

### Exercice 1

1.  $f(x) = e^x - x$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  (car  $x \rightarrow -\infty$  ;  $e^x \rightarrow 0$ ) et  $f(x) = x \left( \frac{e^x}{x} - 1 \right)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (car  $\frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty$  : th de cc)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$  donc  $D : y = -x$  asymptote à C en  $-\infty$

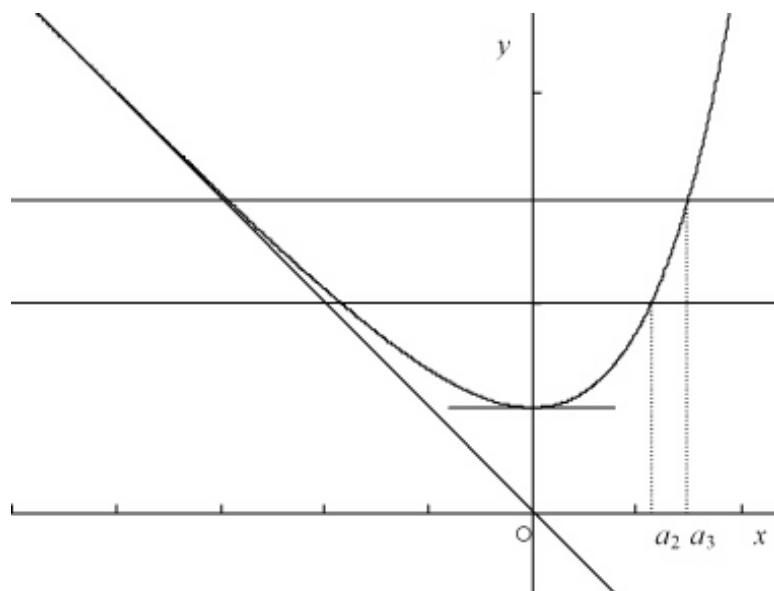
2.  $f'(x) = e^x - 1$  ;  $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$  ;

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 1 \nearrow$	$+\infty$

3. Pour  $n \geq 2$ ,  $f$  est  $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{strictement } \searrow \end{cases}$  de  $]-\infty ; 0]$  vers  $f(]-\infty ; 0]) = [1 ; +\infty[$  qui contient  $n$ , donc l'équation  $f(x) = n$  a une solution unique dans  $]-\infty ; 0]$  ; de même :

$f$  est  $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{strictement } \nearrow \end{cases}$  de  $[0 ; +\infty[$  vers  $f([0 ; +\infty[) = [1 ; +\infty[$  qui contient  $n$ , donc l'équation  $f(x) = n$  a une solution unique dans  $[0 ; +\infty[$  ; en conclusion, pour  $n \geq 2$ , l'équation  $f(x) = n$  a deux solutions de signe contraire.

4.  $a_n$  est la solution positive de  $f(x) = n$ , donc  $a_n$  est l'abscisse de point d'intersection de C et de la droite  $D_n$  d'équation  $y = n$



5.  $f(a_n) = n$ , donc  $f(a_{n+1}) = n + 1$ , donc  $f(a_n) < f(a_{n+1})$ , et comme les  $a_n$  sont dans  $[0 ; +\infty[$  et que  $f$  est croissante dans  $[0 ; +\infty[$ , on obtient :  $a_n < a_{n+1}$ , pour tout  $n \geq 2$  ; donc la suite est croissante.

6. On a  $e^{a_n} - a_n = n$ , donc  $e^{a_n} = a_n + n$ , donc, comme  $a_n > 0$ ,  $e^{a_n} \geq n$ , donc  $a_n \geq \ln(n)$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ , donc (th de comparaison),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

### Exercice 2

1.  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = -A + 2I_3$

2. Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3)$

3. - Pour  $n = 0$ ,  $\begin{cases} 0A + 1I_3 = I_3 \\ A^0 = I_3 \end{cases}$ , donc la relation est vraie au rang 0 ;

- Soit  $n$  un entier naturel quelconque ; on suppose que  $A^n = u_n A + v_n I_3$  alors

$$A^{n+1} = (u_n A + v_n I_3)A = u_n A^2 + v_n A = u_n(-A + 2I_3) + v_n A = (-u_n + v_n)A + 2u_n I_3$$

donc  $A^{n+1} = (u_{n+1} A + v_{n+1} I_3)$ . La relation est héréditaire ; donc : pour tout  $n$  entier naturel,  $A^n = u_n A + v_n I_3$

4.

(a)  $x_n = u_n + v_n$ , donc

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = -u_n + v_n + 2u_n = u_n + v_n = x_n,$$

donc la suite  $(x_n)$  est constante et pour tout  $n$  entier naturel,  $x_n = x_0 = u_0 + v_0 = 1$ ;

(b)  $y_n = 2u_n - v_n$ , donc

$$y_{n+1} = 2u_{n+1} - v_{n+1} = -2u_n + 2v_n - 2u_n = -4u_n + 2v_n = -2y_n.$$

Donc la suite  $(y_n)$  est géométrique de raison 2 et de 1<sup>er</sup> terme  $y_0 = -1$ , donc  $y_n = -(-2)^n$ .

(c) On a  $\begin{cases} x_n = u_n + v_n \\ y_n = 2u_n - v_n \end{cases}$ , d'où :  $\begin{cases} u_n = \frac{1}{3}(x_n + y_n) \\ v_n = \frac{1}{3}(2x_n - y_n) \end{cases}$ , soit :  $\begin{cases} u_n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n) \\ v_n = \frac{1}{3}(2 + (-2)^n) \end{cases}$  ;

5. Et donc :  $A^n = \frac{1}{3}(1 - (-2)^n)A + \frac{1}{3}(2 + (-2)^n)I_3$ , soit

$$A^n = \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \right] .A + \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n \right] .I_3$$

pour  $n = -1$ ,

$$\left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^{-1} \right] .A + \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{-1} \right] .I_3 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I_3 = A^{-1}$$

d'après la question 2). Donc : la formule est encore valable pour  $n = -1$

### Exercice 3

1. Pour chaque ampoule, on considère l'épreuve à deux issues :

$$\begin{cases} D : \text{ elle est défectueuse, de proba } p = 1\% \\ \bar{D} : \text{ elle n'est pas défectueuse, de proba } q = 1 - p = 99\% \end{cases}$$

Il y a indépendance d'une ampoule à l'autre

$X$  compte le nombre de réalisations de  $D$  sur les  $n$  ampoules produites par la chaîne A

$Y$  compte le nombre de réalisations de  $D$  sur les  $m$  ampoules produites par la chaîne B.

Donc  $X \sim B(n; 1\%)$  et  $Y \sim B(m; 1\%)$ .

2. (a) Pour les mêmes raisons,  $S \sim B(n + m; 1\%)$ .

(b)  $S = X + Y$

3. (a) Avec les valeurs de  $n$  et  $m$ ,  $S \sim B(10000; 1\%)$ .

Comme  $10\ 000 > 30$ ,  $10000 \times 1\% = 100 > 15$ , et  $10000 \times 1\% \times 99\% = 99 > 5$ , on peut approcher la loi de  $S$  par la loi normale de paramètres 100 et  $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$

(b) On veut  $p(95 \leq S \leq 105)$ ; avec l'approximation par  $S' \sim \sum N(100; 3\sqrt{11})$ , et en ne tenant pas compte de la correction de continuité,

$$p(95 \leq S \leq 105) \simeq p(95 \leq S' \leq 105) = p\left(\frac{-5}{\sqrt{11}} \leq S'^* \leq \frac{-5}{\sqrt{11}}\right),$$

avec  $S'^*$  suivant la loi normale centrée réduite. Donc

$$p(95 \leq S \leq 105) \simeq F\left(\frac{5}{3\sqrt{11}}\right) - F\left(\frac{-5}{3\sqrt{11}}\right) = 2F\left(\frac{5}{3\sqrt{11}}\right) - 1 = 0,384p(95 \leq S \leq 105) \simeq 0,384.$$

4. (a) Soit  $T_1$  et  $T_2$  les variables aléatoires respectivement égales à la durée de vie en heures de chacune des 2 ampoules.  $T_1 \sim E(0,001)$  ; de même pour  $T_2$

Les 2 ampoules fonctionnent au moins 500 heures est l'événement  $A = (T_1 \geq 500) \cap (T_2 \geq 500)$ . Comme  $T_1$  et  $T_2$  sont indépendantes, et suivent la même loi,

$$p(A) = p[(T_1 \geq 500) \cap (T_2 \geq 500)] = [p(T_1 \geq 500)]^2 = [1 - p(T_1 \leq 500)]^2$$

Or on sait que une densité  $f$  de  $T$  suivant  $E(0,001)$  est donnée par  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,001e^{-0,001x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ , et sa fonction de répartition  $F$  par  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-0,001x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ ; (et  $F(x) = p(T \leq x)$  bien sûr) donc

$$1 - p(T_1 \leq 500) = 1 - F(500) = e^{-0,001 \times 500} = e^{-1/2},$$

et donc :

$$p[(T_1 \geq 500) \cap (T_2 \geq 500)] = e^{-1} \simeq 0,368.$$

(b) Une seule ampoule fonctionne encore après 1000 heures est l'événement :

$$B = ((T_1 \geq 1000) \cap (T_2 \leq 1000)) \cup ((T_1 \leq 1000) \cap (T_2 \geq 1000)),$$

$\nwarrow$  événements incompatibles, de meme probabilité  $\nearrow$

sa probabilité est donc :

$$\begin{aligned} p(B) &= p((T_1 \geq 1000) \cap (T_2 \leq 1000)) \cup ((T_1 \leq 1000) \cap (T_2 \geq 1000)) = 2F(1000) \times [1 - F(1000)]; \\ F(1000) &= 1 - e^{-1}, \end{aligned}$$

donc

$$p(B) = 2(1 - e^{-1})e^{-1} = 2(e^{-1} - e^{-2}) \simeq 0,466.$$