Exercice 1

1. (a) Limite de f en $+\infty$: Quand $x \to +\infty$, $\begin{cases} (x^2 - x - 3/4) \to +\infty (\text{comme } x^2) \\ 2x \to +\infty \text{ donc } e^{2x} \to +\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

   Limite de f en $-\infty$: Quand $x \to -\infty$, $\begin{cases} (x^2 - x - 3/4) \to +\infty \ (\text{comme } x^2) \\ 2x \to -\infty \text{ donc } e^{2x} \to 0 \end{cases}$, donc F.I.

   $f(x) = (1 - 1/x - 3/4x^2)x^2e^{2x}$. Or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (1 - 1/x - 3/4x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{2x} = 0 \text{ (croissance comparée de fcts polynôme et exp)} \end{cases}$ donc $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

   (b) Branche infinie de C en $-\infty$: puisque $\lim\limits_{-\infty} f = 0$, (Ox) est asymptote à C en $-\infty$.

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et :

$$f'(x) = (2x - 1)e^{2x} + (x^2 - x - 3/4).2e^{2x} = (2x^2 - 5/2)e^{2x};$$

   comme $e^{2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $(2x^2 - 5/2)$, trinôme du second degré dont les racines sont $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$et $+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en ces deux valeurs.

   (b) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$		$+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$f(-\dfrac{\sqrt{5}}{2})$	$\searrow$	$f(+\dfrac{\sqrt{5}}{2})$	$\nearrow$	0

   $f(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}) = (5/4 - (-\dfrac{\sqrt{5}}{2}) - 3/4)e^{\sqrt{5}} = 1/2(\sqrt{5} + 1)e^{\sqrt{5}}$; de même, $f(+\dfrac{\sqrt{5}}{2}) = 1/2(-\sqrt{5} + 1)e^{-\sqrt{5}}$.

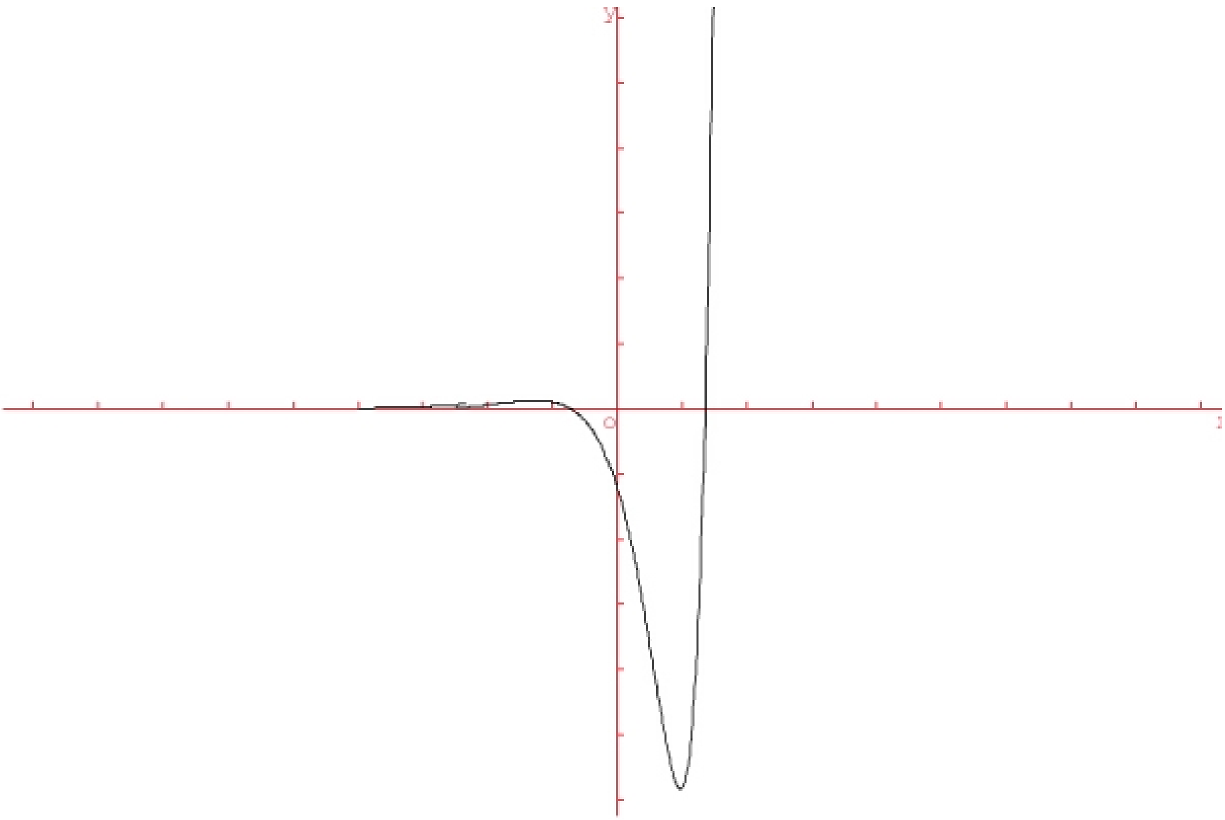
3. (a) Comme , pour tout x réel, $e^{2x} > 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - \dfrac{3}{4}) = 0$, équation du 2^{nd} degré, qui a pour discriminant $\Delta = 4$ et pour racines $x_1 = -1/2$ et $x_2 = 3/2$.
   L'équation $f(x) = 0$ a pour solutions $-1/2$ et $3/2$.

   (b) Comme , pour tout x, $e^{2x} > 0$, le signe de $f(x)$ est celui de $(x^2 - x - \dfrac{3}{4})$, soit :

x	$-\infty$		$-1/2$		$3/2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (c) Une équation de la tangente à C au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
   En $x_0 = -1/2$: $\begin{cases} f(-1/2) = 0 \\ f'(-1/2) = -2/e \end{cases}$ d'où : $T_{-1/2} : y = -\dfrac{2}{e}x - \dfrac{1}{e}$
   En $x_0 = 0$: $\begin{cases} f(0) = -3/4 \\ f'(0) = -5/2 \end{cases}$ d'où : $T_0 : y = -\dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{4}$.
   En $x_0 = 3/2$: $\begin{cases} f(3/2) = 0 \\ f'(3/2) = 2e^3 \end{cases}$ d'où : $T_{3/2} : y = 2e^3x - 3e^3$.

4. Allure de la courbe : $f'(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}) = 0 = f'(+\dfrac{\sqrt{5}}{2})$, les tangentes aux points d'abscisses $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$et $+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$sont horizontales.



5. (a) $I = \int_{-1/2}^{3/2} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1/2}^{3/2} = \frac{1}{2}(e^3 - e^{-1}).I = 1/2(e^3 - e^{-1})$.

   (b) $J = \int_{-1/2}^{3/2} xe^{2x}dx$. On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1/2\ e^{2x} \end{cases}$; u, v, u', v' sont continues; on obtient donc :

$$J = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{-1/2}^{3/2} - \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{3/2} e^{2x}dx = \frac{3}{4}e^3 + \frac{1}{4}e^{-1} - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}(e^3 + e^{-1}).J = \frac{1}{2}(e^3 + e^{-1}).$$

   $K = \int_{-1/2}^{3/2} x^2e^{2x}dx$. On pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v'(x) = (1/2)\ e^{2x} \end{cases}$; u, v, u', v' sont continues; on obtient donc :

$$K = \left[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right]_{-1/2}^{3/2} - \int_{-1/2}^{3/2} xe^{2x}dx = \frac{9}{8}e^3 - \frac{1}{8}e^{-1} - J = \frac{5}{8}(e^3 - e^{-1})$$

   soit : $K = \frac{5}{8}(e^3 - e^{-1})$.

   (c) Pour $x \in [-1/2; 3/2]$, $f(x) \leqslant 0$, donc, en unités d'aire, l'aire demandée est égale à $-\int_{-1/2}^{3/2} f(x)\ dx$;

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{3/2} f(x)dx &= \int_{-1/2}^{3/2} (x^2 - x - 3/4)e^{2x}dx = \int_{-1/2}^{3/2} x^2e^{2x}dx - \int_{-1/2}^{3/2} xe^{2x}dx - 3/4\int_{-1/2}^{3/2} e^{2x}dx \text{ (linéarité de l'intégrale)} \\ &= K - J - 3/4I = -1/4(e^3 + e^{-1}). \end{aligned}$$

   Comme l'unité de longueur est 2 cm, l'unité d'aire vaut 4 cm^2 et : $A = (e^3 + e^{-1})\text{cm}^2$.

Exercice II

Partie A

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

2. (a) N étant une variable aléatoire, on doit avoir $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(N=n)=1$. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)=\sum_{n=0}^{+\infty} a.\frac{5^n}{n!}=a\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{5^n}{n!}=a.e^5;$$

donc $a.e^5=1$, d'où $a=e^{-5}$

(b) On a donc pour tout entier naturel n, $P(N=n)=e^{-5}.\dfrac{5^n}{n!}$, et donc : $N\sim\mathcal{P}(5)$; $E(N)=5=V(N)$.

(c)

$$\begin{aligned}
P(N &\geqslant 6)=1-P(N<6)=1-P(N\leqslant 5)=1-F(5)=1-0,6160=0,3840\\
P(N &\leqslant 2)=F(2)=0,1247\\
P(N &\leqslant 9/N\geqslant 6)=\frac{P\left[(N\leqslant 9)\cap(N\geqslant 6)\right]}{P(N\geqslant 6)}=\frac{P(6\leqslant N\leqslant 9)}{1-F(5)}=\frac{F(9)-F(5)}{1-F(5)}=\frac{0,9682-0,6160}{1-0,6160}=\frac{0,3522}{0,3840}=\frac{3522}{3840}
\end{aligned}$$

Partie B

1. (a) Une densité de U est définie par $\begin{cases} f(x)=1 & \text{sur } [0,1]\\ f(x)=0 & \text{ailleurs}\end{cases}$.

(b) Fest définie par $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$; donc $\begin{cases}\text{pour } x<0, & F(x)=0\\ \text{pour } 0\leqslant x\leqslant 1, & F(x)=\int\limits_0^x 1dt=x\\ \text{pour } 1<x, & F(x)=1\end{cases}$.

(c) Comme $(U>x)$ est l'événement contraire de $(U\leqslant x)$,

$$p(U>x)=1-p(U\leqslant x)=1-F(x);$$

donc : $p(U>x)=\begin{cases}1 \text{ si } x<0\\ 1-x \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 \text{ si } 1<x\end{cases}$.

2. (a) $(V>x)$ est l'événement : « le skieur C attend un temps plus grand que x », ce qui se réalise quand les deux skieurs A et B restent plus de x temps au guichet, c'est à dire quand leur temps de passage sont tous les deux supérieurs à x, donc on a bien :

$$(V>x)=(U_1>x)\cap(U_2>x).$$

(b) Comme U_1 et U_2sont indépendantes,

$$p(V>x)=p(U_1>x)\times(U_2>x),$$

et puisque U_1 et U_2 suivent la même loi que U

$$p(V>x)=\left[p(U>x)\right]^2.$$

(c) La fonction de répartition G de V est définie par $G(x)=p(V\leqslant x)$, c'est-à-dire par :

$$G(x)=1-p(V>x)=1-\left[p(U>x)\right]^2.$$

D'où :

$$G(x)=\begin{cases}1-1=0 \text{ si } x<0\\ 1-(1-x)^2 \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-0=1 \text{ si } 1<x\end{cases};$$

or

$$1-(1-x)^2=1-(1-2x+x^2)=2x-x^2,$$

donc :

$$G(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 2x-x^2 \text{ si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 \text{ si } 1<x\end{cases}$$

(d) G est dérivable sauf en 0, et une densité de probabilité de Vest une fonction g définie par $g(x) = G'(x)$pour les valeurs de x différentes de 0, et $g(0)$pris arbitrairement.
Soit par exemple la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 - 2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

(e) V admet une espérance ssi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$est convergente. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^1 t(2-2t)dt = \int_0^1 (2t - t^2)dt = \left[2t^2/2 - 2t^3/3\right]_0^1 = 1 - 2/3 = 1/3;$$

donc V admet une espérance : $E(T) = 1/3$.
V admet une variance ssi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)dt$ est convergente. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)dt = \int_0^1 t^2(2-2t)dt = \int_0^1 (2t^2 - t^3)dt = \left[2t^3/3 - 2t^4/4\right]_0^1 = 2/3 - 1/2 = 1/6;$$

donc V admet une variance :

$$V(V) = E(V^2) - [E(V)]^2 = 1/6 - 1/9,$$

soit : $V(V) = 1/18$.

Exercice 3

Partie I

1. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 4L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \text{ et donc } P \text{ est inversible, et : } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $M \cdot T = I$, donc M est inversible et $M^{-1} = T$.

2. (a) $MP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 12 \\ -4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P^{-1}M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}MP = D$.

(b) De cette égalité, on déduit, en multipliant à gauche par P, et à droite par P^{-1}, $M = PDP^{-1}$;
avec la convention $M^0 = D^0 = I$, $\quad PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = M^0$; la relation est vraie pour $n = 0$
si pour un entier naturel n quelconque, $M^n = PD^nP^{-1}$, alors, comme $M^{n+1} = M^nM$ et $M = PDP^{-1}$,

$$M^{n+1} = PD^n \underbrace{P^{-1}P}\, IDP^{-1} = P \underbrace{D^nD}\, D^{n+1}P^{-1} = PD^{n+1}P^{-1};$$

la relation est héréditaire; donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}$

(c) D étant diagonale, pour tout n de $\mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, on obtient : $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve alors : $P \cdot \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = P \cdot \Delta \cdot P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L.$

Partie II

1. (a) 75% des employés du secteur A y restent l'année suivante , 25% des employés du secteur B vont travailler dans le secteur A ,et 25% des employés du secteur C vont travailler dans le secteur A , et la deuxième année, les effectifs du secteur A sont de 35 employés, donc : $\dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{4}b + \dfrac{1}{4}c = 35$

75% des employés du secteur B y restent l'année suivante, aucun employé du secteur A ne va travailler dans le secteur B l'année suivante, et 50% des employés du secteur C va dans le secteur B l'année suivante, donc, comme la $2^{\grave{e}me}$ année, le secteur b comporte 30 employés, $\dfrac{3}{4}b + \dfrac{1}{2}c = 30$.

Enfin, 25% des employés du secteur C y restent l'année suivante, 25% des employés du secteur A vont travailler dans le secteur C l'année suivante, et aucun employé du secteur B ne va travailler dans le secteur C l'année suivante, et comme la $2^{\grave{e}me}$ année, le secteur C comporte 15 employés, $\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{4}c = 15$.

On a donc : $\begin{cases} \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{4}b + \dfrac{1}{4}c = 35 \\ \dfrac{3}{4}b + \dfrac{1}{2}c = 30 \\ \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{4}c = 15 \end{cases}$, ce qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $MX = B$.

(b) Puisque M est inversible, l'égalité $MX = B$ équivaut à $X = M^{-1}B$, c'est-à-dire $X = TB$. On obtient donc

$$: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = X = T \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \begin{cases} a = 30 \\ b = 20 \\ c = 30 \end{cases}$$

2. (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\{A_n,\ B_n,\ C_n\}$est un système complet d'événements, donc

$$\begin{cases} p(A_{n+1}) = p(A_{n+1}/A_n)p(A_n) + p(A_{n+1}/B_n)p(B_n) + p(A_{n+1}/C_n)p(C_n) \\ p(B_{n+1}) = p(B_{n+1}/A_n)p(A_n) + p(B_{n+1}/B_n)p(B_n) + p(b_{n+1}/C_n)p(C_n) \\ p(C_{n+1}) = p(C_{n+1}/A_n)p(A_n) + p(C_{n+1}/B_n)p(B_n) + p(C_{n+1}/C_n)p(C_n) \end{cases};$$

or l'énoncé donne :

$p(A_{n+1}/A_n) = \dfrac{3}{4}$, $p(B_{n+1}/A_n) = 0$ et $p(C_{n+1}/A_n) = \dfrac{1}{4}$

$p(A_{n+1}/B_n) = \dfrac{1}{4}$, $p(B_{n+1}/B_n) = \dfrac{3}{4}$ et $p(C_{n+1}/B_n) = 0$

$p(A_{n+1}/C_n) = \dfrac{1}{4}$, $p(B_{n+1}/C_n) = \dfrac{1}{2}$ et $p(C_{n+1}/C_n) = \dfrac{1}{4}$, donc :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{4}c_n \end{cases},$$

ce qui s'écrit matriciellement : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ soit : $U_{n+1} = M \cdot U_n$.

(b) D'où, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = M^{n-1} \cdot U_1$

(c) Puisque la $1^{ère}$ année, E travaille dans le secteur A, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$L \cdot U_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix},$$

soit : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1/2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 1/3 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1/6 \end{cases}$.