

Exercice I

1. Calcul de A^2 et A^3 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^3}$$

donc $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = O$

pour $n \geq 3$, $(n-3) \geq 0$ donc $A^n = A^{n-3} \times A^3 = A^{n-3} \times O = O$ pour $n > 2$, $A^n = O$.

2.

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= \left[I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \right] \left[I + yA + \frac{y^2}{2}A^2 \right] \\ &= I^2 + yIA + \frac{y^2}{2}IA^2 + xAI + xyA^2 + x\frac{y^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}IA^2 + \frac{x^2}{2}yA^3 + \frac{x^2}{2}\frac{y^2}{2}A^4 \\ &= I + (x+y)A + \left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \right) A^2 \quad (\text{les autres termes s'en vont puisque } A^3 = A^4 = O) \\ &= I + (x+y)A + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}A^2 = I + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2 \end{aligned}$$

on a bien : $M(x)M(y) = M(x+y)$

3. On montre par récurrence que $(M(x))^n = M(nx)$:

vrai au rang 0;
si vrai au rang n , alors

$$[M(x)]^{n+1} = [M(x)]^n M(x) = M(nx)M(x) = M(nx+x) = M((n+1)x)$$

donc ptté héréditaire, donc on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, (M(x))^n = M(nx)$

$$M(0) = I + 0A + 0A^2 = IM(0) = I$$

4. $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $(M(x))^n = M(nx) = \begin{pmatrix} 1 & nx & (nx)^2/2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & nx & n^2x^2/2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $M(x)$ est triangulaire et aucun élément de la diagonale n'est nul, donc $M(x)$ est inversible.

On a vu que $M(x)M(y) = M(x+y)$ et que $M(0) = I$; pour $y = -x$, on obtient : $M(x)M(-x) = M(x-x) = M(0) = I$; donc $M(x)$ est inversible et $[M(x)]^{-1} = M(-x)$

7. Et donc : $[M(x)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & (-x)^2/2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2/2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. B est la matrice $M(4)$ donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 4n & 8n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On retrouve bien $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice II

1. La fonction de répartition de Y est la fonction F définie par : $F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$.
 (si Y suit la loi uniforme sur $[a; b]$, $F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$)

2. (a) La dernière personne arrive au plus tard à l'instant t quand chacune des trois personnes est arrivée au plus tard à l'instant t , donc

$$(X \leq t) = [(Y_1 \leq t) \cap (Y_2 \leq t) \cap (Y_3 \leq t)].$$

- (b) Or les 3 variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes, donc

$$p(X \leq t) = p(Y_1 \leq t) \times p(Y_2 \leq t) \times p(Y_3 \leq t);$$

donc : G est définie par $G(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$.

- (c) Une densité de X est égale à G' pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, et prend une valeur arbitraire en ces deux nombres, donc une densité g de X est définie par : $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$.

Comme g est nulle en dehors de $[0; 1]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x \times g(x) dx$ est convergente, $E(X)$ existe, et :

$$E(X) = \int_0^1 x \times 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4} [x^4]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

3. E_1 est l'événement "la dernière personne arrive avant 17h20", soit $E_1 = (X \leq 1/3)$.
 E_2 est l'événement "la dernière personne arrive entre 17h20 et 17h40", soit $E_2 = (1/3 \leq X \leq 2/3)$.
 E_3 est l'événement "la dernière personne arrive entre 17h40 et 18h", soit $E_3 = (2/3 \leq X \leq 1)$.

Donc

$$p(E_1) = G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}, p(E_2) = G(2/3) - G(1/3) = \frac{7}{27},$$

et

$$p(E_3) = G(1) - G(2/3) = \frac{19}{27}.$$

4. (a) $(A \cap E_1) = [(Y_1 \leq 1/3) \cap (Y_2 \leq 1/3) \cap (Y_3 \leq 1/3)]$. (soit $(A \cap E_1) = E_1$)
 $(A \cap E_2) = [(1/3 \leq Y_1 \leq 2/3) \cap (1/3 \leq Y_2 \leq 2/3) \cap (1/3 \leq Y_3 \leq 2/3)]$ $(A \cap E_3) = [(2/3 \leq Y_1 \leq 1) \cap (2/3 \leq Y_2 \leq 1) \cap (2/3 \leq Y_3 \leq 1)]$.

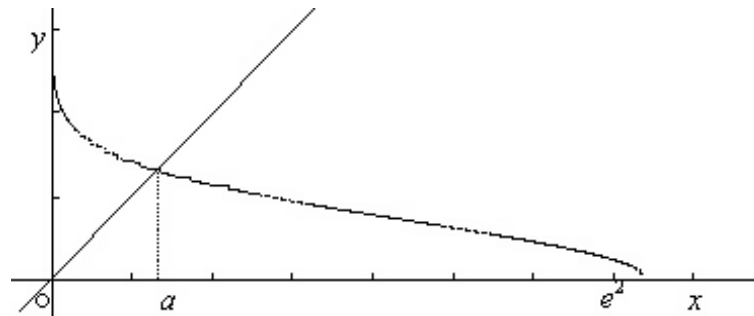
- (b) Comme $A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup (A \cap E_3)$, et que les $(A \cap E_j)$ sont incompatibles,

$$p(A) = p(A \cap E_1) + p(A \cap E_2) + p(A \cap E_3).$$

$$\left. \begin{array}{l} p(A \cap E_1) = p(X \leq 1/3) = G(1/3) = 1/27 \\ p(A \cap E_2) = [F(2/3) - F(1/3)]^3 = (1/3)^3 = 1/27 \\ p(A \cap E_3) = [F(1) - F(2/3)]^3 = (1/3)^3 = 1/27 \end{array} \right\} \text{ donc } p(A) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Exercice 3

1. (a) $\sqrt{2 - \ln(x)}$ existe quand $\begin{cases} \ln(x) \text{ existe} \\ 2 - \ln(x) \geq 0 \end{cases}$, c'est-à-dire quand $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq 2 \end{cases}$, soit quand $\begin{cases} x > 0 \\ x \leq e^2 \end{cases}$, donc on a bien : $D_f =]0; e^2]$.
- (b) Quand $x \rightarrow 0$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$, donc $2 - \ln(x) \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
 Quand $x \rightarrow e^2$, $\ln(x) \rightarrow 2$, donc $2 - \ln(x) \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$.
2. $f'(x) = \frac{-1/x}{2\sqrt{2 - \ln(x)}}$, qui est négatif sur $]0; e^2]$, donc f est décroissante sur $]0; e^2]$.



x	0		e^2
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	0

3. Quand $1 \leq x \leq e$, comme \ln est croissante, $0 \leq \ln(x) \leq 1$, donc $-1 \leq -\ln(x) \leq 0$, donc $1 \leq 2 - \ln(x) \leq 2$, or $2 < e$, donc $1 \leq \sqrt{2 - \ln(x)} \leq \sqrt{2}$; or $\sqrt{2} < e$, donc $1 \leq f(x) \leq e$; donc : l'image par f de $[1; e]$ est contenue dans $[1; e]$.
4. $f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \ln(x) = x^2 \\ x \in]0; e^2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \ln(x) - 2 = 0 \\ x \in]0; e^2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ x \in]0; e^2] \end{cases}$.
 Etudions g : $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$, qui est positif quand $1 \leq x \leq e$, donc g est strictement croissante ; or $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $g(e^2) = e^4$ qui est strictement positif, donc, comme g est continue et strictement croissante de $]0; e^2]$ vers $]-\infty; e^4]$ qui contient 0, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique a dans $]0; e^2]$. De plus $g(1) = 1 - 2 = -1 < 0$ et $g(e) = e^2 - 1 > 0$, donc $g(1) < g(a) < g(e)$, et donc, comme g est croissante, $a \in [1; e]$.
 Et donc l'équation $f(x) = x$ a une solution unique a dans $[1; e]$.
5. a est l'abscisse du point d'intersection de C et de la droite d'équation $y = x$.

6. (a) $f'(x) = \frac{-1/x}{2\sqrt{2 - \ln(x)}}$, donc $|f'(x)| = \frac{1}{2x \times f(x)}$
 Dans $[1; e]$, d'après 3), $1 \leq f(x) \leq e$, donc $2 \leq 2x \times f(x) \leq 2e^2$, donc $\frac{1}{2e^2} \leq \frac{1/x}{2f(x)} \leq \frac{1}{2}$, soit : Dans $[1; e]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 De plus, pour tout n entier naturel, montrons par récurrence que $u_n \in [1; e]$:
 $u_0 = 1$, donc $u_0 \in [1; e]$;
 si pour un n quelconque entier positif, $u_n \in [1; e]$, alors, d'après 3), $f(u_n) \in [1; e]$, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [1; e]$. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis aux nombres u_n et a qui sont dans $[1; e]$:
 Pour tout n de \mathbb{N} , $|f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$; et comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(a) = a$, on obtient bien : Pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$.

(b) Comme $|u_0 - a| \leq e - 1$, on montre par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1)$;

On aura donc $|u_n - a| \leq 10^{-2}$ dès que $\left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1) \leq 10^{-2}$, soit dès que $\left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1) \leq 10^{-2}$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (e - 1) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10^{-2}}{(e - 1)} \Leftrightarrow n \ln(1/2) \leq \ln\left(\frac{10^{-2}}{(e - 1)}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{-2 \ln 10 - \ln(e - 1)}{-\ln 2}$$

donc pour $n \geq \frac{2 \ln 10 + \ln(e-1)}{\ln 2}$, $|u_n - a| \leq 10^{-2}$.

On peut aussi dire, puisque $e - 1 \simeq 1,7 < 2$, que $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{50},$$

et ceci est vrai dès que $n \geq 6$ ($2^6 = 64$)

(c) Quand $n \rightarrow +\infty$, comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, et donc, comme $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - a| = 0$, donc la limite de la suite (u_n) , quand $n \rightarrow +\infty$, est a .