_1 = k)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Remarque : comme 1 n'est pas une valeur prise par X_1, il aurait été plus rigoureux de conclure que la loi de X_1 est donnée par le tableau suivant :

k	2	3
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

• On a :

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 1) &= P\left(([X_1 = 2] \cap [X_2 = 1]) \cup ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 1])\right) \\
&= P([X_1 = 2] \cap [X_2 = 1]) + P([X_1 = 3] \cap [X_2 = 1]) \quad (*) \\
&= P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 1) \\
&= \frac{1}{2} \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) + \frac{1}{2} \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 1) \quad (\textit{cf} \text{ point précédent}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad (\textit{cf} \text{ protocole des déplacements}) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par incompatibilité de $[X_1 = 2] \cap [X_2 = 1]$ et $[X_1 = 3] \cap [X_2 = 1]$.

On a aussi :

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 2) &= P([X_1 = 3] \cap [X_2 = 2]) \\
&= P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 2) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 3) &= P([X_1 = 2] \cap [X_2 = 3]) \\
&= P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 3) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

comme il est clair que X_3 ne prend pas d'autres valeurs que 1, 2 et 3, on peut conclure que la loi de X_2 est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(X_2=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Remarque : on aurait aussi pu conclure en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet $([X_1=2],[X_1=3])$.

b) Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. L'ensemble des valeurs prises par X_n est $\{1,2,3\}$ $(*)$, la famille $([X_n=1],[X_n=2],[X_n=3])$ est donc un système complet d'événements.
Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1}=1)\\
= \ & P(X_n=1)\times P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)\times P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1)+P(X_n=3)\times P_{[X_n=3]}(X_{n+1}=1)\\
= \ & P(X_n=1)\times 0+P(X_n=2)\times\frac{1}{2}+P(X_n=3)\times\frac{1}{2} \quad (\textit{cf}\ \text{protocole des déplacements})\\
= \ & \frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3).
\end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3).}$$

Remarque sur $(*)$: il est vraisemblablement permis d'affirmer directement que l'ensemble des valeurs prises par X_n est $\{1,2,3\}$ mais cela n'est pas tout à fait immédiat (le plus naturel pour le justifier est de distinguer les cas n pair et n impair) et a de l'importance pour conclure : c'est ce qui nous amène à traiter le cas $n=1$ à part.

c) • On obtient de manière similaire à la question précédente que, pour tout n de $[\![2,+\infty[\![$, on a :

$$\boxed{P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=3) \text{ et } P(X_{n+1}=3)=\frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2).}$$

• Posons $B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$ et vérifions que B convient.

Déjà, la matrice B est bien proportionnelle à A, car :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}A.$$

De plus, pour tout n de $[\![2,+\infty[\![$:

$$\begin{aligned}
L_nB &= \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}P(X_n=2)+\frac{1}{2}P(X_n=3) & \frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=3) & \frac{1}{2}P(X_n=1)+\frac{1}{2}P(X_n=2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} P(X_{n+1}=1) & P(X_{n+1}=2) & P(X_{n+1}=3)\end{pmatrix} \quad \text{(d'après ce qui précède)}\\
&= L_{n+1}.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la matrice } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ est bien proportionnelle à } A \text{ et telle que : } \forall n \in [\![2, +\infty[\![\,,\ L_{n+1} = L_n B.}$$

d) • Au départ, le jeton est sur le sommet 1, donc :

$$L_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 1) & P(X_0 = 2) & P(X_0 = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} L_0 B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(X_1 = 1) & P(X_1 = 2) & P(X_1 = 3) \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question 5)a))} \\ &= L_1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la relation de la question précédente est valable dans le cas } n = 0.}$$

• On a :

$$\begin{aligned} L_1 B &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P(X_2 = 1) & P(X_2 = 2) & P(X_2 = 3) \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question 5)a))} \\ &= L_2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{la relation de la question précédente est valable dans le cas } n = 1.}$$

e) Notons P_n la propriété définie par : $\ll L_n = L_0 B^n \gg$.
Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.
Initialisation :
On a :

$$L_0 B^0 = L_0 I = L_0$$

donc P_0 est vraie.
Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned} L_0 B^{n+1} &= L_0 B^n B \\ &= L_n B \quad (P_n \text{ vraie}) \\ &= L_{n+1} \quad (\textit{cf} \text{ questions 5)c) et 5)d)).} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ on a : } L_n = L_0 B^n.}$$

f) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{array}{rcl}
L_n & = & L_0 B^n \\
& = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2}A\right)^n \\
& = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n A^n \\
& = & \dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix} \quad \text{(d'après la question 4)b))} \\
& = & \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n \\ 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix} \\
& = & \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n-(-1)^n & 2^n-(-1)^n \end{pmatrix} \\
& = & \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{2^n}{2^n}+2\frac{(-1)^n}{2^n} & \frac{2^n}{2^n}-\frac{(-1)^n}{2^n} & \frac{2^n}{2^n}-\frac{(-1)^n}{2^n} \end{pmatrix} \\
& = & \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Comme $L_n = \begin{pmatrix} P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) \end{pmatrix}$ (et que X_n est à valeurs dans $\{1,2,3\}$), on peut conclure que la loi de X_n est donnée par le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(X_n=k)$	$\dfrac{1}{3}\left(1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$	$\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$	$\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$

EXERCICE 2

1) • Pour tout x de $]-\infty,0[$ et de $]0,+\infty[$, on a : $f(x)=0\geq 0$. Pour tout x de $[0,1]$, on a : $0\leq x^2\leq 1$, donc, pour tout x de $[0,1]$, on a : $f(x)=4\underbrace{x}_{\geq 0}\underbrace{(1-x^2)}_{\geq 0}\geq 0$. Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de 0 et 1 (car constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et polynomiale sur $]0,1[$).

• Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et valent 0. De plus, l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie et on a :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 4x\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 4x-4x^3\,\mathrm{d}x=\left[2x^2-x^4\right]_0^1=2.1^2-1^4-\left(2.0^2-0^4\right)=2-1=1.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=0+1+0=1.$$

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

2) a) Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et on a :

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x=0 \quad\text{et}\quad \int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

De plus, l'intégrale $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie et on a :

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^2\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^2-4x^4\,\mathrm{d}x=\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{3}-\frac{4}{5}=\frac{20-12}{15}=\frac{8}{15}.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} xf(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=0+\frac{8}{15}+0=\frac{8}{15}.$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X \text{ admet une espérance, donnée par : } E(X)=\frac{8}{15}.}$$

b) Comme f est nulle sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x^2f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} x^2f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent et on a :

$$\int_{-\infty}^{0} x^2f(x)\,\mathrm{d}x=0 \quad\text{et}\quad \int_0^{+\infty} x^2f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

De plus, l'intégrale $\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie et on a :

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x^3\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x^3 - 4x^5\,\mathrm{d}x = \left[x^4 - \frac{2x^6}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

On en déduit que X^2 admet une espérance, donnée par :

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{3}.$$

Donc X admet une variance, donnée, d'après la formule de Huygens, par :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{75}{225} - \frac{64}{225} = \frac{11}{225}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } X \text{ admet une variance, donnée par : } V(X) = \frac{11}{225}.}$$

3) Soit x un réel. Déterminons $F_X(x)$.

- Cas $x < 0$. Alors, comme f est nulle sur $]-\infty, x]$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

- Cas $0 \leq x \leq 1$. On a alors :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 4t\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^x 4t - 4t^3\,\mathrm{d}x = \left[2t^2 - t^4\right]_0^x = 2x^2 - x^4.$$

Remarquons que, pour tout x de $[0,1]$ (et même de $\mathbb{R}$) :

$$1 - \left(1-x^2\right)^2 = 1 - \left(1 - 2x^2 + x^4\right) = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = 2x^2 - x^4$$

donc, dans le cas $0 \leq x \leq 1$, on a bien :

$$F_X(x) = 1 - \left(1-x^2\right)^2.$$

- Cas $1 < x$. On a alors (*cf* question 1) pour le calcul de $\int_0^1 4t\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t$) :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 4t\left(1-t^2\right)\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Finalement, on a bien, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - \left(1-x^2\right)^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}.}$$

4) a) On a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x-0}{1-0} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}}$$

b) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. On a (*cf* énoncé) :

$$P(M > x) = P(U > x)P(V > x) = (1 - G(x))(1 - G(x)) = 1 - 2G(x) + (G(x))^2 .$$

D'où, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F_M(x) = P(M \leq x) = 1 - P(M > x) = 1 - \left(1 - 2G(x) + (G(x))^2\right) = 1 - 1 + 2G(X) - (G(x))^2 = 2G(x) - (G(x))^2 .$$

On a obtenu, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{P(M > x) = 1 - 2G(x) + (G(x))^2 \text{ et } F_M(x) = 2G(x) - (G(x))^2.}$$

c) Soit x un réel. Explicitons $F_M(x)$.

- Cas $x < 0$. On a alors d'après les deux questions précédentes :

$$F_M(x) = 2G(x) - (G(x))^2 = 2.0 - 0^2 = 0.$$

- Cas $0 \leq x \leq 1$. On a alors d'après les deux questions précédentes :

$$F_M(x) = 2G(x) - (G(x))^2 = 2x - x^2.$$

- Cas $1 < x$. On a alors d'après les deux questions précédentes :

$$F_M(x) = 2G(x) - (G(x))^2 = 2.1 - 1^2 = 1.$$

Finalement, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} .}$$

5) a) Soit x un réel. Dans le cas $x < 0$, on a :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(\sqrt{M} \leq x\right) = P(\varnothing) = 0.$$

Traitons désormais le cas $0 \leq x$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\ &= P\left(\sqrt{M} \leq x\right) \\ &= P\left(M \leq x^2\right) \quad (*) \\ &= F_M\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: étant donnés deux réels positifs a et b, on a l'équivalence : $a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2$.
Dans le cas $0 \leq x \leq 1$, on a : $0 \leq x^2 \leq 1$ (par croissance de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $[0, 1]$) et on a alors (*cf* question précédente) :

$$F_Z(x) = F_M\left(x^2\right) = 2x^2 - \left(x^2\right)^2 = 2x^2 - x^4.$$

Dans le cas $1 < x$, on a : $1 < x^2$ (par stricte croissance de la fonction $x \longmapsto x^2$ sur $[1, +\infty[$) et on a alors (*cf* question précédente) :

$$F_Z(x) = F_M\left(x^2\right) = 1.$$

Finalement, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x^2 - x^4 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}.}$$

Remarque : une densité de U et V est la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$ qui est nulle en dehors de $[0, 1]$. On peut donc supposer que U et V sont à valeurs dans $[0, 1]$ ce qui assure que M $(= \min(U, V))$ est à valeurs dans $[0, 1]$ donc que Z $\left(= \sqrt{M}\right)$ est bien définie (et à valeurs dans $[0, 1]$).

b) Avec la question précédente et la question 3) (dans laquelle on a vu que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'égalité : $2x^2 - x^4 = 1 - \left(1 - x^2\right)^2$) on obtient que les variables aléatoires X et Z ont même fonction de répartition, donc :

$$\boxed{X \text{ et } Z \text{ suivent la même loi.}}$$

c) On peut compléter le script `Python` de la manière suivante :

```
L1   U=rd.random()
L2   V=rd.random()
L3   M=np.min(U,V)
L4   X=np.sqrt(M)
```

Détail : on utilise ici la question précédente qui permet d'affirmer que $\sqrt{M}$ et X suivent la même loi.

EXERCICE 3

1) a) • Comme X et Y prennent les valeurs 0, 1 et 2, les valeurs prises par S $(= X+Y)$ sont :

$$\underbrace{0+0}_{=0}\ ,\ \underbrace{0+1}_{=1}\ ,\ \underbrace{0+2}_{=2}\ ,\ \underbrace{1+0}_{=1}\ ,\ \underbrace{1+1}_{=2}\ ,\ \underbrace{1+2}_{=3}\ ,\ \underbrace{2+0}_{=2}\ ,\ \underbrace{2+1}_{=3}\ \text{et}\ \underbrace{2+2}_{=4}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par } S \text{ est donné par : } S(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}.}$$

• On a :

$$\begin{aligned} P(S=0) &= P(X+Y=0) \\ &= P([X=0]\cap[Y=0]) \\ &= P(X=0)\times P(Y=0) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} P(S=1) &= P(X+Y=1) \\ &= P(([X=0]\cap[Y=1])\cup([X=1]\cap[Y=0])) \\ &= P([X=0]\cap[Y=1]) + P([X=1]\cap[Y=0]) \quad (*) \\ &= P(X=0)\times P(Y=1) + P(X=1)\times P(Y=0) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{16}. \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par incompatibilité des événements $[X=0]\cap[Y=1]$ et $[X=1]\cap[Y=0]$.

On a encore :

$$\begin{aligned} P(S=2) &= P(X+Y=2) \\ &= P(([X=0]\cap[Y=2])\cup([X=1]\cap[Y=1])\cup([X=2]\cap[Y=0])) \\ &= P([X=0]\cap[Y=2]) + P([X=1]\cap[Y=1]) + P([X=2]\cap[Y=0]) \quad (*) \\ &= P(X=0)\times P(Y=2) + P(X=1)\times P(Y=1) + P(X=2)\times P(Y=0) \quad (**) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8} \\ &= \frac{2+1+2}{16} \\ &= \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par incompatibilité deux à deux des événements $[X=0]\cap[Y=2]$, $[X=1]\cap[Y=1]$ et $[X=2]\cap[Y=0]$.
Détail de $(**)$: par indépendance de X et Y.

On a également :

$$\begin{aligned}
P(S=3) &= P(X+Y=3)\\
&= P\left(([X=1]\cap[Y=2])\cup([X=2]\cap[Y=1])\right)\\
&= P\left([X=1]\cap[Y=2]\right)+P\left([X=2]\cap[Y=1]\right) \quad (*)\\
&= P(X=1)\times P(Y=2)+P(X=2)\times P(Y=1) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)}\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{2}{8}\\
&= \frac{4}{16}.
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par incompatibilité des événements $[X=1]\cap[Y=2]$ et $[X=2]\cap[Y=1]$.

On a enfin :

$$\begin{aligned}
P(S=4) &= P(X+Y=4)\\
&= P\left([X=2]\cap[Y=2]\right)\\
&= P(X=2)\times P(Y=2) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{4}\\
&= \frac{4}{16}.
\end{aligned}$$

Finalement, la loi de S est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(S=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

b) D'après la question précédente, S admet une espérance, donnée par :

$$\begin{aligned}
E(S) &= 0\times P(S=0)+1\times P(S=1)+2\times P(S=2)+3\times P(S=3)+4\times P(S=4)\\
&= 0+\frac{2}{16}+2\times\frac{5}{16}+3\times\frac{4}{16}+4\times\frac{4}{16}\\
&= \frac{2+10+12+16}{16}\\
&= \frac{40}{16}\\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

On a en effet obtenu que :

$$\boxed{\text{l'espérance de } S \text{ est égale à } \frac{5}{2}.}$$

c) Les variables aléatoires X et Y ont même loi finie, donc X et Y ont la même espérance, qui est égale à :

$$0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{4}{4}=\frac{5}{4}.$$

On en déduit que S admet une espérance, donnée par :

$$\begin{array}{rcl} E(S) & = & E(X+Y) \\ & = & E(X)+E(Y) \quad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{4} \\ & = & \dfrac{10}{4} \\ & = & \dfrac{5}{2}. \end{array}$$

On a retrouvé que l'on a :

$$\boxed{E(S)=\frac{5}{2}.}$$

2) a) Comme X et Y prennent les valeurs 0, 1 et 2, les valeurs prises par T $(=XY)$ sont :

$$\underbrace{0\times 0}_{=0}\ ,\ \underbrace{0\times 1}_{=0}\ ,\ \underbrace{0\times 2}_{=0}\ ,\ \underbrace{1\times 0}_{=0}\ ,\ \underbrace{1\times 1}_{=1}\ ,\ \underbrace{1\times 2}_{=2}\ ,\ \underbrace{2\times 0}_{=0}\ ,\ \underbrace{2\times 1}_{=2}\ \text{ et }\ \underbrace{2\times 2}_{=4}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des valeurs prises par } T \text{ est donné par : } T(\Omega)=\{0,1,2,4\}.}$$

b) • On a :

$$\begin{array}{rcl} P(T=0) & = & P(XY=0) \\ & = & P\left(([X=0]\cap[Y=0])\cup([X=0]\cap[Y=1])\cup([X=0]\cap[Y=1])\right. \\ & & \left.\cup([X=1]\cap[Y=0])\cup([X=2]\cap[Y=0])\right) \\ & = & P\left([X=0]\cap[Y=0]\right)+P\left([X=0]\cap[Y=1]\right)+P\left([X=0]\cap[Y=2]\right) \\ & & +P\left([X=1]\cap[Y=0]\right)+P\left([X=2]\cap[Y=0]\right) \quad (*) \\ & = & P(X=0)\times P(Y=0)+P(X=0)\times P(Y=1)+P(X=0)\times P(Y=2) \\ & & +P(X=1)\times P(Y=0)+P(X=2)\times P(Y=0) \quad (**) \\ & = & \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4} \\ & = & \dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{8} \\ & = & \dfrac{1+1+2+1+2}{16} \\ & = & \dfrac{7}{16}. \end{array}$$

Détail de $(*)$: par incompatibilité deux à deux des événements de l'union.
Détail de $(**)$: par indépendance de X et Y.
On a en effet obtenu :

$$\boxed{P(T=0)=\frac{7}{16}.}$$

Remarque : une autre démarche est la suivante :

$$\begin{array}{rcl} P(T=0) & = & P(XY=0) \\ & = & P\left([X=0]\cup[Y=0]\right) \\ & = & P(X=0)+P(Y=0)-P\left([X=0]\cap[Y=0]\right) \\ & = & \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-P(X=0)\times P(Y=0) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{8-1}{16} \\
&= \frac{7}{16}.
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
P(T=1) &= P(XY=1) \\
&= P\left([X=1] \cap [Y=1]\right) \\
&= P(X=1) \times P(Y=1) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
P(T=2) &= P(XY=2) \\
&= P\left(([X=1] \cap [Y=2]) \cup ([X=2] \cap [Y=1])\right) \\
&= P\left([X=1] \cap [Y=2]\right) + P\left([X=2] \cap [Y=1]\right) \quad (*) \\
&= P(X=1) \times P(Y=2) + P(X=2) \times P(Y=1) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{8} \\
&= \frac{4}{16}.
\end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par incompatibilité des événements $[X=1] \cap [Y=2]$ et $[X=2] \cap [Y=1]$.

On a enfin :

$$\begin{aligned}
P(T=4) &= P(XY=4) \\
&= P\left([X=2] \cap [Y=2]\right) \\
&= P(X=2) \times P(Y=2) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} \\
&= \frac{4}{16}.
\end{aligned}$$

Finalement, la loi de T est donné par le tableau suivant :

k	0	1	2	4
$P(T=k)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

c) D'après la question précédente, T admet une espérance, donnée par :

$$\begin{aligned} E(T) &= 0 \times P(T=0) + 1 \times P(T=1) + 2 \times P(T=2) + 4 \times P(T=4) \\ &= 0 + \frac{1}{16} + 2 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{4}{16} \\ &= \frac{1+8+16}{16} \\ &= \frac{25}{16}. \end{aligned}$$

On a en effet obtenu que :

$$\boxed{\text{l'espérance de } T \text{ est égale à } \frac{25}{16}.}$$

d) Comme X et Y admettent une espérance, T admet une espérance, donnée par :

$$\begin{aligned} E(T) &= E(XY) \\ &= E(X) \times E(Y) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)} \\ &= \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \quad (\textit{cf} \text{ question 1)c))} \\ &= \frac{25}{16}. \end{aligned}$$

On a retrouvé que l'on a :

$$\boxed{E(T) = \frac{25}{16}.}$$

3) • On a $S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $T(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$ (*cf* questions 1)a) et 2)a)). La loi du couple (S, T) est donnée par le tableau suivant :

T \ S	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	0	0
1	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0
2	0	0	0	$\frac{4}{16}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{4}{16}$

Détail :

$$\begin{aligned} P([T=0] \cap [S=0]) &= P([XY=0] \cap [X+Y=0]) = P([X=0] \cap [Y=0]) = \frac{1}{16} \\ P([T=0] \cap [S=1]) &= P([XY=0] \cap [X+Y=1]) = P(([X=0] \cap [Y=1]) \cup ([X=1] \cap [Y=0])) = \ldots = \frac{2}{16} \\ P([T=0] \cap [S=2]) &= P([XY=0] \cap [X+Y=2]) = P(([X=0] \cap [Y=2]) \cup ([X=2] \cap [Y=0])) = \ldots = \frac{4}{16} \\ P([T=0] \cap [S=3]) &= P([XY=0] \cap [X+Y=3]) = P(\varnothing) = 0 \\ P([T=0] \cap [S=4]) &= P([XY=0] \cap [X+Y=4]) = P(\varnothing) = 0 \\ P([T=1] \cap [S=0]) &= P([XY=1] \cap [X+Y=0]) = P(\varnothing) = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P([T=1]\cap[S=1]) &= P([XY=1]\cap[X+Y=1]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=1]\cap[S=2]) &= P([XY=1]\cap[X+Y=2]) = P([X=1]\cap[Y=1]) = \frac{1}{16}\\
P([T=1]\cap[S=3]) &= P([XY=1]\cap[X+Y=3]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=1]\cap[S=4]) &= P([XY=1]\cap[X+Y=4]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=2]\cap[S=0]) &= P([XY=2]\cap[X+Y=0]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=2]\cap[S=1]) &= P([XY=2]\cap[X+Y=1]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=2]\cap[S=2]) &= P([XY=2]\cap[X+Y=2]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=2]\cap[S=3]) &= P([XY=2]\cap[X+Y=3]) = P(([X=1]\cap[Y=2])\cup([X=2]\cap[Y=1])) = \ldots = \frac{4}{16}\\
P([T=2]\cap[S=4]) &= P([XY=2]\cap[X+Y=4]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=4]\cap[S=0]) &= P([XY=4]\cap[X+Y=0]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=4]\cap[S=1]) &= P([XY=4]\cap[X+Y=1]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=4]\cap[S=2]) &= P([XY=4]\cap[X+Y=2]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=4]\cap[S=3]) &= P([XY=4]\cap[X+Y=3]) = P(\varnothing) = 0\\
P([T=4]\cap[S=4]) &= P([XY=4]\cap[X+Y=4]) = P([X=2]\cap[Y=2]) = \frac{4}{16}
\end{aligned}
$$

- Comme $T(\Omega) = \{0,1,2,4\}$, la famille $([T=0],[T=1],[T=2],[T=4])$ est un système complet d'événements. Avec la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$
\begin{aligned}
P(S=0) &= P([S=0]\cap[T=0]) + P([S=0]\cap[T=1]) + P([S=0]\cap[T=2]) + P([S=0]\cap[T=4])\\
&= \frac{1}{16} + 0 + 0 + 0 \quad (\textit{cf} \text{ point précédent})\\
&= \frac{1}{16}.
\end{aligned}
$$

On obtient de façon similaire :

$$
\begin{aligned}
P(S=1) &= \frac{2}{16} + 0 + 0 + 0 = \frac{2}{16}\\
P(S=2) &= \frac{4}{16} + \frac{1}{16} + 0 + 0 = \frac{5}{16}\\
P(S=3) &= 0 + 0 + \frac{4}{16} + 0 = \frac{4}{16}\\
P(S=4) &= 0 + 0 + 0 + \frac{4}{16} = \frac{4}{16}.
\end{aligned}
$$

On retrouve bien que la loi de S est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(S=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$

Avec le système complet d'événements $([S=0],[S=1],[S=2],[S=3],[S=4])$ et la formule des probabilités totales, on obtient de manière similaire à ce que l'on vient de voir :

$$
\begin{aligned}
P(T=0) &= \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16} + 0 + 0 = \frac{7}{16}\\
P(T=1) &= 0 + 0 + \frac{1}{16} + 0 + 0 = \frac{1}{16}\\
P(T=2) &= 0 + 0 + 0 + \frac{4}{16} + 0 = \frac{4}{16}\\
P(T=4) &= 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{4}{16} = \frac{4}{16}.
\end{aligned}
$$

On retrouve bien que la loi de T est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	4
$P(T=k)$	$\dfrac{7}{16}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{4}{16}$	$\dfrac{4}{16}$

4) D'après la question précédente, on a :

$$P\left([T=0]\cap[S=4]\right)=0$$

et :

$$P\left(T=0\right)\times P\left(S=4\right)=\frac{7}{16}\times\frac{4}{16}$$

donc :

$$P\left([S=0]\cap[T=4]\right)\neq P\left(S=0\right)\times P\left(T=4\right).$$

Par conséquent :

$$\boxed{\text{les variables aléatoires } S \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

5) • On a :

$$\begin{aligned}
E(ST) &= \sum_{(s,t)\in S(\Omega)\times T(\omega)} stP\left([S=s]\cap[T=t]\right)\\
&= 0\times 0\times\frac{1}{16}+0\times 1\times 0+0\times 2\times 0+0\times 4\times 0\\
&\quad +1\times 0\times\frac{2}{16}+1\times 1\times 0+1\times 2\times 0+1\times 4\times 0\\
&\quad +2\times 0\times\frac{4}{16}+2\times 1\times\frac{1}{16}+2\times 2\times 0+2\times 4\times 0\\
&\quad +3\times 0\times 0+3\times 1\times 0+3\times 2\times\frac{4}{16}+3\times 4\times 0\\
&\quad +4\times 0\times 0+4\times 1\times 0+4\times 2\times 0+4\times 4\times\frac{4}{16}\\
&= \frac{2}{16}+\frac{24}{16}+\frac{64}{16}\\
&= \frac{90}{16}\\
&= \frac{45}{8}.
\end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{E(ST)=\frac{45}{8}.}$$

• On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(S,T) &= E(ST)-E(S)\times E(T) \quad \text{(d'après la formule de Huygens)}\\
&= \frac{45}{8}-\frac{5}{2}\times\frac{25}{16} \quad \text{(d'après les questions 1)b) et 2)c))}\\
&= \frac{180}{32}-\frac{125}{32}\\
&= \frac{55}{32}.
\end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(S,T)=\frac{55}{32}.}$$

EXERCICE 4

1) a) Notons P_n la propriété définie par : «u_n est bien défini et strictement positif».
Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Initialisation :
Le réel u_1 est bien défini et strictement positif car $u_1 = \dfrac{1}{2}$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité :
Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.
Comme P_n est vraie, u_n est bien défini et strictement positif, le réel $2(n+1)u_n+1$ est donc aussi bien défini et strictement positif. Par conséquent $\underbrace{\dfrac{u_n}{2(n+1)u_n+1}}_{=u_{n+1}}$ est bien défini (car de dénominateur non nul) et strictement positif (car le quotient de deux réels strictement positifs). Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n est vraie, c'est-à-dire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et strictement positif.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est bien définie et est une suite de réels strictement positifs.}}$$

b) On peut compléter la fonction `Python` de la façon suivante :

```
def suite(n):
    u=1/2
    for k in range(2,n+1):
        u=u/(2*k*u+1)
    return u
```

Remarque : on peut vérifier «qu'en faisant tourner l'algorithme à la main», on retrouve, «dans les premiers tours de boucle», les calculs de la question suivante .

2) On a :

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{u_1}{2(1+1)u_1+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2\times 2\times \frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{2\times 3} = \frac{1}{6}$$

et :

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{u_2}{2(2+1)u_2+1} = \frac{\frac{1}{6}}{2\times 3\times \frac{1}{6}+1} = \frac{\frac{1}{6}}{2} = \frac{1}{12}.$$

On a obtenu :

$$\boxed{u_2 = \frac{1}{6} \text{ et } u_3 = \frac{1}{12}.}$$

3) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} 2(n+1)u_n+1 > 2(n+1)u_n \quad &\text{d'où} \quad \frac{1}{2(n+1)u_n+1} < \frac{1}{2(n+1)u_n} \quad (*) \\ &\text{d'où} \quad \frac{u_n}{2(n+1)u_n+1} < \frac{u_n}{2(n+1)u_n} \quad (u_n > 0 \text{ d'après la question 1)a))} \\ &\text{d'où} \quad u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Détail de $(*)$: par stricte décroissance de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ $(2(n+1)u_n$ est strictement positif (*cf* question 1)a)).

Comme u_{n+1} est de plus strictement positif (*cf* question 1)a)), on peut conclure que l'on a (pour tout n de $\mathbb{N}^*$) :

$$\boxed{0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}.}$$

b) Vu le résulat de la question précédente, on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)}.$$

Autrement écrit, on a, pour tout n de $[\![2, +\infty[\![$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et on a : } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

4) a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \\ &= \frac{1}{\frac{u_k}{2(k+1)u_k+1}} - \frac{1}{u_k} \\ &= \frac{2(k+1)u_k + 1}{u_k} - \frac{1}{u_k} \\ &= \frac{2(k+1)u_k}{u_k} \\ &= 2(k+1). \end{aligned}$$

On a bien obtenu (pour tout k de $\mathbb{N}^*$) :

$$\boxed{v_{k+1} - v_k = 2(k+1).}$$

b) D'après la question précédente, on a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $v_{n+1} - v_n = 2(n+1)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il n'existe pas de réel } c \text{ (indépendant de } n\text{) tel que, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = c,}$$

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est donc par arithmétique.}}$$

c) Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. On a, d'après la question 4)a) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= 2\left(\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1\right) \\ &= 2\left(\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n - 1\right) \\ &= (n-1)n + 2n - 2 \\ &= n(n-1+2) - 2 \\ &= n(n+1) - 2. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} v_k \\
&= \sum_{k=2}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_k \quad \text{(par changement d'indice dans la } 1^{\text{ère}} \text{ somme)} \\
&= v_n + \sum_{k=2}^{n-1} v_k - \left(v_1 + \sum_{k=2}^{n-1} v_k \right) \\
&= v_n + \sum_{k=2}^{n-1} v_k - v_1 - \sum_{k=2}^{n-1} v_k \\
&= v_n - v_1 \\
&= v_n - \frac{1}{u_1} \\
&= v_n - \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= v_n - 2
\end{aligned}$$

d'où :

$$v_n - 2 = n(n+1) - 2$$

et donc :

$$v_n = n(n+1).$$

Cette égalité est encore valable dans le cas $n = 1$ car :

$$v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad 1(1+1) = 2.$$

ce qui permet de conclure que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{v_n = n(n+1).}$$

Remarques :

- Lors du calcul de $\sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1)$, on peut aussi constater que l'on a : $\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \sum_{k=2}^{n} k$ (ou même encore plus directement, constater que la somme $\sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1)$ est une somme de terme consécutifs d'une suite arithmétique (de raison 2)).
- Dans le cas particulier $n = 2$, on utilise ici la convention consistant à supposer qu'une somme dont la borne du haut est strictement inférieure à la borne du bas est nulle.
- Il est vraisemblablement permis de justifier l'égalité $\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_1$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k &= v_n - v_{n-1} + v_{n-1} - v_{n-2} + \ldots + v_2 - v_1 \\
&= v_n - v_1 \quad \text{(par téléscopage).}
\end{aligned}$$

d) • Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a : $v_n = n(n+1)$, ce qui se réécrit : $\frac{1}{u_n} = n(n+1)$, d'où :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n(n+1)}}$$

- D'après le point précédent, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

On a bien retrouvé :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

5) a) Soient a et b deux réels. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ (*cf* question précédente) et :

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1)-bn}{n(n+1)} = \frac{an+a-bn}{n(n+1)} = \frac{(a-b)n+a}{n(n+1)}$$

donc, pour que a et b soient deux réels tels que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n+1}$, il suffit que l'on ait :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a-b &=& 0 \\ a &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 1-b &=& 0 \\ a &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 1 \\ a &=& 1 \end{array}\right. .$$

Finalement :

$$\boxed{\text{avec } a=1 \text{ et } b=1, \text{ on a, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}.}$$

b) Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \quad \text{(par changement d'indice dans la 2}^{\text{ème}} \text{ somme)} \\
&= \frac{1}{1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{N+1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \right) \\
&= 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{N+1}.
\end{aligned}$$

On a obtenu (pour tout N de $\mathbb{N}^*$) :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} u_n = 1 - \frac{1}{N+1}.}$$

Remarques :

- Dans le cas particulier $N = 1$, on utilise ici la convention consistant à supposer qu'une somme dont la borne du haut est strictement inférieure à la borne du bas est nulle.

- Il est vraisemblablement permis de conclure de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} \quad \text{(par téléscopage)} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}.\end{aligned}$$

c) Avec le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge et sa somme est donnée par : } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.}$$

6) a) On a, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \geq 0$ (*cf* question 4)d)) et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$ (*cf* question précédente), donc :

$$\boxed{\text{il existe une variable aléatoire } X \text{ telle que } X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = u_n.}$$

b) Pour tout t de $[n+1, n+2]$, on a : $n+1 \leq t \leq n+2$. Donc, par décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$, on a, pour tout t de $[n+1, n+2]$: $\dfrac{1}{n+1} \geq \dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{n+2}$. On en déduit (par croissance de l'intégrale avec des bornes triées dans l'ordre croissant) :

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+1}\, \mathrm{d}t \geq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \geq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+2}\, \mathrm{d}t.$$

Or :

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \int_{n+1}^{n+2} 1\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} [t]_{n+1}^{n+2} = \frac{1}{n+1}(n+2-(n+1)) = \frac{1}{n+1}(n+2-n-1) = \frac{1}{n+1}$$

et :

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+2} \int_{n+1}^{n+2} 1\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+2} [t]_{n+1}^{n+2} = \frac{1}{n+2}(n+2-(n+1)) = \frac{1}{n+2}(n+2-n-1) = \frac{1}{n+2}$$

d'où :

$$\frac{1}{n+1} \geq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \geq \frac{1}{n+2}.$$

En particulier :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \geq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t.}$$

c) Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a, pour tout n de $[\![1,N]\!]$, $\dfrac{1}{n+1} \geq \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \int_{2}^{3} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{3}^{4} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{N+1}^{N+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \int_{2}^{N+2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \quad (*)$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq [\ln(t)]_2^{N+2}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2).$$

Détail de $(*)$: d'après la relation de Chasles.

On a bien obtenu (pour tout N de $\mathbb{N}^*$) :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2).}$$

d) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nP(X=n)$ converge (auquel cas : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)$).

Remarquons que, pour tout N de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{N} nu_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

et, comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \ln(N+2) - \ln(2) = +\infty$, on a, d'après la question précédente :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} nP(X=n) = +\infty$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nP(X=n)$ ne converge pas et donc :

$\boxed{X \text{ ne possède pas d'espérance.}}$