ESPRIT GENERAL

Objectifs de l'épreuve
Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).
Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets
Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme
Instruments de calcul interdits, tables de lois fournies.

Evaluation
Exercices de valeur sensiblement égale.

EPREUVE 2008

Durée : 4 heures
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET

Exercice 1

Après quelques questions préliminaires d'algèbre linéaire, on étudie dans cet exercice le mouvement aléatoire d'une puce, qui se déplace sur les sommets d'un triangle A, B, C.

1.1. Puissance enième d'une matrice.

On considère les matrices M et P définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}. Que constatez-vous ?
2. Vérifier que la matrice $D = PMP$ est une matrice diagonale.
3. Justifier que $M = PDP$ et établir par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$M^n = PD^nP$$
4. En déduire que l'expression matricielle de M^n est donnée pour tout entier naturel n par :
$$M^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 1-\left(\frac{1}{6}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{6}\right)^n & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Etude du mouvement aléatoire d'une puce.

A l'instant initial $t = 0$, la puce est au sommet A et se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si à l'instant n la puce est au sommet A du triangle, elle est à l'instant $n + 1$ au sommet B avec la probabilité égale à $1/3$, au sommet C avec la probabilité égale à $2/3$.
- Si à l'instant n la puce est au sommet B du triangle, elle est à l'instant $n + 1$ soit au sommet C, soit au sommet A de façon équiprobable.
- Si à l'instant n la puce est au sommet C alors elle y reste.

Pour tout entier naturel n, on désigne par :
A_n, l'événement "la puce est au sommet A à l'instant n", et par a_n sa probabilité.
B_n, l'événement "la puce est au sommet B à l'instant n", et par b_n sa probabilité.
C_n, l'événement "la puce est au sommet C à l'instant n", et par c_n sa probabilité.

1. Donner les valeurs de a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1.
2. Exprimer, à l'aide de la formule des probabilités totales, les probabilités $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n.
3. En déduire une matrice A telle que l'on ait pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
Vérifier que la matrice $A^2 = M$.
4. Etablir que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{2n} \\ b_{2n} \\ c_{2n} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
5. En déduire, que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{pmatrix} = AM^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
6. Déterminer les expressions de $a_{2n}, b_{2n}, c_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1}$ et c_{2n+1} en fonction de l'entier naturel n.
7. Montrer que les suites $(a_{2n}), (b_{2n}), (c_{2n}), (a_{2n+1}), (b_{2n+1}), (c_{2n+1})$ sont convergentes.
8. Les valeurs de b_{2n} et a_{2n+1} étaient-elles prévisibles ?

Exercice 2

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = e^x(x-1) + x^2$$

2.1. Etude de la fonction g.

1. Déterminer les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.
2. Calculer la fonction dérivée de g, montrer que son signe ne dépend que du signe de x et en déduire les variations de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, +\infty[$. (On ne cherchera pas à déterminer α).
4. A l'aide du tableau de valeurs suivant, donner un encadrement le plus précis possible de α.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$g(x)$	-1	-0,57	1	4,49	11,38	24,5

2.2. Etude d'une suite (u_n).

Soit f la fonction de la variable réelle déterminée sur $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Prouver que α est l'unique solution sur l'intervalle I de l'équation :
$$f(x) = x.$$
2. Calculer la fonction dérivée f' et déterminer les variations de f sur l'intervalle I.
3. Sachant que $f(0,5) \approx 0,76$ et $f(1) \approx 0,72$, démontrer que l'intervalle I est stable par f, c'est-à-dire que :
$$\forall x \in I, \qquad f(x) \in I.$$
4. Montrer que pour tout x de I, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$u_n \in I.$$
6. Appliquer à f l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle I et prouver que pour tout entier naturel n :
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right) |u_n - \alpha|.$$

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

7. Déterminer un entier naturel n_0 de telle sorte que si l'entier n est supérieur ou égal à n_0 alors $|u_n - \alpha|$ est inférieur ou égal à 10^{-3}.

2.3. Un calcul d'aire.

Sur l'annexe, située en fin de problème, on donne les courbes représentatives sur $[0, +\infty[$ de trois fonctions : celle de g, celle de $\varphi : x \mapsto x^2$ et celle d'une fonction ψ inconnue.

1. Associer à chacune des courbes $(C_1), (C_2), (C_3)$, la fonction dont elle est la représentation.
2. $\mathcal{A}$ désignant l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie hachurée sur le schéma, exprimer $\mathcal{A}$ sous forme d'une intégrale.
3. En utilisant une intégration par parties, déterminer $\mathcal{A}$.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de deux jeux présents dans une fête foraine.

3.1. Premier jeu.

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes.

1. Une personne décide de jouer N parties ($N \geqslant 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.
   a. Donner la loi de X_N, ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
   b. Justifier que $Y_N = 3\,X_N - N$. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.
2. Une seconde personne joue jusqu'à ce qu'elle gagne pour la première fois une partie, et s'arrête alors de jouer. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de parties jouées et T la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.
   a. Donner la loi de Z.
   b. Exprimer T en fonction de Z, en déduire l'espérance de T.
3. Pour quelle valeur de N les deux joueurs peuvent-ils espérer le même gain ?

3.2. Deuxième jeu.

1. On considère une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Un joueur lance une fléchette sur cette cible. On note D la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact au centre O de la cible. On suppose que D est une variable à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

   b. Déterminer l'espérance de D.

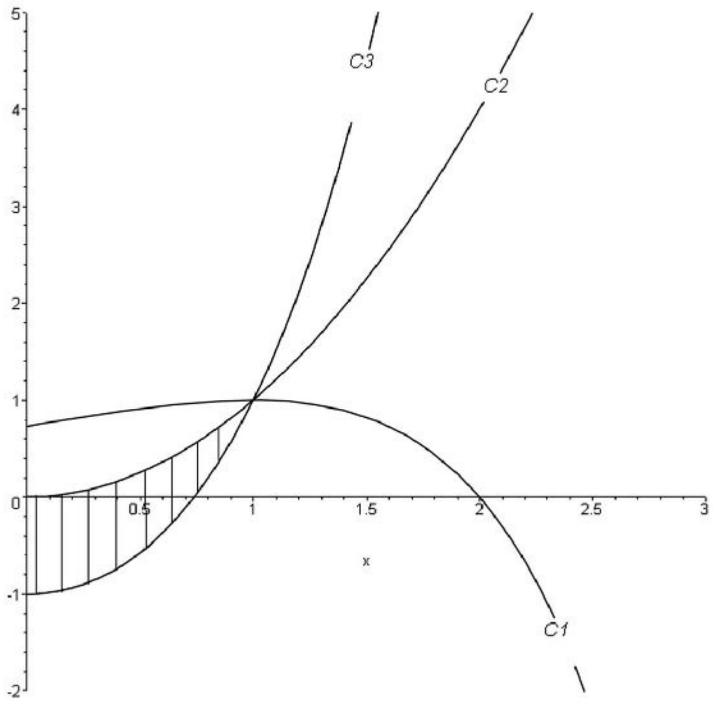
   c. Déterminer la fonction de répartition F de D.

   d. Quelle est la probabilité de l'événement A = "la fléchette n'atteint pas la cible" ?

2. Un joueur se présente au stand de tir et lance trois fléchettes sur la cible décrite à la question précédente. Le joueur gagne si les trois fléchettes sont à une distance du centre O inférieure à $\frac{1}{2}$. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note D_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de la $i^{ème}$ fléchette au centre O. On suppose que ces trois variables D_1, D_2, D_3 sont indépendantes et suivent la même loi que D.

   a. Quelle est la probabilité de l'événement $\left[D_i \leqslant \frac{1}{2}\right]$?

   b. Quelle est la probabilité de l'événement G = "le joueur gagne la partie" ?



CORRIGE

Exercice 1

Après quelques questions préliminaires d'algèbre linéaire, on étudie dans cet exercice le mouvement aléatoire d'une puce, qui se déplace sur les sommets d'un triangle A, B, C.

1.1. Puissance enième d'une matrice.

On considère les matrices M et P définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix},$$

1. Montrons que P est inversible et déterminons P^{-1}.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ **	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$

** A cette étape la matrice est triangulaire, aucun de ses éléments diagonaux n'est nul, on peut affirmer que P est inversible.

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

On constate que $P^{-1} = P$.

2. Vérifions que la matrice $D = PMP$ est une matrice diagonale

$$PMP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 5/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PMP = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En conclusion :

$$\boxed{PMP = D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$