Les premières questions sont élémentaires, la difficulté des questions augmente progressivement, la dernière question étant destinée aux meilleurs candidats.

Exercice 2 : À partir de l'étude du commutant d'une matrice A, on montre que l'équation $N^2 = A$ (d'inconnue N) n'admet aucune solution, et on résout l'équation (d'inconnue P) $PA = P - A$, le tout avec une grande économie de moyens.
Exercice sur le fond assez facile mais la caractérisation de la matrice M inconnue, par ses neuf coefficients, peut dérouter de prime abord.

Exercice 3 : Étude d'une variable aléatoire X de densité f donnée par $f(x) = \frac{x}{2}$ si $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $f(x) = 0$ sinon, puis des variables $U = X^2$, $Y = \frac{U}{4}$ et enfin de $Z_n = Sup\,(X_1, X_2, ...X_n)$ où les n variables $X_1, X_2, ...X_n$ sont indépendantes de même loi que X.

Exercice 4 : Tirages successifs sans remise d'une boule dans une urne jusqu'à l'apparition d'un boule blanche. A l'aide de deux méthodes on détermine l'espérance et la variance de la variable égale au nombre de tirages effectués.

Le sujet est très équilibré : anlyse, algèbre linéaire, probabilités continues et discrètes, il recouvre bien l'éventail du programme. Dans le niveau des exercices proposés, il mêle bien, en début de problème, les questions accessibles à la plupart, et plus loin, les questions qui distinguent les meilleurs. Ce type de sujet est tout à fait apte à atteindre le but qu'il se propose, à savoir de hiérarchiser les candidats sur des critères équitables.

4.3 ESC 2008 voie T

Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.

Exercice 1

Un exercice sur l'étude d'une chaîne de Markov à 3 états (dont un absorbant), décomposé en deux parties, la partie I portant exclusivement sur un calcul matriciel, la partie II portant sur l'application probabiliste de ce calcul matriciel.
Ce sujet n'offrait pas de surprise, et un candidat ayant normalement travaillé pendant sa préparation devait tirer son épingle du jeu.
On pourra regretter qu'il soit indiqué d'utiliser un raisonnement par récurrence à la question 4. Partie A alors qu'il est parfaitement inutile. On pouvait le suggérer à la question précédente.
Exercice 2

Après avoir prouvé l'existence et l'unicité d'une solution α de l'équation $g\,(x) = x^2 + 2 - \ln x$, on utilise une méthode de point fixe, via la fonction auxiliaire $h\,(x) = \sqrt{2 - \ln x}$ et l'inégalité des accroissements finis, pour déterminer des approximations de α par l'étude d'une suite (u_n) qui converge vers α.
Dans ce cadre, la question 2 relative à un calcul d'intégrale, sert essentiellement à étoffer l'énoncé. Il faut espérer que certains bons candidats auront rectifié la formulation de cette question...
On peut penser que la question «justifier que $\sqrt{2} \leqslant 2$»a interloqué plus d'un candidat, et qu'un certain nombre de réponses ont ressemblé à «on sait que $\sqrt{2} \simeq 1,4$, donc $\sqrt{2} \leqslant 2$».
Le sujet est plus que similaire à l'exercice 3 de l'épreuve Ecricome 2000, Voie Technologique, qui étudiait la même suite (u_n) reliée aux deux mêmes fonctions (la fonction appelée ici h était nommée f).
Là encore, ce sujet, de facture très classique, permettait aux candidats de s'exprimer.

Exercice 3

L'exercice portait sur l'étude de la fabrication d'ampoules.
Un premier calcul portait sur des probabilités élémentaires, et était prolongé par des questions portant sur variables aléatoires suivant des lois binomiales, et une approximation de l'une de celles-ci par une loi normale. L'exercice était prolongé par une question portant sur une loi exponentielle. Pour l'essentiel, il s'agissait de bien connaître le cours.

On peut seulement regretter qu'il ne soit pas précisé soigneusement, en début d'énoncé, la nature de l'épreuve aléatoire effectuée. On parle de "l'ampoule qu'on examine" sans qu'il soit précisé de quelle manière est choisie cette ampoule. Évidemment, cette ampoule est choisie après que toutes les ampoules ont été mises dans un "pot commun", mais il n'est pas certain (le contraire est même plus que probable) que tous les candidats l'aient ainsi compris : on pourrait fort bien choisir une machine au hasard (par exemple avec équiprobabilité), puis choisir, dans l'ensemble des ampoules produites par cette machine, une ampoule au hasard.

Les premières questions de la partie B de l'exercice 1 utilisent les mêmes notions de probabilité que le début de l'exercice 3. Cependant l'épreuve couvrait une bonne partie du programme de la voie technologique, et était bien adaptée aux candidats.

La commission de Mathématiques de l'APHEC