BCE BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 25 avril 2025, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Première partie – Étude de A et de ses puissances.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $A - I$ puis $(A-I)^2$.

(2) En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} sous la forme $\alpha A + \beta I$ où α et β sont des réels à déterminer.

(3) Exprimer l'inverse de A sous la forme d'un tableau de nombres.

(4) Montrer que $A^2 = 2A - I$.

(5) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A^n = nA - (n-1)I.$$

(6) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

(7) En déduire que A ne peut admettre qu'au plus une valeur propre.

(8) Montrer que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.

(9) Déterminer des réels a et b tels que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ soit un autre vecteur propre de A.

(10) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que A n'est pas diagonalisable.

Deuxième partie – Étude de suites.

On considère trois suites, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi que les matrices colonnes

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

telles que

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B.$$

Ainsi, $X_1 = AX_0 + B$.

(11) Calculer les 3 coefficients de la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$.

(12) Déterminer un réel ω tel que $F = \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifie $F = AF + B$.

(13) Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_{n+1} - F = A(X_n - F)$.

(14) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n - F = A^n(X_0 - F)$.

(15) Conclure, à l'aide des résultats obtenus dans les deux parties de l'exercice, en exprimant le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de n.

EXERCICE 2

L'objectif de cet exercice est d'explorer quelques propriétés d'une famille de fonctions polynomiales. Les deux premières parties sont indépendantes et concernent l'étude de deux cas particuliers. La troisième partie est indépendante des deux premières et s'intéresse à certaines propriétés liées aux points communs des courbes représentatives de ces fonctions.

Pour chaque nombre réel m, on considère la fonction polynomiale P_m définie pour tout x de $\mathbf{R}$ par

$$P_m(x) = 2mx^3 + (2-m)x^2 + (1-2m)x + (m-1).$$

Première partie – Le cas $m = -\frac{1}{2}$.

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$f(x) = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

(1) Calculer l'image de 2 par f ; donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

(2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, en justifiant vos réponses.

(3) Dresser le tableau de variations de f, en le complétant avec les limites calculées précédemment (on donne $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{11}{6}$).

(4) Calculer $f(0)$; en déduire que f admet une seule racine dans l'intervalle $[0, 2]$.

On donne les deux fonctions ci-dessous, écrites en PYTHON :

```
1 def f(x) :
2   return (-x**3+5/2*x**2+2*x-3/2)
3 def Racine(a,b,f) :
4   while (b-a)>0.001 :
5     m=(a+b)/2
6     print(m)
7     if f(m)==0 :
8       return(m)
9     elif f(a)*f(m) > 0 :
10      a = m
11    else :
12      b = m
13  return(m)
```

(5) Expliquer le rôle de la fonction `f(x)` définie aux lignes 1 et 2.

(6) Le lancement de la fonction `Racine(0,2,f)` exécute un algorithme de dichotomie permettant d'approcher ou de trouver la racine de f comprise entre 0 et 2. En effectuant les différents calculs à la main, indiquer **toutes** les valeurs affichées par la commande `print` présente à la ligne 6 ainsi que la valeur renvoyée par la fonction.

Deuxième partie – Le cas $m = 2$.

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction polynomiale g définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x + 1.$$

(7) Vérifier que -1 est une racine de g.

(8) Déterminer un polynôme de degré deux φ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = (x+1)\varphi(x)$.

(9) En déduire toutes les racines de g.

Troisième partie – Étude des points communs.

On note $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de la fonction polynomiale P_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

(10) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$ où $g = P_2$ est la fonction de la deuxième partie.

(11) Montrer que les points $A = (-1, 0)$ et $B = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ sont communs à toutes les courbes $\mathscr{C}_m$.

(12) Dresser le tableau de signes de la fonction h définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $h(x) = P_1(x) - P_0(x)$.

(13) Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ et les axes $x = -1$ et $x = \frac{1}{2}$.

(14) Montrer que les courbes $\mathscr{C}_m$ ont un troisième point commun C dont on donnera les coordonnées.

(15) Pour tout réel $m > 0$, on note α_m la racine de P_m telle que $\alpha_m \neq -1$ et $\alpha_m \neq \frac{1}{2}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \alpha_m = 1$.

Indication : on pourra, par exemple, commencer par montrer que l'on peut factoriser l'expression $P_m(x)$ par $(x+1)(2x-1)$.

EXERCICE 3

On dispose de trois jetons dont les faces sont décrites ainsi :

jeton A	jeton B	jeton C
une face bleue numérotée 1 une face rouge numérotée 2	une face bleue numérotée 1 une face jaune numérotée 3	une face bleue numérotée 1 une face verte numérotée 4

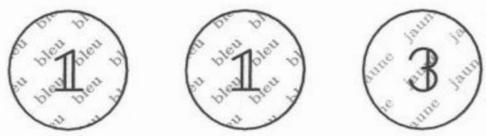
On suppose que lorsqu'on lance les trois jetons sur une table,

— les jetons ne se chevauchent pas,

— chaque face de chaque jeton a la même probabilité d'être apparente que la face opposée,

— les faces montrées par les jetons sont indépendantes les unes des autres.

On lance les trois jetons sur une table et on note X le nombre de faces bleues visibles, Y le nombre de couleurs différentes visibles et Z le produit des nombres visibles.
Par exemple, si le lancer donne lieu au schéma suivant avec deux jetons montrant une face bleue numérotée 1 et un jeton montrant une face jaune numérotée 3 :



on a $X = 2$ car il y a deux faces bleues apparentes ; $Y = 2$ car il y a deux couleurs différentes visibles et $Z = 3$ car $Z = 1 \times 1 \times 3$.

(1) Reconnaître la loi de la variable aléatoire X et donner son espérance et sa variance.

(2) Déterminer, en justifiant votre réponse, les valeurs possibles de la variable aléatoire Y.

(3) Expliquer rapidement pourquoi les évènements $(X = 3)$ et $(Y = 1)$ sont égaux et en déduire $P(Y = 1)$, la probabilité de l'évènement $(Y = 1)$.

(4) À l'aide d'un raisonnement analogue, calculer $P(Y = 2)$.

(5) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

(6) Montrer que l'espérance de Y est $E(Y) = \dfrac{19}{8}$.

(7) Calculer la variance de Y.

(8) Lister tous les évènements élémentaires qui réalisent l'évènement $((X = 1) \cap (Y = 3))$; en déduire $P((X = 1) \cap (Y = 3))$.

(9) Calculer les valeurs des réels **A**, **B**, **C** et **D** du tableau ci-dessous donnant la loi conjointe du couple (X, Y). On ne demande pas de justifier les calculs de cette question.

Tableau des $P((X = i) \cap (Y = j))$

$i \backslash j$	1	2	3
0	0	0	**A**
1	0	0	**B**
2	0	**C**	0
3	**D**	0	0

(10) En déduire que la covariance des variables X et Y est $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\dfrac{9}{16}$.

(11) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(12) Lister les 8 valeurs possibles pour la variable aléatoire Z puis donner la loi de Z.

(13) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Z.

EXERCICE 4

On considère G la fonction définie pour tout x de $\mathbf{R}$ par :

$$G(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

(1) Calculer les limites de G en $-\infty$ et en $+\infty$; justifier votre réponse.

(2) Calculer G', la dérivée de G.

(3) En déduire le tableau de variations de G, complété avec les limites trouvées en 1).

(4) Démontrer que la courbe de la fonction G admet un point d'inflexion d'abscisse 1.

On considère les fonctions f et F définies pour tout x et tout t de $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(5) Démontrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X dont la densité est f.

(6) Montrer que F est la fonction de répartition de X.

(7) Calculer $P(X > 1)$.

(8) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(9) En déduire que X admet une espérance et que $E(X) = 2$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1183 – D'après documents fournis