

# RAPPORT D'ÉPREUVE

## Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, très peu de candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,66 et un écart-type de 6,13, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

## Commentaires particuliers

### Exercice 1

Cet exercice de calcul matriciel était de forme classique sur ses premières questions, utilisant des notions rassurantes que les candidats sont habitués à traiter dans les sujets étudiés pendant l'année. La deuxième partie de l'exercice, mettait en jeu un système évolutif de réservations de formules de repas par des clients, et permettait de vérifier les aptitudes des candidats sur la manipulations des événements et des probabilités. Les calculs étaient volontairement aisés, ce qui a permis aux candidats de bien avancer sans être bloqués.

### Partie A

1. Question bien réussie pour la plupart des candidats. Cependant, trop peu d'entre eux énoncent clairement que les vecteurs propres doivent être non nuls, ce qui est attendu explicitement par les correcteurs.
2. On recense encore quelques candidats qui, après avoir calculé  $P^2$  se lancent dans la méthode du pivot de Gauss pour inverser la matrice  $P$ .

3. (a) Ici, on attend plutôt des candidats qu'ils calculent simplement le produit matriciel donnant la matrice  $D$  pour constater qu'elle est diagonale, plutôt que des réponses basées sur un cours hors programme en ECT (conditions de diagonalisation).
- (b) Le raisonnement par récurrence est connu, mais l'initialisation est souvent mal rédigée (on voit souvent ici  $0 = 0$ , ce qui ne consiste pas en une bonne initialisation dans le cas présent.). Certains candidats maladroits écrivent « pour tout  $n$  » dans la phrase de leur hérédité.
- (c) Très peu de candidats précisent que  $D$  est diagonale pour justifier le calcul de  $D^n$ . C'est pourtant une attente explicite des correcteurs chaque année. Il est dommage que des candidats ayant obtenu la bonne matrice  $D^n$  peinent dans le produit matriciel, et ne parviennent pas à corriger leurs calculs, ceci malgré le résultat final donné dans l'énoncé.

### Partie B

- (a) Souvent bien traité. Quelques rares candidats ont été induit en erreur par l'énoncé sous forme de tableau. Seule la détermination des probabilités conditionnelles reste souvent erronée car mal comprise par les candidats qui les confondent avec les probabilités d'intersection.
4. La formule des probabilités totales reste encore mal connue (voire inconnue) pour de nombreux candidats. Le raisonnement par récurrence, non indiqué par l'énoncé ici, a été rarement fait d'emblée.
5. (a) Le calcul de puissances a posé de nombreux problèmes. On voit souvent apparaître par exemple que  $-2^n = (-2)^n$ . Certains candidats ne tiennent pas compte du facteur  $(1/3)^n$  dans le calcul de  $M^n$  pour au final, comme par magie, le faire apparaître dans le résultat final afin de se conformer à l'énoncé.
- (b) Le calcul des limites est souvent confus, et donne lieu à des résultats fantaisistes, surtout pour des probabilités !
- (c) Pour cet algorithme de seuil, le programme est souvent traité, mais est malheureusement pour la plupart du temps interprété incorrectement. La référence à la « probabilité » dans l'interprétation du script est presque systématiquement omise.

### Exercice 2

Cet exercice d'analyse proposait l'étude complète d'une fonction, le tracé de sa courbe représentative, un calcul d'aire, ainsi qu'une application à l'étude d'une suite et d'une série. La première partie constitue un exercice classique, qui devrait être un objectif à atteindre pour tout candidat sérieux de la filière technologique. L'exercice a en général été malmené par les candidats, qui manquaient de rigueur et ont succombé aux moindres techniques calculatoires attendues au long de la résolution de l'exercice.

1. (a) Les calculs élémentaires de limites ne sont pas maîtrisés par tous. La formule magique « par croissances comparées » n'est pas un remède miracle qui soigne toutes les limites difficiles. Le nombre de candidats confondant les asymptotes horizontales et verticales est loin d'être négligeable. On voit apparaître  $\ln(0)$  ou  $+\infty$  dans les calculs de quelques rares copies.
- (b) Seule une minorité de copies présente des calculs de limites soignés faisant notamment référence clairement au résultat du cours et à la notion de composition.
2. Cette question est assez discriminante. De nature plus technique, elle a posé grand nombre de problèmes aux candidats, qui ont souvent tout fait parfaitement ou alors presque rien. L'essentiel de la question

résidait dans le calcul de la dérivée, mais malheureusement l'utilisation de la dérivée de  $\ln(u)$  était parfois défaillante. Parmi les bonnes copies, on retrouve à parts égales la méthode de décomposition du  $\ln$  en somme, comme l'utilisation de la dérivation directe de  $\ln(u)$ .

3. (a) Un très grand nombre de candidats applique la méthode générale, à savoir étudier  $\frac{g(x)}{x}$ , puis  $g(x) - 2x$ , alors que la partie affine de  $g(x)$  donne directement le résultat. Les candidats doivent faire preuve d'un minimum de recul dans ce genre de question pour avoir une meilleure intuition de la méthode à adopter.
- (b) La position relative est souvent mal faite, et nombre de candidats qui établissent le lien avec  $\frac{x}{x+1}$  se trompent sur sa position par rapport à 1. L'étude de la position a parfois donné lieu à des réponses faisant référence à la convexité de la fonction  $g$ . Cette méthode n'est bien entendu pas acceptée compte tenu du peu d'arguments fournis et du lien sûrement hors programme en ECT entre convexité et position de la courbe par rapport à son asymptote.
4. (a) Dans l'ensemble, les élèves utilisent correctement le théorème de la bijection en citant les bonnes hypothèses. Les élèves confondant le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection ne sont pas pénalisés. Cependant, l'appartenance de 0 à l'intervalle image est souvent oubliée, et est nécessaire pour obtenir les points.
- (b) L'algorithme de dichotomie semble inconnu des élèves. Seuls quelques rares candidats le font correctement, quasiment tous les autres remplissent uniquement la ligne de la définition de la fonction. C'est pourtant un attendu classique du programme, vu en première année, revu souvent en deuxième année, qui doit être travaillé. Le format de la question avec un programme incomplet était tout à fait bien approprié. Ce type de question sera à nouveau posé dans les années à venir. De nombreux points sont à gagner facilement avec une telle question.
5. Les tracés de graphiques ont été souvent mal traités, quand ils n'étaient pas totalement absents. Les courbes sont mal tracées, ou alors de manière très peu appliquée. Il serait bon que les asymptotes à l'inverse ressemblent à des droites et non des courbes. De manière générale, nous accorderons dans les années futures un grand nombre de points au soin des tracés demandés de manière à valoriser les candidats qui prennent le temps de tracer proprement les représentations graphiques demandées.
6. (a) Lors de l'appel d'une intégration par parties, il était attendu des élèves (et ce sera désormais le cas pour les futures sessions) qu'ils indiquent les quatre fonctions  $u$ ,  $u'$ ,  $v$  et  $v'$  qu'ils utilisent, sans préciser plus d'hypothèses (le caractère  $C^1$  est hors programme en ECT). Les candidats peuvent ensuite appliquer directement l'intégration par parties, sans avoir besoin de rappeler la formule du cours.  
 L'intégration par parties a dans l'ensemble été bien réalisée. La possibilité laissée aux candidats de déduire le résultat final de la formule intermédiaire énoncée a permis à certains autres candidats d'obtenir quelques points sans avoir véritablement maîtrisé le calcul d'intégrale.
- (b) Il a été rare de lire une interprétation correcte en terme d'aire du résultat précédent.
7. La question est très peu souvent abordée, mais quand c'est bien le cas, c'est bien fait par les candidats, avec une justification correcte et soignée de la divergence de la suite  $(S_n)$  via l'observation de la somme partielle télescopique.

### Exercice 3

Cet exercice testait les candidats sur les probabilités continues vues en première et deuxième année, ainsi que sur ses applications en estimation ponctuelle, avec l'étude du biais et du risque quadratique d'un estimateur construit à partir de la moyenne empirique d'un échantillon. Par sa place en troisième position, il a été moins abordé que les deux autres exercices, sûrement faute de temps par les candidats. Mais il y avait beaucoup de points à obtenir, les candidats étant souvent à l'aise avec les variables aléatoires à densité qu'ils ont beaucoup manipulé en fin de deuxième année.

#### Partie A

1. (a) Peu de candidats savent étudier la continuité en un point.
- (b) Comme à la question précédente, les candidats ne semblent pas savoir qu'une fonction non continue n'est pas dérivable. Le nombre de candidats ayant proposé une fonction non continue mais dérivable est impressionnant.
- (c) Les variations ont été faites correctement en général.  
 Cependant, beaucoup de candidats considèrent que  $f(x) = e^{2-x}$  sans se soucier du domaine de validité de cette définition.
- (d) L'étude de la limite également a été bien fait en général.
- (e) Les candidats ne voient en général pas le rapport entre une densité et sa représentation graphique. La mauvaise lecture (incomplète) de la fonction  $f$  est souvent retrouvée ici, puisque trop de candidats ne distinguent pas  $f(x)$  avant et après la valeur 2, et donc ne représentent qu'une courbe associée à la fonction  $x \mapsto e^{2-x}$ .
2. (a) Les candidats abordant cette question le font souvent assez bien. Ce type de raisonnement met directement en lumière les différences flagrantes de niveaux de rédaction d'un candidat à l'autre. Très souvent, la notion d'intégrale généralisée comme limite est assimilée, seul un petit nombre de candidats confond la limite avec l'intégrale partielle. Il est regrettable enfin que quelques candidats ne comprennent pas qu'on revient au cas général du paramètre  $a$  quelconque. Cela a évidemment rajouté de la confusion aux calculs.
- (b) La définition d'une densité de probabilité est bien connue par les candidats, mais la compréhension est peu convaincante. On peut regretter que nombre de candidats justifient correctement une discontinuité qu'ils n'ont parfois même pas vu à la question 1(a).
3. (a) Cette question est bien traitée, mais avec la réponse donnée par l'énoncé, on voit apparaître de nombreuses tentatives de bluff. Il est à rappeler que les examinateurs ne tolèrent pas ce genre d'initiative qui jettera immédiatement un a priori négatif du correcteur sur le reste de la copie du candidat. On attend ici une définition claire de la fonction de répartition.
- (b) La médiane a été difficilement déterminée par les candidats.
- (c) Le calcul de la probabilité conditionnelle est rarement bien mené, notamment mettant en cause le manque de maîtrise des candidats vis à vis du formalisme probabiliste (intersection de probabilités, ...) et du lien avec la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ .
4. (a) La méthode de transfert a été plutôt bien réalisée dans beaucoup de copies, preuve que les candidats ont travaillé ce genre d'exercices pendant l'année.

- (b) Beaucoup pensent reconnaître une loi exponentielle en trouvant une densité qui a une discontinuité en dehors de 0.
  - (c) Souvent les espérances et variances de  $Y$  ont été données correctement, mais peu ont su alors en déduire celles de  $X$ .
5. (a) La notion de biais d'estimateur apparaît relativement bien maîtrisée pour une bonne partie des candidats ayant abordé la question. Évidemment, certaines copies présentent un calcul du biais convenable utilisant la valeur  $E(X) = 1 + a$ , alors même que ce résultat n'a pas correctement été obtenu à la question 4(c).
- (b) Même remarque que pour le biais. L'indépendance des variables aléatoires pour la variance est souvent oubliée, alors même qu'elle avait été parfois citée sans raison dans le calcul de l'espérance. Certains candidats ne connaissent pas précisément le lien entre risque quadratique et biais. Par chance, ce dernier était nul ici, le résultat alors obtenu reste correct.
  - (c) A part la première ligne, les candidats n'ont pas trop su quoi inscrire dans la fin de ce script, ce qui est dommage compte tenu du niveau de difficulté de la question.