ECRICOME 03 corrigé

Exercice 1

1.1 Etude de la fonction *f*.

1. $f(x)=x+2-2\ln(e^x+1)$

pour tout x réel, $e^x>0$, donc $e^x+1>1$, donc $e^x+1>0$, donc $\ln(e^x+1)$ existe, donc $\boxed{D_f=\mathbb{R}}$.

2. Pour tout x réel, $\ln(e^{-x}+1)=\ln\dfrac{1+e^x}{e^x}=\ln(e^x+1)-\ln(e^x)=\ln(e^x+1)-x$, donc

$-x+2-2\ln(e^{-x}+1)=-x+2-2\ln(1+e^x)+2x=x+2-2\ln(1+e^x)=f(x)$:

pour tout x réel, on a : $f(x)=-x+2-2\ln(e^{-x}+1)$.

D_f est symétrique par rapport à 0, et pour tout x réel,

$f(-x)=-x+2-2\ln(e^{-x}+1)=f(x)$ d'après l'égalité montrée précédemment, donc :

$\boxed{f \text{ est paire}}$.

3. Quand $x\to+\infty$, $\left.\begin{array}{l} e^{-x}\to 0,\ \text{donc}\ e^x+1\to 1,\ \text{donc}\ \ln(e^{-x}+1)\to 0 \\ -x+2\to+\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$.

4. $f(x)-(-x+2)=-2\ln(e^{-x}+1)$, donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x+2)=0}$, donc

$\boxed{D: y=-x+2 \text{ est asymptote à C en } +\infty}$.

La position relative de C et de D est donnée par le signe de $f(x)-(-x+2)=-2\ln(e^{-x}+1)$.

Or (cf 1)), pour tout x réel, $e^{-x}+1>1$, donc $\ln(e^{-x}+1)>0$, donc $-2\ln(e^{-x}+1)<0$, donc :

$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel, C est en dessous de D}}$.

5. $\boxed{f'(x)=1-2\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1-e^x}{e^x+1}}$ (en utilisant $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=e^x+1$).

Comme $e^x+1>0$ pour tout x, $f'(x)$ est du signe de $1-e^x$.

$1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$; d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2-2\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

Remarques :

Comme f paire, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$f(0)=2-2\ln(e^0+1)=2-2\ln 2$, puisque $e^0=1$

6. $f(x)=x \Leftrightarrow x+2-2\ln(e^x+1)=x \Leftrightarrow \ln(e^x+1)=1 \Leftrightarrow e^x+1=e \Leftrightarrow e^x=e-1 \underset{e-1>0}{\Leftrightarrow} x=\ln(e-1)$, donc

$\boxed{\text{L'équation } f(x)=x \text{ a une solution unique : } \alpha=\ln(e-1)}$.

7. $f'(x)=\dfrac{1-e^x}{e^x+1}$, donc $f''(x)=\dfrac{-e^x(e^x+1)-(1-e^x)e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x(-2)}{(e^x+1)^2}$, soit : $f''(x)=-2\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

8. Comme l'exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout x réel, $f''(x)<0$, donc f' est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$\forall x\in[0,1]$, $f'(1)\le f'(x)\le f'(0)$; or $f'(1)=\dfrac{1-e}{e+1}$ et $f'(0)=0$, donc $\forall x\in[0,1]$, $\dfrac{1-e}{e+1}\le f'(x)\le 0$, donc

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \left| f'(x) \right| \leq \frac{e-1}{e+1}}.$$

1.2 Convergence de la suite (u_n)

1. $u_0 = 0$, donc $u_0 \in [0,1]$. La propriété est vraie pour $n = 0$

   Soit *n* un entier quelconque de $\mathbb{N}$; on suppose que $u_n \in [0,1]$;

alors, comme f est décroissante dans [0,1], $f(u_n) \in [f(1), f(0)]$;

De plus, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(0) \approx 0,61$ et $f(1) \approx 0,37$, donc $[f(1), f(0)] \subset [0,1]$, donc : $u_{n+1} \in [0,1]$;

La propriété est héréditaire. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]}.$$

2. Utilisons la question 8 de la partie précédente : appliquons le théorème des accroissements finis à *f* sur l'intervalle [0,1] :

Comme

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in [0,1],\ \left| f'(x) \right| \leq \dfrac{e-1}{e+1} \\ \alpha \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1] \end{array}\right\},$$ on peut appliquer le théorème des accroissements finis :

$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| f(u_n) - f(\alpha) \right| \leq \dfrac{e-1}{e+1} \left| u_n - \alpha \right|$; et comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left| u_{n+1} - \alpha \right| \leq \frac{e-1}{e+1} \left| u_n - \alpha \right|}.$$

On peut alors montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left| u_n - \alpha \right| \leq \left(\dfrac{e-1}{e+1} \right)^n$:

Pour $n = 0$, comme $u_0 \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$, $\left| u_0 - \alpha \right| \leq 1$; de plus $\left(\dfrac{e-1}{e+1} \right)^0 = 1$, donc l'inégalité est vraie au rang 0.

Soit *n* un entier naturel quelconque ; on suppose que $\left| u_n - \alpha \right| \leq \left(\dfrac{e-1}{e+1} \right)^n$;

Alors $\dfrac{e-1}{e+1} \left| u_n - \alpha \right| \leq \left(\dfrac{e-1}{e+1} \right)^{n+1}$; et comme $\left| u_{n+1} - \alpha \right| \leq \dfrac{e-1}{e+1} \left| u_n - \alpha \right|$, on obtient : $\left| u_{n+1} - \alpha \right| \leq \left(\dfrac{e-1}{e+1} \right)^{n+1}$:

l'inégalité est héréditaire. Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left| u_n - \alpha \right| \leq \left(\dfrac{e-1}{e+1} \right)^n}$.

Quand $n \to +\infty$, comme $-1 < \dfrac{e-1}{e+1} < 1$, $\left(\dfrac{e-1}{e+1} \right)^n \to 0$, donc, théorème des gendarmes, $\left| u_n - \alpha \right| \to 0$,

et donc $u_n \to \alpha$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

Exercice 2

2.1 Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

1. $\boxed{A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$. Donc le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ n'est pas un système de Cramer, puisqu'il a - au moins - 2 solutions : $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, donc La matrice A n'est pas inversible .

2. $\boxed{A^2=\begin{pmatrix}1/4 & 1/8 & 1/4\\1/2 & 3/4 & 1/2\\1/4 & 1/8 & 1/4\end{pmatrix}}$ et $\boxed{A^3=\begin{pmatrix}1/8 & 3/16 & 1/8\\3/4 & 5/8 & 3/4\\1/8 & 3/16 & 1/8\end{pmatrix}}$

$$A^2+A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/8 & 1/4\\1/2 & 3/4 & 1/2\\1/4 & 1/8 & 1/4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1/4 & 0\\1 & 1/2 & 1\\0 & 1/4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4 & 3/8 & 1/4\\3/2 & 5/4 & 3/2\\1/4 & 3/8 & 1/4\end{pmatrix}=2A^3\text{, donc : }\boxed{A^3=\frac{1}{2}(A^2+A)}.$$

3. Pour $n=1$, $A^1=A=0A^2+1A$, donc $\boxed{A^1=a_1A^2+b_1A\ \text{ avec }\ a_1=0\text{ et }b_1=1}$.
   Soit n un entier quelconque, $n\geq 1$; on suppose que $A^n=a_nA^2+b_nA$

Alors $A^{n+1}=A^nA=(a_nA^2+b_nA)A=a_nA^3+b_nA^2=\frac{1}{2}a_n(A^2+A)+b_nA^2=\left(\frac{1}{2}a_n+b_n\right)A^2+\frac{1}{2}a_nA$, soit :

$A^{n+1}=a_{n+1}A^2+b_{n+1}A$, avec $\begin{cases}a_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}a_n\\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\end{cases}$; l'égalité est héréditaire. On a bien :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n=a_nA^2+b_nA,\ \text{avec } a_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}a_n\ \text{ et } b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n}.$$

4. $a_{n+1}+b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}a_n=a_n+b_n$, donc la suite (a_n+b_n) est constante, et pour tout n entier naturel non nul, $\boxed{a_n+b_n=a_1+b_1=1}$.

Comme $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$, $\boxed{b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}}$.

5. La suite (b_n) est arithmético-géométrique; son point fixe α vérifie $a=-\frac{1}{2}\alpha+1$, d'où $\alpha=\frac{1}{3}$, et donc la suite $(b_n-\frac{1}{3})$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, et de 1[er] terme $b_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, donc

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{2}{3}$, donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$, et comme $a_n=b_n-1$,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{a}_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}.$$

2.2 Etude de la loi d'une V.A. X_n

1. Comme à l'instant 0, le point lumineux est en C_0, $\boxed{P[X_0=0]=1}$, et $\boxed{P[X_0=1]=0=P[X_0=2]}$.
Puisque
- Si à l'instant $n,\ n\in \mathbb{N}$, le point lumineux est en C_0, *à* l'instant $n+1$ il est en C_1,

$P[X_1=1]=1$ et $P[X_1=0]=0=P[X_1=2]$ et donc $\boxed{U_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$ et $\boxed{U_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$.

2. L'énoncé donne :

$$\begin{cases} p[(X_{n+1}=0)/(X_n=0)]=p[(X_{n+1}=2)/(X_n=0)]=0 \text{ et } p[(X_{n+1}=1)/(X_n=0)]=1 \\ p[(X_{n+1}=0)/(X_n=1)]=p[(X_{n+1}=2)/(X_n=1)]=\dfrac{1}{4} \text{ et } p[(X_{n+1}=1)/(X_n=1)]=\dfrac{1}{2} \\ p[(X_{n+1}=0)/(X_n=2)]=p[(X_{n+1}=2)/(X_n=2)]=0 \text{ et } p[(X_{n+1}=1)/(X_n=2)]=1 \end{cases}$$

avec la formule des probabilités totales, comme $\{[X_n=0],\ [X_n=1],\ [X_n=2]\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{cases} p(X_{n+1}=0)=p(X_{n+1}=0/X_n=0)p(X_n=0)+p(X_{n+1}=0/X_n=1)p(X_n=1)+p(X_{n+1}=0/X_n=2)p(X_n=2) \\ p(X_{n+1}=1)=p(X_{n+1}=1/X_n=0)p(X_n=0)+p(X_{n+1}=1/X_n=1)p(X_n=1)+p(X_{n+1}=1/X_n=2)p(X_n=2) \\ p(X_{n+1}=2)=p(X_{n+1}=2/X_n=0)p(X_n=0)+p(X_{n+1}=2/X_n=1)p(X_n=1)+p(X_{n+1}=2/X_n=2)p(X_n=2) \end{cases}$$

soit :

$$\boxed{\begin{cases} p(X_{n+1}=0)=0\times p(X_n=0)+\dfrac{1}{4}\times p(X_n=1)+0p(X_n=2) \\ p(X_{n+1}=1)=1\times p(X_n=0)+\dfrac{1}{2}\times p(X_n=1)+1\times p(X_n=2) \\ p(X_{n+1}=2)=0\times p(X_n=0)+\dfrac{1}{4}\times p(X_n=1)+0\times p(X_n=2) \end{cases}}.$$

Soit : $\boxed{U_{n+1}=AU_n}$.

3. Par récurrence :
Comme $U_{n+1}=AU_n$, pour $n=0$, $U_1=AU_0$; l'égalité est vraie au rang 0.
Soit un entier *n* quelconque, $n\geq 1$; on suppose que $U_n=A^nU_0$;
Alors, comme $U_{n+1}=AU_n$, $U_{n+1}=AA^nU_0=A^{n+1}U_0$. L'égalité est héréditaire;

Donc $\boxed{\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \ U_n=A^nU_0}$. Et $\boxed{U_2=AU_1=A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix}}$.

On a vu au 1) que , pour *n* non nul, $A^n=a_nA^2+b_nA$

$A^n=a_nA^2+b_nA=\left[\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]A^2+\left[\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{2}{3}\right]A$, donc

$U_n=\left(a_nA^2+b_nA\right)U_0=a_n\underbrace{A^2U_0}_{U_2}+b_n\underbrace{AU_0}_{U_1}$: $\boxed{\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \ U_n=a_nU_2+b_nU_1}$.

4. On obtient donc : $\begin{pmatrix}P[X_n=0]\\P[X_n=1]\\P[X_n=2]\end{pmatrix}=\left[\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\begin{pmatrix}1/4\\1/2\\1/4\end{pmatrix}+\left[\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{2}{3}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Donc : $p[X_n=0]=p[X_n=2]=\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{2}{3}\right]\times 0$

$$\boxed{p[X_n=0]=\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times\frac{1}{4}=p[X_n=2]}$$

$p[X_n=1]=\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\frac{2}{3}\right]\times 1$ $\boxed{p[X_n=1]=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$.

5. Calculons $E(X_n)$:

$E(X_n)=0\times p[X_n=0]+1\times p[X_n=1]+2\times p[X_n=2]$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\times\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\times\frac{1}{4}=1$ $E(X_n)=1$; $\boxed{E(X_n) \text{ est indépendante de } n}$.

Exercice 3

3.1 Epreuve 1.

1. Montrons par récurrence que : $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$:

Pour $k=1$, l'égalité est vérifiée;

Si pour un entier *n* quelconque $n\geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, alors

$\sum_{k=1}^{n+1} k=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)(1+\frac{n}{2})=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$; l'égalité est héréditaire;

$$\boxed{\text{Donc on a bien : pour tout entier naturel } n\geq 1 \quad \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

Remarque : on peut montrer cette égalité directement en écrivant pour tout entier naturel $n\geq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k&=1+2+\cdots+n\\&=n+(n-1)+\cdots+1\end{aligned}$$ d'où $2\sum_{k=1}^{n} k=n(n+1)$, d'où $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Dans l'urne, il y a $1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ boules.

3. Les boules portent des numéros de 1 à *n*, donc $\boxed{X(\Omega)=[\![1;n]\!]}$.

Il y a équiprobabilité des tirages des $\frac{n(n+1)}{2}$ boules, et il y a *k* boules numérotées *k*, donc ,

$$\boxed{\forall k\in[\![1;n]\!],\quad p(X=k)=\frac{k}{\text{card}(\Omega)}=\frac{k}{n(n+1)/2}=\frac{2k}{n(n+1)}}$$

et pour $k=n$, on obtient bien : $\boxed{p(X=n)=\frac{2}{n+1}}$

4. $E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\times p(X=k)=\sum_{k=1}^{n} k\times\frac{2k}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\boxed{\frac{2n+1}{3}}$

3.2 Epreuve 2.

1. Pour un tirage, on considère les 2 issues S : la boule tirée porte le n° n, de probabilité $p=\frac{2}{n+1}$, et son contraire $\overline{S}$, de probabilité $1-p=1-\frac{2}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$.

On répète 10 fois ce tirage dans les mêmes conditions (indépendance des tirages) puisqu'il y a remise de la boule dans l'urne après chaque tirage, et Y compte le nombre de succès, donc

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10;\ \frac{2}{n+1}\right)\ ;\quad Y(\Omega)=[\![0;10]\!],\ \text{et pour tout } k \text{ de } [\![0;10]\!],\ p(Y=k)=C_{10}^{k}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{k}\times\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{10-k}.}$$

2. $\boxed{E(Y)=10\times p=\frac{20}{n+1}}$, et $\boxed{V(Y)=10\times p\times(1-p)=\frac{20}{n+1}\times\frac{n-1}{n+1}=\frac{20(n-1)}{(n+1)^2}}$.

3.3 Epreuve 3.

1. Pour un tirage, on considère les 2 issues S : la boule tirée porte le n° n, de probabilité $p=\frac{2}{n+1}$, et son contraire $\overline{S}$, de probabilité $1-p=1-\frac{2}{n+1}=\frac{n-1}{n+1}$.

On répète indéfiniment ce tirage dans les mêmes conditions (indépendances des tirages) puisqu'il y a remise de la boule dans l'urne après chaque tirage, et Z compte le rang du 1[er] succès, donc

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{n+1}\right)\quad Z(\Omega)=\mathbb{N}^*\ \text{et pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*,\ p(Z=k)=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{k-1}\times\frac{2}{n+1}.}$$

2. $\boxed{E(Z)=\frac{1}{p}=\frac{n+1}{2}}$ et $\boxed{V(Z)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n+1}{2}=\frac{n^2-1}{4}}$.

3.4 Epreuve 4.

1. $p[(T_1=2)/(T_2=2)]=\frac{p[(T_1=2)\cap(T_2=2)]}{p(T_2=2)}=\frac{p(T_1=2)\times p[(T_2=2)/(T_1=2)]}{p(T_2=2)}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}{p(T_2=2)}$.

Or, Formule des PT,

$p(T_2=2)=p(T_1=2)\times p[(T_2=2)/(T_1=2)]+p(T_1=1)\times p[(T_2=2)/(T_1=1)]=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}$, donc :

$\boxed{p[(T_1=2)/(T_2=2)]=\frac{1}{2}}$.

2. $\boxed{(T_1(\Omega)=T_2(\Omega)=\{1;2\}}$;

On a pu tirer	1 1	1 2	2 1	2 2
Avec les probas : (F des p composées)	0	$\frac{1}{3}\times 1$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

D'où le tableau de la loi conjointe :

$T_1 \setminus T_2$	1	2	Loi de T_1
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Loi de T_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

3. T_1 et T_2 suivent donc la même loi ; les lois de T_1 et T_2 sont données en marges du tableau de la loi conjointe.

4. $\boxed{T_1 \text{ et } T_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$

puisque par exemple $p[(T_1 = 2) \cap (T_2 = 2)] = \frac{1}{3} \neq p(T_1 = 2) \times p(T_2 = 2)$.

5. $\boxed{E(T_1) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} = E(T_2)}$, donc $\boxed{E(T_1 + T_2) = 2E(T_1) = \frac{10}{3}}$