Exercice 1

Partie 1

1. $(1+x+\frac{x^2}{2})$

(a) Quand x $\to -\infty$, $\begin{cases} (1+x+\frac{x^2}{2}) \to +\infty & \text{(polynôme, donc même limite que } \frac{x^2}{2}) \\ -x \to +\infty, \text{ donc } e^x \to +\infty \end{cases}$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

f(x) peut s'écrire : $f(x) = \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{e^x}$, donc Quand $x \to +\infty$, $\frac{e^x}{x^n} \to +\infty$, donc $\frac{x^n}{e^x} \to 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(b) • Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, C_f admet (Ox) comme asymptote en + ∞.

• Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, on étudie $\frac{f(x)}{x}$: $\frac{f(x)}{x} = (\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2})e^{-x}$;

Quand $x \to -\infty$, $\begin{cases} (\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}) \to -\infty \\ -x \to +\infty, \text{ donc } e^x \to +\infty \end{cases}$, donc : $\frac{f(x)}{x} \to -\infty$, donc C_f a une Branche parabolique dans la direction de (Oy) en - ∞.

2. (a) $f'(x) = (1+x)e^{-x} - (1+x+\frac{x^2}{2})e^{-x} = -\frac{x^2}{2}e^{-x}$.

e^{-x}est toujours > 0, - $\frac{x^2}{2}$ est > 0 sauf en 0, donc $f'(x) > 0$ sauf en 0.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

(b) Equation de la tangente à C_f au point d'abscisse x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ donc la tangente à C_f au point d'abscisse 0 a pour équation :$y = 1$.

Partie 2

1. (a) $I_0(M) = \int\limits_0^M e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^M = -e^{-M} + 1$.

(b) Quand $M \to +\infty$, $-M \to -\infty$, donc $e^{-M} \to 0$, donc $I_0(M) \to 1$, donc : $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente et a pour valeur $I_0 = 1$.

2. (a) $I_{n+1}(M) = \int\limits_0^M x^{n+1}e^{-x}dx$. On pose : $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x^{n+1} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$; les fonctions u, u', v, v' sont continues sur $[0; +\infty[$, donc

$$I_{n+1}(M) = \left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^M - \int_0^M -(n+1)x^n e^{-x}dx = -M^{n+1}e^{-M} + (n+1)\int_0^M x^n e^{-x}dx$$

Soit : $I_{n+1}(M) = -M^{n+1}e^{-M} + (n+1)I_n(M)$.

(b) On a vu au 1) que $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$est convergente et a pour valeur $I_0 = 1 = 1!$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

Soit n un entier naturel quelconque ; on suppose que $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ est convergente et a pour valeur $I_n = n!$. Alors, comme

$$I_{n+1}(M) = -M^{n+1}e^{-M} + (n+1)I_n(M),$$

Quand $M \to +\infty$,

- $(-M) \to -\infty$, donc $M^{n+1}e^{-M} \to 0$ (croissances comparées de l'exponentielle et de la puissance),
- $I_n(M) \to n!$, donc $(n+1)I_n(M) \to (n+1)n! = (n+1)!$ d'après l'hypothèse de récurrence,

Donc $I_{n+1}(M) \to (n+1)!$, soit $\int\limits_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-x}dx$est convergente et a pour valeur $I_{n+1} = (n+1)!$. Donc :la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc : $\forall n \in N$, $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ est convergente et a pour valeur $I_n = n!$.

(c) $g(x) = \begin{cases} af(x) & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ $f(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$, donc a doit être positif. Alors $\begin{cases} g \text{ est continue sauf en } 0 \\ g \text{ est positive ou nulle sur } \mathbb{R} \end{cases}$

de plus, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} af(x)dx$, et en utilisant le a)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = a(\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx) = a(I_0 + I_1 + \frac{1}{2}I_2) = a(1 + 1! + \frac{1}{2}2!) = 3a.$$

donc $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$est convergente et vaut $3a$, et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, qui est bien positif. Donc :

g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $Z \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.

Sous réserve de convergence,

$$E(Z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{+\infty} (x + x^2 + x^3)e^{-x}dx.$$

$E(Z)$ converge d'après 2) a), et

$$E(Z) = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + \frac{1}{2}I_3) = \frac{1}{3}(1 + 2! + \frac{1}{2}3!) = 2.$$

De même,

$$E(Z^2) = \frac{1}{3}(I_2 + I_3 + \frac{1}{2}I_4) = \frac{1}{3}(2! + 3! + \frac{1}{2}4!) = \frac{20}{3}.$$

Donc Z a une variance, et

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{20}{3} - 4 = \frac{8}{3}.$$

de plus,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} af(x)dx = a(\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx) = a(I_0 + I_1 + \frac{1}{2}I_2) = a(1 + 1! + \frac{1}{2}2!) = 3a.$$

donc $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ est convergente et vaut $3a$, et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, qui est bien positif. Donc : g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire $Z \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$.
Sous réserve de convergence,

$$E(Z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{+\infty} (x + x^2 + x^3)e^{-x}dx.$$

$E(Z)$ converge d'après 2), et

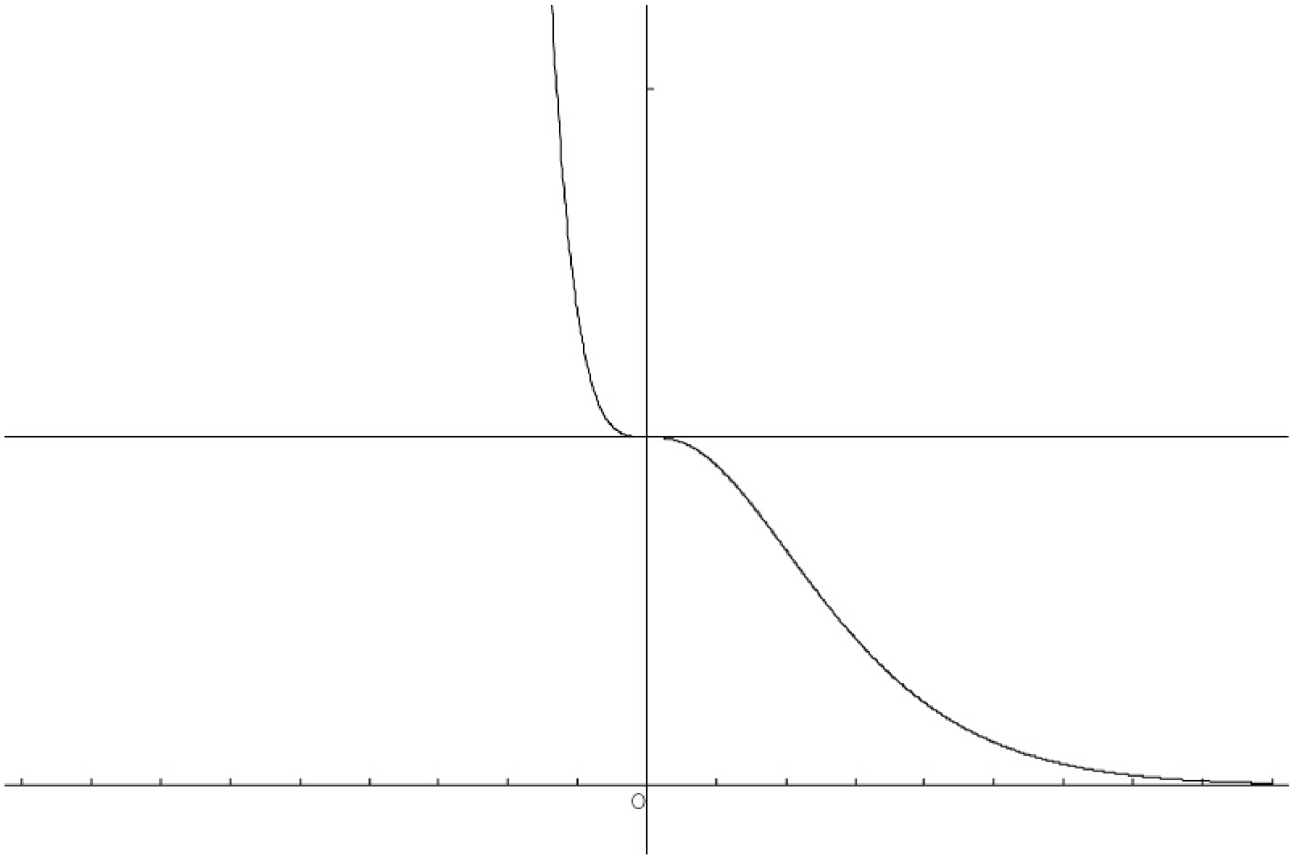
$$E(Z) = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + \frac{1}{2}I_3) = \frac{1}{3}(1 + 2! + \frac{1}{2}3!) = 2.$$

De même,

$$E(Z^2) = \frac{1}{3}(I_2 + I_3 + \frac{1}{2}I_4) = \frac{1}{3}(2! + 3! + \frac{1}{2}4!) = \frac{20}{3}.$$

Donc Z a une variance, et

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{20}{3} - 4 = \frac{8}{3}.$$



Exercice 2

Partie 1

1. (a) Méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

P est inversible car une réduite est triangulaire avec les éléments de la diagonale non nuls.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array} \sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{I} \left| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)}_{P^{-1}} \right.$$

donc $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) calcul de $P^{-1}MP$:

$$\begin{array}{cccc}
 & \overbrace{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\3&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}}^{M} & \overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}}^{P} & \\
\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\-3&-1&1\end{pmatrix}}_{P^{-1}} & \underbrace{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&0&0\\4&4&4\\-6&-2&2\end{pmatrix}}_{P^{-1}M} & \underbrace{\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&8&0\\0&0&4\end{pmatrix}}_{P^{-1}MP} & P^{-1}MP=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=D.
\end{array}$$

$P^{-1}MP=D$, donc en multipliant à gauche par P, $MP=PD$, et en multipliant à droite par P^{-1}, $M=PDP^{-1}$.

2. (a) D est diagonale donc D^n est obtenue en élevant les éléments de la diagonale à la puissance n :

$$D^n=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

(b) $M^n=(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})\ldots\ldots(PDP^{-1})=PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\ldots(P^{-1}P)DP^{-1}=PD^nP^{-1}$
Ou par récurrence :
$M^0=I=PD^0P^{-1}$ la ppté est vraie au rang 0.
Si pour un n quelconque de N, $M^n=PD^nP^{-1}$, alors : $M^{n+1}=M^nM=PD^nP^{-1}PDP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$. La propriété est héréditaire; donc : Pour tout n de N, $M^n=PD^nP^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^n&0&0\\0&1&0\\0&0&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix} & \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\-3&-1&1\end{pmatrix}}_{P^{-1}} \\
\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^n&0&0\\-2\left(\frac{1}{4}\right)^n&1&-\left(\frac{1}{2}\right)^n\\\left(\frac{1}{4}\right)^n&1&\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}}_{PD^n} & \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\left(\frac{1}{4}\right)^n&0&0\\-4\left(\frac{1}{4}\right)^n+1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n&1+\left(\frac{1}{2}\right)^n&1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\\2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1-3\left(\frac{1}{2}\right)^n&1-\left(\frac{1}{2}\right)^n&1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}}_{M^n}
\end{array}$$

$$M^n=\underbrace{\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^n&0&0\\-2\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}&\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n&\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\end{pmatrix}}$$

3. (a) D est diagonale avec aucun élément de sa diagonale nul, donc D est inversible et $D^{-1}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

(b) $M=PDP^{-1}$ et M,P,P^{-1} sont inversibles, donc M est inversible, et $M^{-1}=(PDP^{-1})^{-1}=(P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1}$.
Soit : $M^{-1}=PDP^{-1}$.

Partie 2

1. (a) $\underbrace{\left\lfloor\begin{matrix}1B\\3N\end{matrix}\right\rfloor}_{\text{urne blanche}}\underbrace{\left\lfloor\begin{matrix}3N\\1V\end{matrix}\right\rfloor}_{\text{urne noire}}\underbrace{\left\lfloor\begin{matrix}1N\\3V\end{matrix}\right\rfloor}_{\text{urne verte}}$

P(on tire une B dans l'urne B) $=\frac{1}{4}$, P(on tire une N dans l'urne B) $=\frac{3}{4}$, P(on tire une V dans l'urne B)$=0$

P(on tire une B dans l'urne N) = 0, P(on tire une N dans l'urne N) = $\frac{3}{4}$, P(on tire une V dans l'urne N) = $\frac{1}{4}$
P(on tire une B dans l'urne V) = 0, P(on tire une N dans l'urne V) = $\frac{1}{4}$, P(on tire une V dans l'urne V)= $\frac{3}{4}$
P(on tire 1 boule dans l'urne blanche au 1^{er} tirage) = P(on tire 1 boule dans l'urne noire au 1^{er} tirage) =P(on tire 1 boule dans l'urne verte au 1^{er} tirage) = $\frac{1}{3}$
Puisqu'il n'y a de boules blanches que dans l'urne blanche, B_1 est réalisé quand on a tiré une boule blanche dans l'urne blanche, donc :
$P(B_1)$ = P(on tire dans l'urne B et on tire une B)= P(on tire dans l'urne B) P(on tire une B dans l'urne B) $= \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
A chaque tirage, {tirer dans l'urne B, tirer dans l'urne N, tirer dans l'urne V } forment un système complet d'évènements, donc , formule des probabilités totales :
$P(N_1)$ = P(on tire dans l'urne B) P(on tire une N /on tire dans B) + P(on tire dans l'urne N) P(on tire une N /on tire dans N) + P(on tire dans l'urne V) P(on tire une N /on tire dans V) $= \frac{1}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.
De même, P(V_1) = P(on tire dans l'urne B) P(on tire une V /on tire dans B) + P(on tire dans l'urne N) P(on tire une V /on tire dans N) + P(on tire dans l'urne V) P(on tire une V /on tire dans V)= $\frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{3}{4} = \frac{4}{12}$
(remarque : $\frac{1}{12} + \frac{7}{12} + \frac{4}{12} = 1$ ce qui est normal puisque {B_1, N_1, V_1} forment un système complet d'événements)

(b) on tire une boule blanche uniquement dans l'urne blanche, donc on ne peut tirer une blanche en $2^{ème}$ que si on a tiré dans l'urne B en 1^{er} :

$$p(B_2) = P(B_2 \cap B_1) = P(B_1) \underbrace{P(B_2/B_1)}_{\substack{\text{proba de tirer une boule} \\ \text{B dans l'urne blanche}}} = \frac{1}{12}.\frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

ou : formule des probabilités totales ({B_1, N_1, V_1} forment un système complet d'événements) :

$$\begin{aligned} p(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) + P(B_2 \cap V_1) \\ &= P(B_1) \underbrace{P(B_2/B_1)}_{\substack{\text{proba detirer une boule} \\ \text{B dans l'urne blanche}}} + P(N_1) \underbrace{P(B_2/N_1)}_{\substack{\text{proba de tirer une boule} \\ \text{B dans l'urne noire}}} + P(V_1) \underbrace{P(B_2/V_1)}_{\substack{\text{proba de tirer une boule} \\ \text{B dans l'urne verte}}} \\ &= \frac{1}{12}.\frac{1}{4} + \frac{7}{12}.0 + \frac{4}{12}.0 = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

{B_1, N_1, V_1} forment un système complet d'événements , donc, formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(N_2 \cap B_1) + P(N_2 \cap N_1) + P(N_2 \cap V_1) \\ &= P(B_1) \underbrace{P(N_2/B_1)}_{\substack{\text{proba de tirer une boule} \\ \text{noire dans l'urne blanche}}} + P(N_1) \underbrace{P(N_2/N_1)}_{\substack{\text{tirer une boule noire} \\ \text{dans l'urne noire}}} + P(V_1) \underbrace{P(N_2/V_1)}_{\substack{\text{tirer une boule noire} \\ \text{dans l'urne verte}}}) \\ &= \frac{1}{12}.\frac{3}{4} + \frac{7}{12}.\frac{3}{4} + \frac{4}{12}.\frac{1}{4} = \frac{28}{48} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

De même, $P(V_2) = \frac{1}{12}.0 + \frac{7}{12}.0 + \frac{4}{12}.\frac{3}{4} = \frac{19}{48}$(ou $1 - P(B_2) - P(N_2)$)

2. (a) On ne peut tirer une boule blanche que dans l'urne blanche, donc on ne peut tirer une boule blanche au (n + 1)-ième tirage que si on a tiré une blanche au n-ième tirage, donc $P(B_{n+1}) = P(B_n)P(B_{n+1}/B_n)$;
$P(B_{n+1}/B_n)$ = P(on tire une boule blanche dans l'urne Blanche)= $\frac{1}{4}$ Donc $P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(B_n)$ Donc $(p(B_n))$ est une suite géométrique $\begin{cases} \text{de raison } 1/4 \\ \text{de 1er terme } P(B_1) = 1/12 \end{cases}$, donc

$$P(B_n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{3}$$

(b) Pour les mêmes raisons qu'au 1) b), en utilisant la formule des probabilités totales et puisque

- $P(B_{n+1}/B_n)$ =P(tirer une blanche dans l'urne blanche)= $\dfrac{1}{4}$,
  $P(B_{n+1}/N_n)$ =P(tirer une blanche dans l'urne noire) = 0, et
  $P(B_{n+1}/V_n)$ =P(tirer une boule blanche dans l'urne verte) = 0 ;
- $P(N_{n+1}/B_n)$ = P(tirer une noire dans l'urne blanche) = $\dfrac{3}{4}$,
  $P(N_{n+1}/N_n)$ =P(tirer une noire dans l'urne noire) = $\dfrac{3}{4}$, et
  $P(N_{n+1}/V_n)$ =P(tirer une boule noire dans l'urne verte) = $\dfrac{1}{4}$;
- $P(V_{n+1}/B_n)$ = P(tirer une verte dans l'urne blanche) = 0,
  $P(V_{n+1}/N_n)$ = P(tirer une verte dans l'urne noire) = $\dfrac{1}{4}$, et
  $P(V_{n+1}/V_n)$ = P(tirer une boule verte dans l'urne verte) = $\dfrac{3}{4}$;

$$\begin{cases} P(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}P(B_n) + 0.P(N_n) + 0.P(V_n) \\ P(N_{n+1}) = \dfrac{3}{4}P(B_n) + \dfrac{3}{4}.P(N_n) + \dfrac{1}{4}.P(V_n) \\ P(V_{n+1}) = 0.P(B_n) + \dfrac{1}{4}.P(N_n) + \dfrac{3}{4}.P(V_n) \end{cases}$$

On a donc bien : $X_{n+1} = MX_n$.

(c) Soit la propriété $X_n = M^{n-1}X_1$.

- Pour $n = 1$, $M^{n-1} = M^0 = I$: on a bien $X_1 = M^0X_1$, donc la propriété est vraie au rang 1.
- Si pour un entier n quelconque supérieur ou égal à 1, $X_n = M^{n-1}X_1$, alors, comme $X_{n+1} = MX_n$,

$$X_{n+1} = MM^{n-1}X_1 = M^nX_1.$$

la propriété est héréditaire, donc on a bien : Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $X_n = M^{n-1}X_1$.

3. Donc, $X_n = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1/12 \\ 7/12 \\ 4/12 \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{cases} P(N_n) = \dfrac{1}{12}\left[-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{2}\left(1+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \dfrac{7}{2}\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \dfrac{4}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right] \\ \qquad = \dfrac{1}{12}\left[6-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \\ P(V_n) = \dfrac{1}{12}\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{2}\left(1-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \dfrac{7}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + \dfrac{4}{2}\left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right] \\ \qquad = \dfrac{1}{12}\left[6+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} - 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \end{cases}$$

Comme $0 < \dfrac{1}{4} < 1$ et $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} P(N_n) = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(V_n) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 3

Situation 1

Contenu de l'urne : $\underbrace{\begin{bmatrix} 2n \text{ N} \\ n^2 - 2n \text{ B} \end{bmatrix}}_{n^2 \text{ boules}}$

1. (a) Contenu de l'urne : $\underbrace{\begin{bmatrix} 40 \text{ N} \\ 360 \text{ B} \end{bmatrix}}_{400}$ boules, donc la probabilité d'obtenir une boule noire lors d'un tirage est : $p = \dfrac{40}{400} = \dfrac{1}{10}$

(b) $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour un tirage dans l'urne, on considère l'évènement A : tirer un boule noire, de proba } p = 1/10\\ \text{on effectue 20 tirages avec remise, donc indépendants}\\ \text{X compte le nombre de réalisations de A}\end{array}\right.$

donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$

$X(\Omega) = [[0; 20]]$ et pour tout k de $[[0; 20]]$, $P(X = k) = C_{20}^{k} 0,1^k 0,9^{20-k}$.

(c) $E(X) = np = 2;\quad V(X) = np(1-p) = 1,8$.

2. Le joueur est gagnant quand $X \leqslant 2$.

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1216 + 0,2702 + 0,2852 = 0,6770$$

Situation 2

1. (a) Contenu de l'urne : $\underbrace{\left\lfloor \begin{array}{c} 2n \text{ N} \\ n^2 - 2n \text{ B} \end{array} \right\rfloor}_{n^2 \text{ boules}}$, donc la probabilité d'obtenir une boule noire lors d'un tirage est : $p' = \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$.

(b) Comme précédemment, Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p' = \dfrac{2}{n}$

$Y(\Omega) = [[0; n]]$ et pour tout k de $[[0; n]]$, $P(Y = k) = C_n^k \left(\dfrac{2}{n}\right)^k \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^{n-k}$.

(c) $E(Y) = np = 2;\quad V(Y) = np(1-p) = \dfrac{2(n-2)}{n}$

2. (a) Comme $\left\{\begin{array}{c} n \geq 30 \\ np = 2 \leqslant 15 \\ p = \dfrac{2}{n} \leqslant \dfrac{1}{15} \leqslant 0,1 \end{array}\right.$, on peut approcher la loi de Y par la loi de Poisson de paramètre $E(Y) = 2$.

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout k de , $P(Y = k) = e^{-2}\dfrac{2^k}{k!}$, $\quad E(Y) = 2 = V(Y)$.

(b) Le joueur est gagnant quand $Y \leqslant 2$.

$$P(Y \leqslant 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0,1353 + 0,2707 + 0,2707 = 0,6767$$

$P(Y \leqslant 2) = e^{-2}\dfrac{2^0}{0!} + e^{-2}\dfrac{2^1}{1!} + e^{-2}\dfrac{2^2}{2} = \left(1 + 2 + \dfrac{2^2}{2}\right) e^{-2} = f(2)$, avec f la fonction étudiée dans l'exercice 1, d'où $P(Y \leqslant 2) \simeq 0,68$ (on retrouve bien la même valeur).