Code sujet : 285

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS

MATHÉMATIQUES T

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

Mercredi 23 avril 2025, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants.

Exercice 1

Dans cet exercice, on souhaite étudier l'évolution d'une population à l'aide de différents modèles mathématiques. On envisage trois situations :

- extinction de la population si sa taille tend vers 0,
- explosion de la population si sa taille tend vers $+\infty$,
- survie de la population si sa taille tend vers un réel strictement positif. Dans ce cas, il y a un équilibre entre les naissances et les décès.

Dans la suite, le temps sera mesuré à l'aide d'un entier naturel n.

Partie I) Division de la population en deux classes d'âge

Dans cette partie, on considère que la population est divisée en deux classes d'âge : les enfants et les adultes. On définit, à tout instant $n \in \mathbb{N}$, la taille de la population des enfants notée u_n et la taille de la population des adultes notée v_n.
On suppose qu'à l'instant initial, u_0 **et** v_0 **sont strictement positifs** et que l'évolution de cette population est traduite par le système suivant :

$$u_0 > 0,\ v_0 > 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}u_n + v_n, \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{9}u_n + \dfrac{2}{3}v_n. \end{array} \right. \qquad (1)$$

Tournez la page S.V.P.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que le polynôme $X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3}$ est un polynôme annulateur de A.

   (b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

   (c) Calculer $A\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. En déduire les valeurs propres de A.

2. On définit $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer PQ.

   (b) En déduire que P est inversible et donner une expression matricielle de P^{-1}.

   (c) Calculer AP et PD. En déduire que A est diagonalisable.

   (d) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (e) Déduire de la question (2d) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$.

3. On souhaite étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions du système (1). Pour cela, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le système (1), établir un lien entre X_{n+1}, X_n et la matrice A définie à la question 1.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question (2e), déterminer une expression de u_n en fonction de n, u_0 et v_0, puis une expression de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

   (d) Que peut-on dire de l'évolution de chaque population au bout d'un temps très grand ? Y a-t-il extinction/survie/explosion de la population ?

4. Un zoo dispose d'une base de données composée de deux tables pour suivre l'évolution des différentes espèces d'animaux placés dans des enclos. Chaque espèce est séparée en deux catégories : les enfants et les adultes. Dans un enclos on trouve une seule catégorie d'une espèce d'animal. La base de données a le schéma suivant :

   - `ANIMAUX(Enclos, Espèce, Categorie, Effectif, Quantité)` où
     - `Enclos` : numéro de l'enclos (type entier) ;
     - `Espèce` : espèce de l'animal (type chaîne) ;
     - `Categorie` : adulte ou enfant (type chaîne) ;
     - `Effectif` : nombre d'animaux (type entier) ;
     - `Quantité` : quantité de nourriture à donner en kilogramme (type entier) ;
   - `ALIMENTATION(Espèce, Type, Tarif)` où
     - `Espèce` : espèce de l'animal (clé étrangère vers la table `ANIMAUX`)(type chaîne) ;
     - `Type` : type d'alimentation (type chaîne) ;
     - `Tarif` : prix au kilogramme (type entier).

   (a) Quelle clé primaire peut être choisie pour la table `ANIMAUX` ? Justifier votre réponse.

   (b) Écrire une requête SQL qui renvoie la liste des types d'alimentation à utiliser dans le zoo.

   (c) Écrire une requête SQL donnant la liste des espèces d'animaux dont le nombre d'adultes est supérieur ou égal à 6.

   (d) Écrire une requête SQL donnant la liste de l'espèce et de l'effectif des animaux dont le prix au kilogramme d'alimentation est inférieur strictement à 15.

Partie II) Croissance à taux fixe et croissance logistique

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans sa globalité.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note w_n la taille de la population à l'instant n.
On suppose que la taille w_0 de la population à l'instant initial est strictement positive.

5. Dans cette question uniquement, on suppose que la population possède une croissance à taux fixe, c'est-à-dire qu'elle varie d'un instant à l'autre d'une proportion fixe.
Mathématiquement, on modélise une telle évolution par la donnée de $w_0 > 0$ et l'existence d' **un réel** $r \in [-1, +\infty[$, tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - w_n = r w_n.$$
   (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de n, r et w_0.
   (b) Pourquoi a-t-on choisi $r \in [-1, +\infty[$ dans cette modélisation ?
   (c) En distinguant les cas $r \in [-1, 0[$, $r = 0$ et $r > 0$, déterminer, si elle existe, la limite de w_n lorsque n tend vers $+\infty$. Que signifie chacune de ces limites pour l'évolution de la population ? Le modèle proposé est-il toujours réaliste ?

6. Dans cette question uniquement, on suppose que la population possède une croissance logistique, prenant en compte l'influence du milieu dans lequel elle vit.
Mathématiquement, on modélise une telle évolution par la donnée de $w_0 > 0$ et l'existence de **deux réels** $\alpha \in]0, 1[$ **et** $\beta > 0$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - w_n = \alpha w_n \left(1 - \frac{1}{\beta} w_n\right).$$
On définit les fonctions f et g par :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha x \left(1 - \dfrac{1}{\beta} x\right) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + f(x), \end{array}$$
de sorte que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = w_n + f(w_n) = g(w_n).$$
   (a) i. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
      ii. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$. On fera apparaître les réels obtenus à la question précédente.
   (b) i. Résoudre les équations $g(x) = 0$, $g(x) = x$ et $g(x) = \beta$ sur $\mathbb{R}$.
      ii. Montrer que :
$$\beta < \frac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}.$$
      iii. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$ en précisant sa limite en $+\infty$. On fera apparaître les réels obtenus à la question 6(b)i.
   (c) <u>Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in]0, \beta]$:</u>
<u>On suppose dans cette question uniquement que $w_0 \in]0, \beta]$.</u>
      i. En utilisant le tableau de variations de la fonction g obtenu à la question 6(b)iii, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in [0, \beta]$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
      ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $f(w_n)$ à l'aide du tableau de variations de la fonction f obtenu à la question 6(a)ii. En déduire la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      iii. Justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée ℓ.
      iv. Montrer que $\ell \geqslant w_0$.
      v. À l'aide de la question 6(b)i, déterminer la valeur de ℓ en fonction de β. Que signifie ce résultat pour la population étudiée ?
   (d) <u>Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in \left[\beta, \dfrac{\beta}{\alpha}\right]$:</u>
<u>On suppose dans cette question uniquement que $w_0 \in \left[\beta, \dfrac{\beta}{\alpha}\right]$.</u>
      i. Montrer que $g\left(\dfrac{(\alpha+1)\beta}{2\alpha}\right) < \dfrac{\beta}{\alpha}$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \left[\beta, \dfrac{\beta}{\alpha}\right]$.
      ii. Étudier la monotonie de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      iii. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. Que signifie ce résultat pour la population étudiée ?

(e) Étude de la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $w_0 \in \left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[$:

On suppose dans cette question uniquement que $w_0 \in \left[\frac{\beta}{\alpha}, \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}\right[$.

i. En utilisant la question (6(b)iii), justifier que $w_1 \in]0, \beta]$.

ii. À l'aide de la question (6c), justifier que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(f) Est-il judicieux de choisir $w_0 \geqslant \frac{(\alpha+1)\beta}{\alpha}$?

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un pion se déplace sur un axe gradué de 0 à n. À l'instant initial, il se trouve sur la position 0. Un déplacement de ce pion sur l'axe se fait de la manière suivante : on tire une bille dans une urne contenant n billes indiscernables au toucher numérotées de 1 à n et :

- si le numéro de la bille est strictement supérieur à la position du pion, alors le pion avance d'une unité,
- si le numéro de la bille est inférieur ou égal à la position du pion, alors le pion recule d'une unité.

On remet ensuite la bille dans l'urne.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire X_k donnant la position du pion sur l'axe après le k-ième déplacement et on note $\mathbb{E}(X_k)$ l'espérance de la variable aléatoire X_k, si elle existe.

Exemple : dans le cas $n = 4$, l'urne contient 4 billes numérotées de 1 à 4. Le pion étant en 0 à l'instant initial, on obtient $X_0 = 0$.

- Puis, si on tire la bille numérotée 2, puisque $2 > 0$, le pion avance d'une unité et $X_1 = 1$.
- Puis, si on tire la bille numérotée 3, puisque $3 > 1$, le pion avance d'une unité et $X_2 = 2$.
- Puis, si on tire la bille numérotée 1, puisque $1 \leqslant 2$, le pion recule d'une unité et $X_3 = 1$.
- Puis, si on tire la bille numérotée 1, puisque $1 \leqslant 1$, le pion recule d'une unité et $X_4 = 0$.

1. (a) Compléter la fonction Python suivante, qui prend en entrée deux entiers naturels n et k et renvoie une liste contenant la position initiale du pion ainsi que ses positions successives sur l'axe gradué de 0 à n après k déplacements. **On recopira les lignes complétées sur sa copie**

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def deplacement_pion(n,k):
        position = np.zeros(k+1)
        for j in range(0,k):
                bille = rd.randint(1,n+1)
                if position[j] < bille:
                        position[j+1] =  ....
                else:
                        position[j+1] =  ....
        return(....)
```

(b) Dans cette question uniquement, on suppose que l'urne contient 20 billes numérotées de 1 à 20 et on effectue 10 déplacements du pion. Écrire une ou plusieurs instructions Python affichant uniquement la position du pion à la fin de l'expérience. On pourra utiliser la fonction `deplacement_pion` définie à la question précédente.

(c) On définit la fonction `Test` par :

```
def Test(n,k,N):
        s = 0
        for j in range(N):
                position = deplacement_pion(n,k)
                s = s + position[k]
        return(s/N)
```

L'instruction `Test(10,100,1000)` renvoie $5,054$. Comment interpréter cette valeur ?

2. Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$.

3. Déterminer la loi de X_2 en fonction de n, puis calculer son espérance $\mathbb{E}(X_2)$.

Dans la suite, on suppose que k est un entier naturel supérieur ou égal à n.

4. Justifer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_k est inclus dans $[\![0;n]\!]$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(X_{k+1}=0)=\dfrac{1}{n}\mathbb{P}(X_k=1)$ et que $\mathbb{P}(X_{k+1}=n)=\dfrac{1}{n}\mathbb{P}(X_k=n-1)$.
6. Soit $\ell\in[\![1,n-1]\!]$.
   (a) Déterminer, en fonction de ℓ et n, la probabilité que le pion avance d'une unité lorsqu'il se situe en $\ell-1$.
   (b) Déterminer, en fonction de ℓ et n, la probabilité que le pion recule d'une unité lorsqu'il se situe en $\ell+1$.
   (c) En déduire que :
$$\mathbb{P}(X_{k+1}=\ell)=\frac{n-\ell+1}{n}\mathbb{P}(X_k=\ell-1)+\frac{\ell+1}{n}\mathbb{P}(X_k=\ell+1).$$
7. En utilisant la question précédente, montrer que :
$$\mathbb{E}(X_{k+1})=1+\left(1-\frac{2}{n}\right)\mathbb{E}(X_k).$$
8. On souhaite déterminer une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de n,k et $\mathbb{E}(X_n)$.
   (a) Quelle suite usuelle reconnaît-on pour $(\mathbb{E}(X_m))_{m\geqslant n}$?
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x=1+\left(1-\dfrac{2}{n}\right)x$.
   (c) On pose $x_k=\mathbb{E}(X_k)-x$. Établir une relation entre x_{k+1} et x_k. En déduire une expression de x_k en fonction de k,n et x_n.
   (d) Déterminer une expression de $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de k,x,n et $\mathbb{E}(X_n)$.
9. Calculer la limite de $\mathbb{E}(X_k)$ lorsque k tend vers $+\infty$ et donner une interprétation de la valeur obtenue.

Exercice 3

Dans cet exercice une fonction f est dite dérivable sur un segment $[a,b]$ (avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2, a<b$) si :

- la fonction f est dérivable sur $]a,b[$,
- la fonction f' admet une limite finie, notée $f'(a)$, quand t tend vers a avec $t>a$,
- la fonction f' admet une limite finie, notée $f'(b)$, quand t tend vers b avec $t<b$.

On fixe une fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ de sorte qu'il existe des fonctions $f_1,f_2,\dots,f_n,\dots$ définies par récurrence de la manière suivante :

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad f_{n+1}(t)=\begin{cases} t{f_n}'(t) & \text{si } t\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\tag{2}$$

Le but de cet exercice est de montrer, à partir de deux fonctions f_0 particulières, qu'il existe une constante c_n telle que la fonction c_nf_n puisse être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera X_n.

Partie I) Premier cas particulier : f_0 est une fonction puissance sur $[0,1]$

Dans cette partie, on fixe un réel α **supérieur ou égal à 1** et on définit la fonction f_0 par :

$$f_0(t)=\begin{cases}(\alpha+1)t^\alpha & \text{si } t\in[0,1]\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f_0 peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire notée X_0.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la fonction f_0 est dérivable sur $[0,1]$ à l'aide de la définition donnée en début d'énoncé.
   (b) Montrer que $f_n=\alpha^nf_0$ sur $\mathbb{R}$, où f_n est définie par la relation (2).
   (c) En déduire un réel positif c_n tel que la fonction c_nf_n puisse être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X_n.
   (d) Justifier que la variable aléatoire X_n suit la même loi que la variable aléatoire X_0.

Dans la suite, on note X_α une variable aléatoire suivant la même loi que X_0 et F_{X_α} sa fonction de répartition.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $F_{X_\alpha}(x)$ en distinguant les cas $x \leqslant 0$, $x \in]0,1]$ et $x > 1$.
4. Déterminer, si elle existe, la variance de X_α notée $\mathbb{V}(X_\alpha)$.

Partie II) Second cas particulier : f_0 est une fonction exponentielle sur $[0,1]$

Dans cette partie, on considère la fonction f_0 définie par :

$$f_0(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admet les trois résultats suivants :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par la relation (2) existe, est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$ et la fonction f_n' est continue sur $[0,1]$.
- Il existe des fonctions polynomiales $P_0, P_1, ..., P_n, ...$ définies par la relation de récurrence :

$$\begin{array}{rrcl} & P_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, & P_{n+1}(x) & = & x(P_n'(x) + P_n(x)). \end{array}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est positive sur $[0,1]$ et $P_n'(1) \geqslant 0$.

5. Déterminer un réel c_0 tel que la fonction $c_0 f_0$ puisse être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire notée X_0.
6. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X_0 notée $\mathbb{E}(X_0)$.
7. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $f_n(1)$ et $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
8. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = P_n(t)e^t$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $f_{n+1}(1) = f_n(1) + eP_n'(1) \geqslant f_n(1)$.
10. À l'aide des questions 7 et 9, montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t < f_n(1)$.
11. En déduire un réel positif c_n tel que la fonction $c_n f_n$ puisse être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X_n.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 25 1179 – D'après documents fournis