BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mai 2022, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Partie I - Étude d'une matrice carrée

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer M^2. Vérifier que : $2M^2 = M + I_2$.

   b) En déduire un polynôme annulateur de M. Quelles sont les valeurs propres possibles de M ?

   c) On pose $U = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MU et MV. Quelles sont les valeurs propres de M ?

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   b) Montrer que $MP = PD$. En déduire que M est diagonalisable.

3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $M^nP = PD^n$.

   b) Donner les quatre coefficients de D^n pour tout entier naturel n.

   c) Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n on a :

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Partie II - Étude d'un processus aléatoire

On considère deux urnes U et V contenant chacune deux jetons, l'un portant le numéro 0 et l'autre portant le numéro 1. On procède à des échanges successifs de jetons. Plus précisément, lors de chaque étape, on choisit au hasard un jeton dans U et un jeton dans V et on les change d'urne.

Par exemple, si lors du premier échange, on choisit le jeton 0 dans l'urne U et le jeton 1 dans l'urne V, alors après leur échange, l'urne U contiendra deux jetons 1 et l'urne V deux jetons 0.

Pour tout entier naturel n, on considère les événements :

- A_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient deux jetons 0 ».
- B_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient un jeton 0 et un jeton 1 ».
- C_n : « à l'issue de n échanges l'urne U contient deux jetons 1 ».

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de A_n, B_n et C_n. Au vu de la configuration initiale, on peut dire que : $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

1. a) Montrer que $a_1 = \dfrac{1}{4}$. Calculer de même b_1 et c_1.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$. Calculer de même $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(B_{n+1})$.

   En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que : $b_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}b_n + c_n$.

   c) Montrer de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2}b_n$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_{n+1} = MX_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = M^n X_0$.

c) En utilisant le 3.c) de la partie I, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $b_n = \dfrac{1}{3}\left(2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

d) Déterminer enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + x$.
On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1. a) Calculer la dérivée f' de f.

   Calculer de même la dérivée f'' de f'. Vérifier que pour tout réel x : $f''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$

   b) Etudier la convexité de f. Vérifier que la courbe (C) admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.

   c) Déterminer le sens de variation de f'. Vérifier que $f'(0) = \frac{3}{4}$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites de f calculées en 2.a).

3. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

   b) Justifier de même que la droite (D') d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

   c) On note A le point de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A.

   d) Tracer sur une même figure les droites (D), (D') et (T) ainsi que l'allure de la courbe (C).

4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution α.

   b) Justifier que $-1 \leq \alpha \leq 0$.

   c) Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près par dichotomie.

```
function y=f(x)
    y=...
endfunction
a=-1, b=0
while ...
    c=(a+b)/2
    if f(c)*f(a)<0 then
       b=...
    else
       ......
    end
end
disp(...)
```

Exercice 3

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue. Un jeu consiste à répéter la séquence suivante :

- tirer une boule au hasard dans l'urne ;
- si la boule tirée est bleue, la remettre dans l'urne ;
- si la boule tirée est rouge, la retirer et la remplacer par une boule bleue.

On définit, pour tout entier naturel k non nul, les événements B_k : « obtenir une boule bleue lors de la k-ème séquence » et R_k : « obtenir une boule rouge lors de la k-ème séquence ».

1. a) Calculer $P(B_1)$ et $P(R_1)$.
   b) En utilisant la formule des probabilités totales calculer $P(B_2)$ et $P(R_2)$.
   c) On constate à l'issue de la deuxième séquence que la boule tirée est bleue. Quelle est la probabilité que le premier tirage ait amené une boule rouge ?

2. On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la première séquence de jeu.
   a) Déterminer l'ensemble $Y_1(\Omega)$ des valeurs prises par Y_1.
   b) En utilisant la question 1.a) calculer $P(Y_1 = 1)$ et $P(Y_1 = 2)$.
   c) Calculer l'espérance de Y_1.

3. On note Y_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue de la deuxième séquence de jeu.
   a) Justifier que $Y_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   b) Justifier que $P((Y_1 = 2) \cap (Y_2 = 2)) = P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{9}$.
   c) En procédant de la même manière que dans la question précédente, justifier avec précision que la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) est donnée par :

$i \in Y_1(\Omega)$ \ $j \in Y_2(\Omega)$	0	1	2
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

4. a) Déduire de la loi conjointe du couple (Y_1, Y_2) la loi de Y_2. En déduire son espérance.
   b) En utilisant le tableau de la question 3.c) calculer $E(Y_1 Y_2)$.
   c) Montrer que la covariance de (Y_1, Y_2) est égale à $\dfrac{4}{27}$. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

5. Dans le programme suivant on introduit la variable `r` qui représente le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à un instant donné.
   a) Recopier et compléter la ligne 9 de ce programme afin qu'il simule n séquences du jeu, l'entier $n \geq 1$ étant donné par l'utilisateur.
   b) A quelle variable aléatoire de l'exercice correspond le nombre affiché lorsque l'utilisateur donne 2 comme valeur à n ?
   c) Dans l'instruction `if` des lignes 4 à 12 le cas `r==0` n'apparait pas. Expliquer pourquoi ce n'est pas nécessaire.

```
1.n=input('n?')
2.r=2
3.for k=1:n
4.    if r==2 then
5.      if rand()<2/3 then r=1
6.      end
7.    else
8.      if r==1 then
9.        if ...  then ...
10.       end
11.     end
12.   end
13.end
14.disp(r)
```

Exercice 4

Soit a un réel positif.

1. a) Soit x un réel supérieur ou égal à a. Montrer que : $\displaystyle\int_a^x e^{-2t}dt = \frac{1}{2}(e^{-2a} - e^{-2x})$.

   b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-2t}dt$ converge et que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-2t}dt = \frac{1}{2}e^{-2a}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 0$ si $t < a$ et $f(t) = 2e^{2a}e^{-2t}$ si $t \geq a$.

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

Pour permettre des économies d'énergie, l'écran d'un téléphone portable se met en veille automatiquement après un certain temps lorsqu'il n'est pas utilisé. On suppose que le temps en secondes écoulé entre le moment où l'on arrête d'utiliser le téléphone et le moment où l'écran se met en veille est une variable aléatoire X ayant pour densité f. On note F la fonction de répartition de X.

3. a) Montrer que pour tout réel $x < a$ on a : $F(x) = 0$.

   b) En utilisant la question 1.a) calculer $F(x)$ pour tout réel $x \geq a$.

4. On considère la variable aléatoire $Y = X - a$. On note G sa fonction de répartition.

   a) Montrer que pour tout réel x on a : $G(x) = F(x + a)$.

   b) En déduire que : $G(x) = 0$ si $x < 0$ et $G(x) = 1 - e^{-2x}$ si $x \geq 0$.

   c) Reconnaître la loi de Y. Donner son espérance et sa variance.

   d) En déduire que X admet une espérance et une variance et que $E(X) = \dfrac{1}{2} + a$ et $V(X) = \dfrac{1}{4}$.

5. On suppose que le réel a est inconnu et on souhaite estimer sa valeur. Pour cela on calcule n fois le temps écoulé entre le moment où on arrête d'utiliser notre téléphone et le moment où l'écran se met en veille. On note $X_1, \cdots, X_n$ chacun de ces temps. On suppose que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi que X.

   On pose $Z_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   a) Calculer $E(Z_n)$. En déduire que Z_n est un estimateur sans biais de a.

   b) Montrer que $V(Z_n) = \dfrac{1}{4n}$. En déduire la valeur du risque quadratique de Z_n.

   c) On suppose que $n = 1000$ et que les valeurs de $X_1, \cdots, X_{1000}$ ont été entrées dans une matrice Scilab `X=[X(1),...,X(1000)]`.

      On rappelle que la valeur moyenne des coefficients de la matrice ligne `X` s'obtient avec l'instruction `mean(X)`.

      Quelle instruction faut-il écrire pour obtenir une estimation de a ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1131 – D'après documents fournis