EXERCICE 1

1.1. Etude d'une fonction g auxiliaire.

1.a. Le polynôme **P est factorisable par $x-1$**, car on a :

$$P(1) = 3x1^3 - 1 - 2 = 0$$

b. D'après les termes de plus haut et bas degrés de $P(x)$, on peut écrire $P(x)$ sous la forme:

$$P(x) = (x-1)(3x^2 + bx + 2) = 3x^3 + (b-3)x^2 + (2-b)x - 2$$

Par identification avec les coefficients de $P(x)$, b est solution du système :

$$\begin{cases} b-3 & = & 0 \\ 2-b & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3$$

Ainsi a-t-on :

$$\mathbf{P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)}$$

c. Le discriminant $\Delta = 9 - 4x3x2 = -15$ du polynôme $3x^2 + 3x + 2$ est strictement négatif ; donc le polynôme $3x^2 + 3x + 2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$. D'après la question **1.1.1.b.**, $P(x)$ est donc du signe de $x-1$ sur $\mathbb{R}$; on a ainsi :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{x} \in]-\infty, \mathbf{1}[& \mathbf{P(x) < 0} \\ & \mathbf{P(1) = 0} \\ \forall \mathbf{x} \in]\mathbf{1}, +\infty[& \mathbf{P(x) > 0} \end{cases}$$

2. On a, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{x}}$$

3. x étant strictement positif sur $]0, +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $P(x)$ d'après la question **1.1.2.**; d'après la question **1.1.1.c.**, **g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$**.

4. De l'étude du sens de variation de g à la question **1.1.3.**, on déduit que g admet en 1 un minimum de valeur $g(1) = 1^3 - 1 + 3 - 2\ln 1 = 3$, donc **g est strictement positive sur $]0, +\infty[$**.

1.2. Etude de la fonction f.

1. On a :

$$\lim_{\mathbf{x} \to 0^+} \mathbf{f(x)} = \lim_{x \to 0^+} \left(x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right) = -\infty$$

Car :

$$\lim_{x \to 0} (x+1) = 1, \ \lim_{x \to 0^+} (x - 1 + \ln x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to 0} x^2 = 0^+$$

On déduit de cette limite que **l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathbf{C_f}$**.

2.a. On a :

$$\lim_{\mathbf{x} \to +\infty} \mathbf{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$$

b. On a, d'après la justification de la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}-(x+1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=0$$

Donc la droite (Δ) **d'équation $y=x+1$ est asymptote à C_f au voisinage de** $+\infty$.

c. On a, pour tout réel x de $]0,+\infty[$:

$$f(x)-(x+1)=\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

x^2 étant strictement positif sur $]0,+\infty[$, $f(x)-y$ est du signe de $x-1+\ln x$; on a :

$$x\geq 1\Rightarrow(x-1\geq 0 \text{ et } \ln x\geq 0)\Rightarrow x-1+\ln x\geq 0$$

Donc **la courbe C_f est au-dessus de la droite** (Δ) **sur $[1,+\infty[$**.

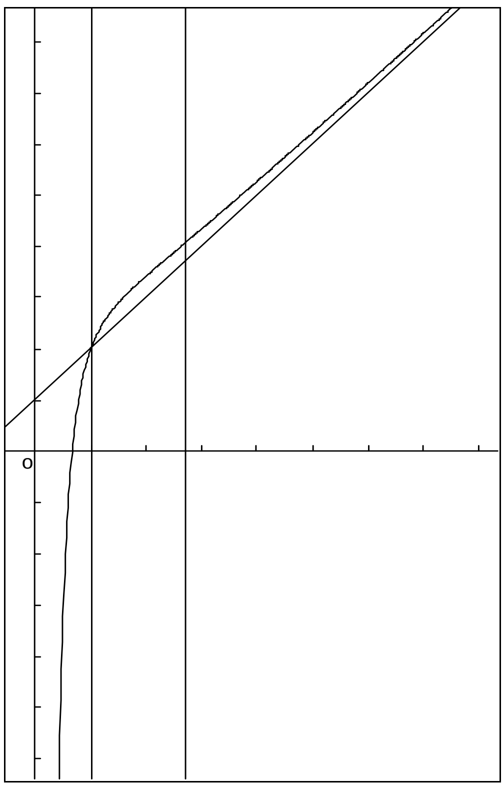
3.a. On a, pour tour réel x de $]0,+\infty[$:

$$\mathbf{f'(x)}=1+\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-2x(x-1+\ln x)}{x^4}=1+\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x-2(x-1+\ln x)}{x^3}$$

$$=1+\frac{x+1-2x+2-2\ln x}{x^3}=\frac{x^3-x+3-2\ln x}{x^3}=\frac{\mathbf{g(x)}}{\mathbf{x^3}}$$

b. D'après la question **1.2.3.a.**, f' est du signe de g sur $]0,+\infty[$, puisque x^3 est strictement positif sur $]0,+\infty[$; d'après la question **1.1.4.**, g est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Donc **f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$**.

c. I'allure de C_f et le tracé de la droite (Δ) sont donnés sur la figure suivante :



d. La partie du plan comprise entre C_f, (Δ) et les deux droites d'équation $x=1$ et $x=e$ est hachurée sur la figure de la question **1.2.3.c.**.

e. D'après la question **1.2.2.c.**, C_f est au-dessus de la droite (Δ) sur $[1,+\infty[$, donc sur $[1,e]$.
Donc la valeur A de l'aire de la partie hachurée du plan est, en unités d'aire :

$$\mathbf{A} = \int_1^e \left(f(x)-(x+1)\right)dx = \int_1^e \left(\frac{\mathbf{x-1+\ln x}}{\mathbf{x^2}}\right)\mathbf{dx}$$

f. Posons :

$$u(x) = x-1+\ln x \qquad u'(x) = 1+\frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad v(x) = -\frac{1}{x}$$

Il vient, à l'aide du théorème d'intégration par parties :

$$\mathbf{A} = \left[-\frac{1}{x}(x-1+\ln x)\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{e}(e-1+\ln e) + \int_1^e \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= -1+\left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = -1+\ln e - \frac{1}{e}+1 = \mathbf{1-\frac{1}{e}}$$

<u>EXERCICE 2</u>

2.1. Calcul de la puissance n$^{\text{ème}}$ de A.

1. Les calculs donnent :

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{CB} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2. Montrons par récurrence la propriété P_n définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$B^n = B \text{ et } C^n = (-1)^{n-1}C$$

<u>Première étape</u> :
P_1 est vraie, car on a :

$$B^1 = B \text{ et } (-1)^{1-1}C = (-1)^0 C = C = C^1$$

<u>Deuxième étape</u> :
On suppose que P_n est vraie pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$B^n = B \text{ et } C^n = (-1)^{n-1}C$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$B^{n+1} = B \text{ et } C^{n+1} = (-1)^n C$$

Par hypothèse de récurrence, il vient :

$$B^{n+1} = B^nB = BB = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = B$$

Et :

$$C^{n+1} = C^nC = (-1)^{n-1}CC = (-1)^{n-1}C^2 = (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^n C$$

Ceci prouve que P_{n+1} est vraie ; le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure que **pour tout entier naturel n non nul, on a :**

$$\mathbf{B^n = B} \text{ et } \mathbf{C^n = (-1)^{n-1}C}$$

3. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Et :

$$5A - 6I = 5\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -30 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -30 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Il vient donc :

$$\mathbf{A^2 = 5A - 6I}$$

4. D'après la question **2.1.3.**, on a les équivalences :

$$A^2 = 5A - 6I \Leftrightarrow 5A - A^2 = 6I \Leftrightarrow A(5I - A) = 6I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{6}(5I - A)\right) = I$$

Ceci prouve que **A est inversible** et que :

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{6}(5I - A)}$$

5. Montrons par récurrence la propriété P_n définie pour tout entier naturel n par :

$$A^n = 3^n B - 2^n C$$

<u>Première étape</u> :

P_0 est vraie, car on a :

$$3^0 B - 2^0 C = B - C = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0$$

<u>Deuxième étape</u> :

On suppose que P_n est vraie pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = 3^n B - 2^n C$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = 3^{n+1} B - 2^{n+1} C$$

On a :

$$3B - 2C = 3\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

D'après les questions **2.1.1.**, **2.1.2.** et par hypothèse de récurrence, il vient donc :

$$A^{n+1} = A^n A = (3^n B - 2^n C)(3B - 2C) = 3^{n+1} B^2 - 2x3^n BC - 3x2^n CB + 2^{n+1} C^2 = 3^{n+1} B - 2^{n+1} C$$

Ceci prouve que P_{n+1} est vraie ; le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure que **pour tout entier naturel n, on a :**

$$\mathbf{A^n = 3^n B - 2^n C}$$

La relation précédente est vraie pour $\mathbf{n = -1}$, car d'après les questions **2.1.4.** et **2.1.5.**, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(5I - A) = \frac{1}{6}\left(5(B - C) - (3B - 2C)\right) = \frac{1}{6}(2B - 3C) = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C = 3^{-1}B - 2^{-1}C$$

6. On a, pour tout entier naturel n :

$$A^n\left(\frac{1}{3^n}B-\frac{1}{2^n}C\right)=\left(3^nB-2^nC\right)\left(\frac{1}{3^n}B-\frac{1}{2^n}C\right)=B^2-\frac{3^n}{2^n}BC-\frac{2^n}{3^n}BC+C^2=B-C=I$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\left(\mathbf{A^{-1}}\right)^{\mathbf{n}}=\left(A^n\right)^{-1}\mathbf{=\frac{1}{3^n}B-\frac{1}{2^n}C}$$

2.2. Expression de u_n en fonction de n.

1. On a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u_{n+2}}\\ \mathbf{u_{n+1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5u_{n+1}-6u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}\mathbf{=A}\begin{pmatrix}\mathbf{u_{n+1}}\\ \mathbf{u_n}\end{pmatrix}$$

2. Montrons par récurrence la propriété P_n définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

<u>Première étape</u> :
P_0 est vraie, car on a :

$$\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=A^0\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

<u>Deuxième étape</u> :
On suppose que P_n est vraie pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

D'après la question **2.2.1.** et par hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}=AA^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=A^{n+1}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Ceci prouve que P_{n+1} est vraie ; le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure que **pour tout entier naturel n, on a :**

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u_{n+1}}\\ \mathbf{u_n}\end{pmatrix}\mathbf{=A^n}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

3. D'après la question **2.1.5.**, on a, pour tout entier naturel n :

$$A^n=3^nB-2^nC=3^n\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}-2^n\begin{pmatrix}2 & -6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2^{n+1} & -2x3^{n+1}+3x2^{n+1}\\ 3^n-2^n & -2x3^n+3x2^n\end{pmatrix}$$

On a donc, d'après la question **2.2.2.**

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^{n+1}-2^{n+1} & -2x3^{n+1}+3x2^{n+1}\\ 3^n-2^n & -2x3^n+3x2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3^{n+1}+2^{n+2}\\ -3^n+2^{n+1}\end{pmatrix}$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n=2^{n+1}-3^n}$$

<u>EXERCICE 3</u>

3.1. Etude du temps moyen d'attente en caisse.

1. f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, car on a :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} > 0 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 \geq 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, car f est continue sur $[0,+\infty[$ comme fonction rationnelle définie sur $[0,+\infty[$, et continue sur $]-\infty,0[$ comme fonction constante ; f admet des limites finies à gauche et à droite en 0, à savoir :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

Sous réserve d'existence, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{(x+1)^3}dx = 0 + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{2}{(t+1)^3}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x 2(t+1)'(t+1)^{-3}dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\frac{(t+1)^{-2}}{-2}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{(t+1)^2}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}+1\right) = 1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité**.

2. La fonction de répartition F_T de X est définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout réel x :

$$F_T(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

On a donc :

$$\begin{cases} \mathbf{F_T(x)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{F_T(x)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt + \int_0^x \frac{2}{(x+1)^3}dt = \mathbf{1 - \frac{1}{(x+1)^2}} & \mathbf{si\ x \geq 0} \end{cases}$$

3. La probabilité que le temps d'attente en caisse soit supérieur à quatre unités (de temps) est :

$$\mathbf{p(T \geq 4)} = 1 - p(T<4) = 1 - F(4) = 1 - \left(1 - \frac{1}{(4+1)^2}\right) = \mathbf{\frac{1}{25}}$$

4. La probabilité que le temps d'attente en caisse soit inférieur à cinq unités sachant qu'il est supérieur à quatre unités est :

$$\mathbf{p_{(T\geq 4)}(T \leq 5)} = \frac{p((T\leq 5)\cap(T\geq 4))}{p(T\geq 4)} = \frac{p(4\leq T\leq 5)}{p(T\geq 4)} = \frac{F(5)-F(4)}{p(T\geq 4)} = \frac{1-\frac{1}{36}-\left(1-\frac{1}{25}\right)}{\frac{1}{25}} = \mathbf{\frac{11}{36}}$$

5.a. En appelant succès l'évènement « la personne attend plus de quatre unités à la caisse», la probabilité du succès est $p = p(T \geq 4) = \dfrac{1}{25}$ et X est le nombre de succès obtenus lors de

$n=125$ épreuves indépendantes, puisque les temps d'attente successifs d'une même personne lors des différents passages en caisse sont supposés indépendants. Donc **X suit la loi binomiale** $\mathbf{B\left(n=125, p=\frac{1}{25}\right)}$.

b. L'espérance et la variance de X sont respectivement :

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = np = 125 x \frac{1}{25} \mathbf{= 5} \text{ et } \mathbf{V}(\mathbf{X}) = np(1-p) = 5\left(1-\frac{1}{25}\right) \mathbf{= \frac{24}{5}}$$

6. a. Avec les notations de la question **5.a.**, Y est le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à l'obtention du premier succès ; donc **Y suit la loi géométrique** $\mathbf{G\left(p=\frac{1}{25}\right)}$.

b. L'espérance et la variance de Y sont respectivement :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{25}} \mathbf{= 25} \text{ et } \mathbf{V}(\mathbf{Y}) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{25}}{\frac{1}{25^2}} = \frac{24}{25} x 25^2 = 24 x 25 \mathbf{= 600}$$

3.2. Mode de paiement de la clientèle.

1. S et U, prenant les valeurs 0 et 1, suivent des lois de Bernoulli ; le paramètre de S est :

$$p = p(S=1) = p((S=1)\cap(U=0)) + p((S=1)\cap(U=1)) = 0,2+0,1 = 0,3$$

Celui de U est :

$$q = p(U=1) = p((U=1)\cap(S=0)) + p((U=1)\cap(S=1)) = 0,3+0,1 = 0,4$$

Donc **S (resp. U) suit la loi de Bernoulli** $\mathbf{B(p=0,3)}$ $\mathbf{(resp.\ B(q=0,4))}$.

2. S (resp. U) suivant la loi de Bernoulli $B(p=0,3)$ $(\text{resp. } B(q=0,4))$, on a :

$$E(S) = p = 0,3 \text{ et } E(U) = q = 0,4$$

On a :

$$E(SU) = 0x0x0,4 + 0x1x0,3 + 1x0x0,2 + 1x1x0,1 = 0,1$$

Donc la covariance du couple (S,U) est :

$$\mathbf{cov}(\mathbf{S},\mathbf{U}) = E(SU) - E(S)E(U) = 0,1 - 0,3x0,4 \mathbf{= -0,02}$$

La covariance du couple (S,U) étant non nulle, **les variables S et U ne sont pas indépendantes**.

3. La probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire est :

$$\mathbf{p_{(U=1)}(S=1)} = \frac{p((S=1)\cap(U=1))}{p(U=1)} = \frac{0,1}{0,4} \mathbf{= \frac{1}{4}}$$