

Corrigé ECRICOME 2002 T

Exercice 1

Etude la fonction f

1. $P(x)$ a pour discriminant $\Delta = -3$ qui est négatif, donc $P(x)$ garde un signe constant, celui du coefficient de x^2 , donc pour tout x réel, $P(x) > 0$. Donc, pour tout x réel, $\sqrt{P(x)}$ existe, donc f est définie sur \square .

2. Quand $x \rightarrow \pm\infty$, $P(x)$ (polynôme) a même limite que x^2 donc $P(x) \rightarrow +\infty$, donc $\sqrt{P(x)} \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty;$$

$$(f = \sqrt{u} \text{ donc } f' = u' / 2\sqrt{u}) \quad f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}.$$

$f'(x)$ a le signe de $2x-1$; d'où le tableau de variation de f :

$$(\text{avec } f'(1/2) = \sqrt{\frac{3}{4}})$$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ □	$\sqrt{\frac{3}{4}}$ □	$+\infty$

3. a) $f(x) - x = \sqrt{x^2 - x + 1} - x = \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}.$

pour $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$, donc $\sqrt{x^2 - x + 1} + x = \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + x = x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)$, et donc

$$f(x) - x = \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}.$$

b) Quand $x \rightarrow +\infty$, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur tend vers 2, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1/2$$

Et donc $\Delta: y = 2x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

4. $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^2$ et $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$ (puisque $1 > 0$). $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$.

5. a) $f'(x) = \frac{2x-1}{2f(x)}.$

b) Sur $[\frac{1}{2}; 1]$, f est croissante, donc $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], f(\frac{1}{2}) \leq f(x)$, soit : $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \sqrt{\frac{3}{4}} \leq f(x)$.

c) De cette dernière inégalité, on déduit, sur $[\frac{1}{2}; 1]$, $0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$, ou encore : $\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, soit :

$$0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{2}{\sqrt{3}};$$

De plus, sur $[\frac{1}{2}; 1], 0 \leq 2x - 1 \leq 1$. Et donc, sur $[\frac{1}{2}; 1], 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Convergence de la suite

1. * $u_0 = \frac{1}{2}$, donc $u_0 \in [\frac{1}{2}; 1]$

* si pour un entier n quelconque, $u_n \in [\frac{1}{2}; 1]$, alors, comme f est croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$,

$f(u_n) \in [f(\frac{1}{2}); f(1)]$, soit $u_{n+1} \in [\sqrt{\frac{3}{4}}; 1]$, et comme $\sqrt{\frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2}$, $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}; 1]$.

La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [\frac{1}{2}; 1]}$.

2. Récurrence simple.

3. a) La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 1 ; elle est donc convergente vers un nombre ℓ .

$$\left. \begin{array}{l} (u_n) \text{ est cv vers } \ell \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ est continue sur } [\frac{1}{2}; 1] \\ \text{tous les } u_n \text{ sont dans } [\frac{1}{2}; 1] \end{array} \right\} \text{ donc } \ell \text{ est solution de l'équation } f(x) = x, \text{ donc (question 4)}$$

$\boxed{(u_n) \text{ CV vers } 1}$.

b) $\left. \begin{array}{l} \forall x \in [\frac{1}{2}; 1], |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{les } u_n \text{ et } 1 \text{ sont dans } [\frac{1}{2}; 1] \end{array} \right\}$, donc, pour tout n entier naturel, $|f(u_n) - f(1)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|$, et comme

$f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$, on obtient : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|}$.

c) Récurrence :

- $|u_0 - 1| \leq (\frac{1}{\sqrt{3}})^0 |u_0 - 1|$ puisque $a^0 = 1$.
- si pour un n entier naturel quelconque, $|u_n - 1| \leq (\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0 - 1|$, alors, comme $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|$,
 $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} (\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0 - 1|$, soit : $|u_{n+1} - 1| \leq (\frac{1}{\sqrt{3}})^{n+1} |u_0 - 1|$;

la propriété est héréditaire et vraie au rang 0, donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 1| \leq (\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0 - 1|}$.

d) $|u_n - 1| \leq 10^{-2}$ dès que $(\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0 - 1| \leq 10^{-2}$, soit dès que $(\frac{1}{\sqrt{3}})^n \leq 2 \cdot 10^{-2}$.

Or $(\frac{1}{\sqrt{3}})^n$ prend les valeurs $1/3, 1/9, 1/27, 1/81$ pour $n = 2, 4, 6, 8$. Donc $\boxed{\text{pour } n = 8, (\frac{1}{\sqrt{3}})^n \leq 2 \cdot 10^{-2}}$.

Exercice 2

1 Calcul des puissances de M

1. D est diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{4})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{3}{4})^n \end{pmatrix}$;

2. $\boxed{PQ = 3I}$, donc P est inversible, et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}Q}$; $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

3. $MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} = D$ ($P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$)

4. ** Pour $n = 1$, on sait (question précédente) que $P^{-1}MP = D$, donc, en multipliant les deux membres de l'égalité à droite par P^{-1} et à gauche par P , on obtient $PP^{-1}MPP^{-1} = PDP^{-1}$, soit $\boxed{M = PDP^{-1}}$; l'égalité est donc vraie au rang 0.

** Si pour un n quelconque, $n \geq 1$, on a $M^n = PD^n P^{-1}$, alors $M^{n+1} = PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{I} DP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$;

l'égalité est donc héréditaire. Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = PD^n P^{-1}}$.

$$5. \quad PD^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (3/4)^n \\ 0 & 1 & -2(3/4)^n \\ 0 & 0 & (3/4)^n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n & 0 & \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n & 1 & 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n & 0 & \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

2 Suites définies par une relation de récurrence.

$$1. \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}w_n \\ \frac{1}{2}u_n + v_n \\ \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}, \text{ soit : pour tout } n \text{ entier naturel, } \boxed{X_{n+1} = MX_n}.$$

2. a) On obtient (démonstration par récurrence simple), pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$\boxed{X_n = M^n X_0}.$$

$$b) \quad \text{On a donc : } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n & 0 & \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n & 1 & 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n & 0 & \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}, \text{ soit : } \begin{cases} u_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ v_n = 1 - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ w_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases}$$

c) Quand $n \rightarrow +\infty$, comme $-1 \leq \frac{3}{4} \leq 1$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0$, et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1}$.

Exercice 3

L'énoncé donne :

$$\text{Pour une plante : } \begin{cases} P(R_1) = \frac{3}{4} \\ P(R_{n+1} / R_n) = 1 \\ P(\overline{R_{n+1}} / \overline{R_n}) = P(R_{n+1} / \overline{R_n}) = \frac{1}{2} \end{cases};$$

d'où, comme $\{R_n, \overline{R_n}\}$ est un système complet d'événements,

$$P(R_{n+1}) = P(R_n)P(R_{n+1} / R_n) + P(\overline{R_n})P(R_{n+1} / \overline{R_n}) = p_n \cdot 1 + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{soit : } \boxed{p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}}$$

(p_n) est donc une suite arithmético-géométrique ; son point fixe α vérifie : $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$, donc $\boxed{\alpha = 1}$.

la suite $(p_n - 1)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $(p_1 - 1)$, d'où $p_n - 1 = \frac{1}{2}^{n-1}(p_1 - 1)$, et

$$\text{donc : } p_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (1 - p_1)$$

l'énoncé donne : $p_1 = \frac{3}{4}$, donc $p_n = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$.

La plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années est l'événement $(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n)$. Avec la formule des probabilités composées,

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = P(R_1)P(R_2 / R_1)P(R_3 / R_2 \cap R_1) \dots P(R_n / R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_{n-1})$$

$$\text{Soit : } P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{De même : } P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \dots \cap \overline{R}_n) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} .$$

Pour une plante, on considère $\begin{cases} R_1, \text{ de probabilité } p = \frac{3}{4}, \text{ et son contraire} \\ \overline{R}_1, \text{ de probabilité } 1 - p = \frac{1}{4} \end{cases}$;

comme chaque plante a la même probabilité de donner une fleur rose la première année, il y a indépendance de ce caractère d'une fleur à l'autre ;

X compte le nombre de réalisations de R_1 parmi les 10 000 plantes achetées

$$\text{Donc } X \hookrightarrow B(10\,000 ; 3/4) ; X(\Omega) = [0; 10000] ; \text{ et } P(x = k) = C_{10000}^k \left(\frac{3}{4} \right)^k \left(\frac{1}{4} \right)^{10000-k} ;$$

$$E(X) = np = 7500 ; V(X) = np(1 - p) = 1375 ;$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{10000 * 3}{16}} = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

les conditions d'approximation de la loi de X par la loi normale sont vérifiées ($n > 30$; $np > 15$; $np(1-p) > 5$) ; on peut donc approcher la loi de X par $N(7500 ; 25\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} P(7450 \leq X \leq 7550) &= P\left(\frac{7450 - 7500}{25\sqrt{3}} \leq \frac{X - 7500}{25\sqrt{3}} \leq \frac{7550 - 7500}{25\sqrt{3}} \right) \\ &= P\left(\frac{-50}{25\sqrt{3}} \leq \frac{X - 7500}{25\sqrt{3}} \leq \frac{50}{25\sqrt{3}} \right) = P\left(\frac{-2}{\sqrt{3}} \leq \frac{X - 7500}{25\sqrt{3}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{or } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) , \text{ donc } P(7450 \leq X \leq 7550) = 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - 1$$

$$\text{donc : } \boxed{P(7450 \leq X \leq 7550) \approx 0,74} .$$