



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur Épreuves ESC : ESC CHAMBERY

Code sujet

294

ESC__MATT

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Mercredi 14 mai 2008, de 14 h. à 18 h.

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie A :

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer D^k pour tout entier naturel k .
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$ et que pour tout entier naturel k , $A^k = PD^kP^{-1}$.
4. Déterminer $P^{-1}X_1$ et en déduire par récurrence que pour tout entier naturel k : $A^k X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^k \\ \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^k \\ 1 - \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^k \end{pmatrix}$.

Partie B :

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A , B et C .

On considère en outre que :

- Si M a choisi le dessert A la semaine n , alors la semaine $n+1$ il choisit :
le dessert A avec une probabilité de $1/3$ ou le dessert C avec une probabilité de $2/3$.
- Si M a choisi le dessert B la semaine n , alors la semaine $n+1$ il choisit :
le dessert A avec une probabilité de $1/3$ ou le dessert B avec une probabilité de $2/3$.
- Si M a choisi le dessert C la semaine n , il reprend le dessert C la semaine $n+1$.
- Le consommateur M choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On notera pour tout entier naturel non nul n :

A_n l'événement : " M a choisi le dessert A la n -ième semaine ".

B_n l'événement : " M a choisi le dessert B la n -ième semaine ". On note aussi : $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

C_n l'événement : " M a choisi le dessert C la n -ième semaine ".

1. Donner $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$, ainsi que les probabilités $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que $P(A_{n+1}) = \frac{1}{3} P(A_n) + \frac{1}{3} P(B_n)$.
Donner de même des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $U_{n+1} = AU_n$.
(b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $U_n = A^{n-1}X_1$.
4. En déduire, en fonction de n , la probabilité $P(A_n)$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$. On donne $\ln 2 \approx 0,7$.

1.
 - (a) Calculer la dérivée g' puis étudier les variations de g .
 - (b) Calculer les limites de g en 0 à droite et en $+\infty$.
 - (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x > 0$ admet une unique solution que l'on notera α . Justifier que $1 < \alpha < 2$.
 - (d) Donner le signe de $g(x)$ en établissant les cas $x < \alpha$, $x = \alpha$, $x > \alpha$.
 - (e) Tracer dans un repère orthonormé l'allure de la courbe représentative de g , en faisant apparaître les points de cette courbe d'abscisse $x = 1$, $x = \alpha$, $x = 2$.
2.
 - (a) Montrer grâce à une intégration par parties que : $\int_1^\alpha \ln x \, dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$.
 - (b) En utilisant la relation vérifiée par α , montrer que : $\int_1^\alpha g(x) \, dx = \frac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha$.
 - (c) Hachurer la zone du plan correspondant à cette intégrale sur le graphe de la question 1.(e).

On définit maintenant une suite qui déterminera une valeur approchée du réel α obtenu en question 1.(c).

A cet effet on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n : u_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(u_n)}.$$

3.
 - (a) On note pour tout réel $x \in [1; 2]$, $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$. Vérifier que h est dérivable sur $[1; 2]$ et que pour tout réel $x \in [1; 2]$, $h'(x) = -\frac{1}{2xh(x)}$ puis donner le tableau des variations de h avec les valeurs aux bornes.
Justifier que $\sqrt{2} \leq 2$, que $\sqrt{2 - \ln 2} \geq 1$ et que pour tout $x \in [1; 2]$, $h(x) \in [1; 2]$.
 - (b) Montrer que pour tout entier naturel n : u_n existe et $u_n \in [1; 2]$.
 - (c) Montrer que pour tout réel $x \in [1; 2]$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
Vérifier que $h(\alpha) = \alpha$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
 - (d) Montrer que pour tout entier naturel n : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est le réel α .

EXERCICE 3

Une usine fabrique des ampoules, dont 50% proviennent d'une machine M_1 , 30% proviennent d'une machine M_2 et 20% proviennent d'une machine M_3 .

La probabilité qu'une ampoule fabriquée soit défectueuse est différente selon les machines :

Elle vaut $\frac{3}{100}$ pour M_1 , $\frac{5}{100}$ pour M_2 et $\frac{15}{100}$ pour M_3 .

Pour $k = 1, 2, 3$ on notera l'événement F_k : " l'ampoule qu'on examine a été fabriquée par M_k ".

Les fonctionnements des trois machines seront toujours supposés indépendants.

1. (a) Donner $P(F_3)$, probabilité qu'une ampoule choisie au hasard ait été fabriquée par M_3 .
- (b) Montrer que la probabilité qu'une ampoule choisie au hasard soit défectueuse est 0,06.
- (c) On suppose ici qu'une ampoule choisie au hasard s'est révélée défectueuse. Quelle est la probabilité que cette ampoule ait été fabriquée par M_3 ?

Dans toute la suite on note n un entier naturel non nul.

On suppose dans toute la suite qu'on examine un lot choisi au hasard de n ampoules fabriquées par cette usine.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses dans ce lot.

2. Justifier que la variable X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Préciser $X(\Omega)$ et exprimer la probabilité $P(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$.

Quel est le nombre moyen de pièces défectueuses dans le lot ?

3. Dans cette question seulement on suppose que $n = 14100$ et on décide d'approcher la loi de X en utilisant une variable Z qui suit une loi normale de paramètres m et σ^2 .

- (a) Justifier que $m = 846$ et $\sigma = \frac{141}{5}$.
- (b) A l'aide de cette approximation et sans tenir compte de la correction de continuité, calculer une valeur approchée de la probabilité que X prenne une valeur comprise entre 818 et 874 (on utilisera la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite).
On donne les valeurs numériques : $\frac{140}{141} \approx 0,99$ et $\Phi(0,99) \approx 0,839$.

4. Dans cette dernière question on suppose que $n = 7$ et que les sept ampoules choisies sont sans défaut.

On suppose également que le temps de fonctionnement d'une ampoule sans défaut suit une loi exponentielle de paramètre 0,2. On branche ces 7 ampoules au même moment.

On note T la variable aléatoire égale au temps pendant lequel les sept ampoules vont fonctionner.

- (a) Justifier que pour tout réel t positif, $P(T > t) = (e^{-0,2t})^7$.
- (b) En déduire que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre, puis donner l'espérance et la variance de T .