Mathématiques – option technologique

Conception ESCP Business School

Session 2021

Présentation de l'épreuve.

L'épreuve, assez longue comme d'habitude, comportait quatre exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Encore une fois, les correcteurs ont trouvé le sujet adapté mais aussi très sélectif, notamment au travers de certaines questions très difficiles, tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre linéaire, proposait de démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ était diagonalisable. Quelques instructions `Scilab` étaient demandées pour le calcul de A^n.

• L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif principal d'étudier une variable aléatoire X de densité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda(1-p)e^{-\lambda x} + \lambda^2 p x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

L'objectif, double, était de déterminer, en s'appuyant sur la loi exponentielle, l'espérance ainsi que la fonction de répartition de X.

• L'exercice 3, portant sur le programme d'analyse, proposait l'étude de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Après une étude locale en 0, puis après avoir déterminé les variations, les limites, la convexité de f, ainsi que la présence d'une asymptote oblique à sa courbe représentative, on établissait la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

• L'exercice 4, portant sur le programme de probabilités décrivait une succession de tirages successifs sans remise de deux boules, ces boules étant, au fil des épreuves, transférées dans d'autres urnes. La première urne U_0 contenait deux boules noires et deux boules blanches, les urnes suivantes, U_1, U_2, … contenaient deux boules blanches chacune. L'objectif était de déterminer la loi de la variable aléatoire X_n égale au nombre de boules noires contenues dans l'urne U_n après y avoir introduit les deux boules extraites de U_{n-1}.

Barème

- Les quatre exercices comptaient respectivement pour 20,3%, 21,1%, 36,7% et 21,9% des points de barème.
- Le poids des questions de Scilab représentait 7% des points de barème.

Statistiques.

- Sur les 907 candidats ayant composé dans cette épreuve (953 candidats en 2020), la note moyenne est de 9,08 (quasiment semblable à celle de 2020) avec un écart-type de 5,26 indiquant que les candidats ont été classés de manière satisfaisante.
- Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16 est de 107, soit 11,8 % des candidats présents.
- Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 12 est de 335, soit 36,9 % des candidats présents.
- On compte 12 candidats qui se voient attribuer la note maximale de 20.
- La note médiane est de 8,2 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 4,8 et 14,1 respectivement.

Analyse des copies.

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène : les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes de bonne qualité (sans pour autant toujours bien maîtriser le matériel mathématique qui est à leur disposition) et les moins bons semblent dépassés par ce qui est demandé alors que le sujet était émaillé de questions classiques et, pour certaines, pas vraiment difficiles, comme les calculs de produits de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Les copies sont, à de pénibles exceptions près, agréablement présentées et bien rédigées. Rappelons qu'un correcteur ne passe pas de longues minutes à tenter de déchiffrer un passage illisible, ou presque, sur une copie, il est donc essentiel d'adopter une présentation claire, simple et honnête.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants pour lesquels elle est mise à mal :

Exercice 1

- Quelques candidats pensent que le fait que J soit diagonalisable (grâce à la relation $J = PDP^{-1}$) autorise à en déduire sans argument que $J^2P = PD^2$ comme si c'était du cours.
- Quand l'énoncé demande de vérifier que $K = J^2 - I$, il ne faut pas répondre que ce n'est pas le cas…
- La deuxième question d'informatique a plus donné lieu à des paris (une chance sur deux) qu'à une réflexion saine sur la cohérence de l'écriture des matrices A^2, A^3 et A^5. L'absence d'argument était bien sûr sanctionnée.

Exercice 2

- Il est étrange de conclure au résultat suivant : $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Beaucoup de candidats confondent espérance et variance d'une variable suivant la loi exponentielle avec celles d'une variable suivant la loi de Poisson de même paramètre.
- L'intégration par parties de la question 3a) a été réussie par un très (trop) petit nombre de candidats.

Exercice 3

- Il reste, chez un très grand nombre de candidats, à travailler les limites (souvent données au hasard ou grâce à un sésame malheureusement toujours inutile : les croissances comparées ! En effet, les questions 1a), 1b) et 2c) ne contenaient aucune forme indéterminée). Les candidats doivent aussi, et peut-être, surtout travailler les dérivées (souvent l'objet d'erreurs de calcul, avec parfois une formule de dérivation fausse au départ).

- Le tracé de la courbe représentative de la fonction f et de son asymptote reste une réelle difficulté pour la majorité des candidats.
- Face à une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, de nombreux candidats pensent que puisque la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est positive (sans avoir à démontrer quoi que ce soit).

Exercice 4

- Bien que la loi de X_1 soit donnée par l'énoncé, de nombreux candidats suivent une autre voie et trouvent souvent que X_1 suit une loi uniforme… Ceci les pénalise dès la question suivante où l'on demandait le calcul de l'espérance de X_1.
- Le fait que $P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$ n'est pas un argument suffisant (loin de là !) pour affirmer tout de go, en accord parfait avec l'énoncé, que $P(X_n = 2) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$.
- Dans la récurrence de la question 3b), de nombreuses bonnes volontés se sont brisées sur l'écueil consistant à devoir montrer que $-\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n = -2\left(\frac{1}{6}\right)^n$: il est dommage de connaître le principe de récurrence et de le gâcher pour un problème de fractions.
- Dans la question 3c), sur la lancée de la question 2), beaucoup de candidats ont affirmé que $P(X_n = 0) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$, alors qu'il suffisait de calculer $1 - P(X_n = 1) - P(X_n = 2)$.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point des trois "compartiments" du programme : analyse, algèbre linéaire et probabilités. Il n'est pas nécessaire de « tirer dans les coins » lors des révisions mais il faut surtout consolider les connaissances de base, les calculs (numériques ou de dérivées) et les méthodes classiques : on pouvait avoir une note honorable en ne traitant pas les questions compliquées de cette épreuve, mais en s'intéressant seulement à celles pour lesquelles, à leur seule lecture, on sait que l'on doit pouvoir les traiter.

Pour finir, cette année, plus encore que par le passé, les correcteurs ont glané sur les copies quelques notions qui ne sont pas au programme, comme la classe C^1 d'une fonction ou la formule donnant l'inverse d'une matrice comme étant la transposée de la comatrice de A divisée par le déterminant de A (!), ou encore un classement de fonctions candidates à jouer le rôle de la fonction que l'on dérive lors d'une intégration par parties, ce classement, explicité par un candidat, se référant notamment à la fonction arctangente ainsi qu'aux fonctions trigonométriques !