Code sujet : 294

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : BSB Burgundy School of Business

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 25 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimer la matrice A à l'aide des matrices D et N.

(2) Vérifier que $DN = N$ et calculer ND. Les matrices N et D commutent-elles ?

La décomposition précédente de A ne permet pas de calculer A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton. L'objet de l'exercice est de proposer deux méthodes pour calculer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

Première méthode

On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que

$$a_1 = -1,\ b_1 = 0,\ c_1 = 1$$
$$\text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n - 1, \quad b_{n+1} = b_n - c_n, \quad c_{n+1} - c_n = 2^n.$$

(3) Calculer a_4.

(4) Justifier que $c_3 = 7$.

(5) Calculer b_2 et b_3.

(6) Exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, a_n en fonction de n.

(7) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ en fonction de n ; en déduire, pour tout $n \geqslant 2$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$.

Tournez la page S.V.P.

(8) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)=c_n-c_1$.

(9) Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $c_n=2^n-1$.

(10) Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $b_n=(n+1)-2^n$.

(11) On admet qu'il existe trois suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telles que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & u_n & v_n\\ 0 & 1 & w_n\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$

Donner les valeurs de u_1, v_1 et w_1.

(12) Soit $n\in\mathbf{N}^*$, calculer $A\times A^n$ et en déduire que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $u_n=a_n$, $v_n=b_n$ et $w_n=c_n$.

(13) En déduire, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, une expression de A^n en explicitant ses coefficients en fonction de n.

Seconde méthode

(14) Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de la matrice A.

(15) On pose $W=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Calculer AW et en déduire une valeur propre de A.

(16) Montrer que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur propre associé.

(17) On pose $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$. Calculer P^2.

(18) En déduire que P est inversible et donner son inverse.

(19) On note $S=PAP$ et $M=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; montrer que $S=D+M$ (où D est la matrice donnée en début d'énoncé).

(20) Soit $k\in\mathbf{N}$, exprimer D^k en fonction de k.

(21) Calculer M^2 et en déduire, pour tout entier $k\geqslant 2$, la matrice M^k.

(22) Montrer que $MD=DM$.

(23) Pour tout entier $n\in\mathbf{N}$ et tout entier k compris entre 0 et n, on note $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exprimer $\displaystyle\binom{n}{1}$ en fonction de n.

(24) À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$:

$$S^n=D^n+n\,M.$$

(25) Exprimer S^n en explicitant ses coefficients en fonction de n, pour tout $n\in\mathbf{N}$.

(26) Démontrer que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $A^n=PS^nP$.

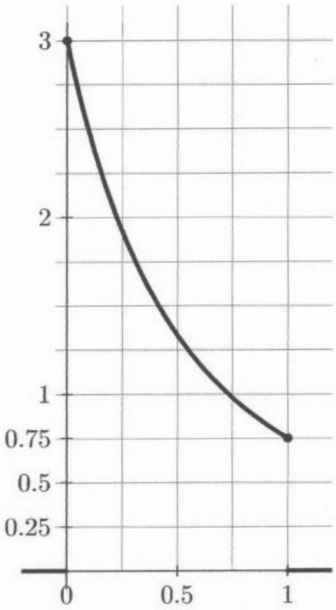
(27) Déduire des deux questions précédentes l'expression A^n en explicitant ses coefficients en fonction de n.

Exercice 2

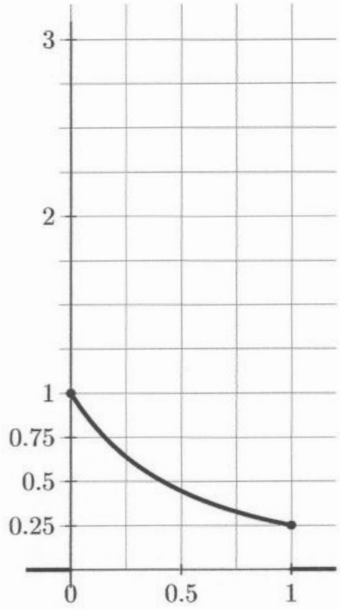
On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbf{R}$, ainsi que trois graphiques A, B et C :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin [0,1] \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{pour } x \in [0,1] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin [0,1] \\ \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{pour } x \in [0,1] \end{cases}$$

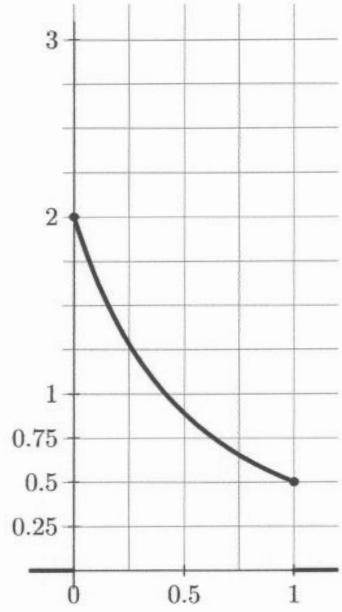
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin [0,1] \\ \dfrac{3}{(1+x)^2} & \text{pour } x \in [0,1] \end{cases}$$



Graphique A



Graphique B



Graphique C

(1) Chaque graphique représente la courbe d'une des trois fonctions f, g ou h. Associer à chaque fonction le graphique correspondant, en expliquant rapidement votre raisonnement.

(2) Expliquer pourquoi les graphiques A et B ne peuvent pas représenter une densité de probabilité.

(3) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

(4) En déduire que g est une densité de probabilité.

(5) Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction g.

(a) Démontrer que la fonction de répartition de X est la fonction G définie sur $\mathbf{R}$ par

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 2 - \dfrac{2}{1+x} & \text{pour } x \in [0,1] \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases}$$

(b) Calculer $\mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

(c) Calculer $\mathbf{E}(X)$, l'espérance de X.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

L'exercice comporte deux parties **indépendantes**. Dans tout l'énoncé, on note $\mathbf{P}(A)$ la probabilité d'un évènement A et on note $\mathbf{P}_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Première partie

Alice et Bob organisent un jeu à l'aide du matériel suivant :

— Alice dispose de trois boules rouges et d'une pièce équilibrée ;

— Bob dispose de deux boules vertes et d'une pièce équilibrée ;

— une urne vide est placée entre les deux joueurs.

Le déroulement d'une partie est le suivant :

— chaque joueur lance la pièce autant de fois qu'il possède de boules ;

— pour chaque PILE obtenu, il place une de ses boules dans l'urne.

Alice est déclarée gagnante si l'urne contient strictement plus de boules rouges que de boules vertes ; sinon, Bob est déclaré gagnant.

On note X le nombre de boules placées dans l'urne par Alice et Y le nombre de boules placées par Bob dans l'urne. Enfin, on nomme A l'évènement « Alice gagne ».

(1) Lors d'une partie, Alice obtient PPF et Bob obtient PF lors des lancers de leur pièce (on a noté P pour PILE et F pour FACE) ; décrire la composition de l'urne, les valeurs de X et de Y et enfin donner le vainqueur de cette partie.

(2) Décrire l'évènement A à l'aide des variables aléatoires X et Y.

(3) Reconnaître la loi de X et celle de Y ; rappeler les valeurs de leurs espérances respectives $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

(4) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de X :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X=k)$	$1/8$		$3/8$	

(5) La fonction PYTHON ci-contre a pour objectif de simuler le nombre de boules placées par Alice dans l'urne.

```
1 import numpy.random as rd
2
3 def simulation_alice():
4   X=0
5   for k in range(1,4):
6     r=rd.random()
7     if r>...:
8       X=X+1
9   return X
```

Recopier et compléter la ligne 7 afin que ce programme retourne une valeur suivant la loi de X.

(6) Comparer l'espérance de X avec celle de Y. Lequel des deux joueurs semble favorisé ? Expliquer pourquoi.

(7) Expliquer que la probabilité qu'Alice gagne sachant que Bob n'a obtenu aucun PILE, $\mathbf{P}_{(Y=0)}(A)$, est égale à $\frac{7}{8}$.

(8) En considérant le système complet d'évènements $\{(Y=0), (Y=1), (Y=2)\}$, montrer que $\mathbf{P}(A)=\frac{1}{2}$.

(9) Le jeu est-il équitable ?

(10) Sachant qu'Alice a remporté la partie, quelle est la probabilité que Bob n'ait obtenu aucun PILE ?

Seconde partie

Alice et Bob décident de changer la règle du jeu, ils jouent des manches successives de la façon suivante :

- Alice dispose d'une boule rouge et d'une pièce équilibrée;
- Bob dispose d'une ou deux boules vertes et d'une pièce truquée, tombant sur PILE avec une probabilité $\frac{1}{3}$.
- Une urne vide est placée entre les deux joueurs.

Une manche se déroule ainsi :

- Alice lance sa pièce une fois et place sa boule rouge dans l'urne si elle a obtenu PILE.
- Bob lance sa pièce autant de fois qu'il a de boules vertes (une ou deux) et place une boule verte dans l'urne pour chaque PILE obtenu.

Si l'urne contient strictement plus de boules rouges que de boules vertes, Alice est déclarée gagnante; sinon Bob est déclaré gagnant. À la fin de la manche, on vide l'urne et chaque joueur récupère une boule de sa couleur. Si Alice a remporté la manche, Bob prend une boule verte supplémentaire pour la manche suivante.

Ainsi, au début de chaque manche, Alice dispose d'une boule rouge. S'il a gagné la manche précédente, Bob dispose d'une seule boule verte et s'il a perdu la manche précédente, Bob dispose de deux boules vertes.

Au début de la première manche, Bob dispose d'une seule boule verte.

Pour chaque entier naturel non nul n, on note A_n l'évènement « Alice remporte la manche n » et a_n sa probabilité : $a_n = \mathbf{P}(A_n)$.

(11) En explicitant l'évènement A_1, montrer que $a_1 = \frac{1}{3}$.

(12) Soit n un entier naturel non nul, expliquer pourquoi $\mathbf{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

(13) (a) On considère un entier non nul n tel qu'Alice a remporté la manche n. Quelle est la probabilité que Bob place deux boules vertes dans l'urne lors de la manche $n+1$?

(b) Montrer que $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{9}$.

(c) En déduire la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{A_n}(\overline{A_{n+1}})$.

(14) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, en considérant le système complet d'évènements $\left\{A_n, \overline{A_n}\right\}$, démontrer que

$$a_{n+1} = -\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{3}.$$

(15) La fonction PYTHON ci-contre a pour objectif de calculer le terme de rang n de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$; elle prend en entrée un entier naturel non nul n et donne en sortie la valeur de a_n.
Recopier et compléter les lignes 3 et 4 afin que ce programme affiche la bonne valeur de a_n.

```
1 def terme(n):
2   a=1/3
3   for k in range(...);
4     a=...
5   return a
```

(16) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: $x = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{1}{3}$. Pour la suite de l'exercice, on note ℓ sa solution.

(17) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = a_n - \ell$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est géométrique.

(18) Après avoir calculé u_1, déterminer une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

(19) Donner une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

(20) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}3$.

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbf{N}$, on considère la fonction f_n définie pour tout réel x par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$ et on note

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calcul de l'intégrale I_1.

On considère g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par $g(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

(1) Calculer g' la dérivée de g.

(2) En déduire que la fonction F_1 définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par $F_1(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f_1.

(3) Montrer que $I_1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$.

Étude de f_2.

Dans cette question, on s'intéresse à la fonction f_2 définie sur $\mathbf{R}$ par $f_2(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

(4) Déterminer les limites de f_2 en $-\infty$ et $+\infty$ en justifiant vos réponses.

(5) Calculer la dérivée de f_2 et montrer qu'elle est donnée, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par

$$f_2'(x) = (2-x)x\mathrm{e}^{-x}.$$

(6) Étudier le signe de f_2' et dresser le tableau de variations de f_2, en incluant les limites trouvées précédemment.

(7) Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f_2(x) \leqslant 4\mathrm{e}^{-2}$.

(8) En déduire que $0 \leqslant I_2 \leqslant 4\mathrm{e}^{-2}$.

(9) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_2 = -\mathrm{e}^{-1} + 2I_1$.

(10) En déduire la valeur de I_2.

Étude de la suite (I_n).

On rappelle que par définition, on a $0! = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+1)! = (n+1) \times n!$; donc $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$.

(11) Calculer $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

(12) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_{n+1} = -\mathrm{e}^{-1} + (n+1)I_n.$$

(13) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1}.$$

(14) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

(15) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

(16) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1184 – D'après documents fournis