ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2010

3

Mathématiques

Option Technologique

Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps": 8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p

ecricome

EXERCICE 1

On considère les matrices M et P suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I. Réduction de la matrice M et calcul de M^n.

1. Prouver que la matrice P est inversible et donner les neuf coefficients de la matrice inverse P^{-1}.
2. Calculer la matrice T définie par : $T = P^{-1}MP$.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$M^n = PT^nP^{-1}.$$
5. En déduire l'expression de la matrice M^n sous la forme d'un tableau de nombres.

II. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 0. \\ \text{Pour tout entier naturel } n : u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

1. Calculer u_3 et u_4.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la matrice colonne : $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

   Vérifier que, pour tout entier naturel n :
$$V_{n+1} = MV_n.$$
3. Etablir, par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$V_n = M^nV_0.$$
4. Exprimer u_n en fonction de n.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{-x}.$$

I. Etude de la fonction f.

On note C la courbe représentative de f.

1. (a) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour C ?

   (b) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour C ?

2. (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit D la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

   Donner une équation de la droite D.

   (c) Etudier la convexité de f.

3. Tracer sur un même schéma C et D (**valeur numérique** : $e^{-1} \approx 0,4$).

II. Etude d'une famille d'équations.

Dans cette partie on s'intéresse aux solutions positives ou nulles (si elles existent) de l'équation

$$(E_n) : f(x) = x^n$$

où n désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation (E_1).

2. Pour n entier naturel avec $n \geqslant 2$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(x) = e^{-x} - x^{n-1}.$$

   (a) Montrer que g_n est une fonction strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

   (b) En déduire que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.

   On note cette solution α_n.

   (c) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \quad \alpha_n \in]0, 1[$.

   (d) Donner, pour $n \geqslant 2$, l'ensemble des solutions positives de l'équation (E_n).

Tournez la page s.v.p.

III. Etude d'une variable aléatoire à densité.

Dans cette partie on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

2. Montrer que la fonction h est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

3. On note H la fonction de répartition de X. Déterminer la fonction H.

4. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \leqslant 1), \quad P(1 \leqslant X \leqslant 2) \quad \text{et} \quad P_{(X \leqslant 2)}(X \geqslant 1).$$

EXERCICE 3

Cet exercice étudie deux jeux de dés avec des dés équilibrés à six faces.

I. Etude du premier jeu :

Dans ce jeu on lance simultanément deux dés équilibrés, si les deux dés donnent le même résultat alors le joueur marque 1 point, sinon il ne marque pas de point.

1. Calculer la probabilité p de l'événement A : « Les deux dés donnent le même résultat ».

2. Le joueur répète n fois le même jeu et on note alors Y_n le nombre de points obtenus par le joueur après ces n parties.

   (a) Reconnaitre la loi de Y_n *(une justification soigneuse est attendue)*.

   Donner explicitement $P(Y_n = k)$ pour les valeurs k prises par Y_n.

   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(Y_n)$ de la variable aléatoire Y_n et sa variance $V(Y_n)$.

3. Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il marque un point pour la première fois.

   On note alors Z la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur.

   (a) Reconnaitre la loi de Z (*une justification soigneuse est attendue).*

   Donner explicitement $P(Z=k)$ pour les valeurs k prises par Z.

   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z et sa variance $V(Z)$.

II. Etude d'un deuxième jeu.

Dans ce jeu, on lance successivement deux dés équilibrés.

On note :

D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé,

E_1 l'événement : «$D_1 < D_2$», E_2 l'événement : «$D_1 = D_2$»

et E_3 l'événement : «$D_1 > D_2$».

Lors d'une partie,

- si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

Le joueur répète n fois ce jeu. Pour tout entier naturel $i \geqslant 1$, on note :
- X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la $i^{\text{ème}}$ partie ;
- S_i le nombre total de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3 (*On démontrera notamment que* $P(E_1) = P(E_3) = \dfrac{5}{12}$).
2. Soit $i \in \{1, 2, ..., n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire S_1.
4. Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire S_2 et donner sa loi.

5. (a) Préciser les valeurs prises par la variable aléatoire S_3.

   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (S_2, S_3) . *On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.*

   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire S_3.

6. (a) Ecrire S_n en fonction des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n.

   En déduire l'espérance mathématique $E(S_n)$ de S_n.

   (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?