Exercice I
Partie A

1) $J^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\2&0&2\\2&0&2\end{pmatrix}=2J$; $J^3=J^2J=2J^2=4J=2^2J$.

Par récurrence , montrons que $J^k=2^{k-1}J$:

- Pour $k=1$, on a bien $J^1=2^0J$;
- Si pour un k quelconque entier non nul, $J^k=2^{k-1}J$, alors, puisque $J^{k+1}=J^kJ$,

$J^{k+1}=2^{k-1}J.J=2^{k-1}J^2=2^{k-1}2J=2^kJ$;

L'égalité est vraie pour k =1 et héréditaire, donc : $\boxed{\text{pour tout } k \text{ de IN*}, J^k=2^{k-1}J}$.

2) $2I+J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}=A$

ou bien :

pour a et b réels, $aI+bJ=\begin{pmatrix}a+b&0&b\\b&a&b\\b&0&a+b\end{pmatrix}$; donc $aI+bJ=A\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\b=1\\a=2\end{cases}$ d'où : $\boxed{A=2I+J}$

3) Pour n = 1, $2^nI+\left(\dfrac{4^n-2^n}{2}\right)J=2I+\dfrac{4-2}{2}J=2I+J=A$; l'égalité est vraie au rang 1.

Si pour un entier n quelconque non nul, $A^n=2^nI+\left(\dfrac{4^n-2^n}{2}\right)J$, alors, comme $A^{n+1}=A^nA$,

$$A^{n+1}=\left[2^nI+\left(\frac{4^n-2^n}{2}\right)J\right][2I+J]=2^{n+1}I+2^nJ+(4^n-2^n)J+\frac{4^n-2^n}{2}J^2$$

$$=2^{n+1}I+[2^n+4^n-2^n+4^n-2^n]J=2^{n+1}I+[2.4^n-2^n]J=2^{n+1}I+\frac{4.4^n-2.2^n}{2}J$$

$$=2^{n+1}I+\frac{4^{n+1}-2^{n+1}}{2}J$$

l'égalité est héréditaire. Donc pour tout n de $\angle$*, $A^n=2^nI+\left(\dfrac{4^n-2^n}{2}\right)J$.

4) On a donc : $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4^n-2^n/2&0&4^n-2^n/2\\4^n-2^n/2&0&4^n-2^n/2\\4^n-2^n/2&0&4^n-2^n/2\end{pmatrix}$.

Or $\dfrac{4^n-2^n}{2}+2^n=\dfrac{4^n-2^n+2.2^n}{2}=\dfrac{4^n+2^n}{2}$, donc : $\boxed{A^n=\begin{pmatrix}\dfrac{4^n+2^n}{2}&0&\dfrac{4^n-2^n}{2}\\\dfrac{4^n-2^n}{2}&2^n&\dfrac{4^n-2^n}{2}\\\dfrac{4^n-2^n}{2}&0&\dfrac{4^n+2^n}{2}\end{pmatrix}}$.

Partie B

1) Pour n = 0, $2^nI+\left(\dfrac{4^n-2^n}{2}\right)J=2^0I+\dfrac{1-1}{2}J=I=A^0$;

La formule est vraie au rang 0.

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & \underset{\uparrow}{0} & 8 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \\ \\ \end{array}$$

on obtient une matrice triangulaire dont tous les éléments de la diagonale sont non nuls, donc A est inversible

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 24 & 0 & -3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 1/24\, L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/24\, L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/8\, L_3 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} 3/8 & 0 & -1/8 \\ -1/8 & 1/2 & -1/8 \\ -1/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

On a donc : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

3) Pour $n = -1$,

$2^n I + \left(\frac{4^n - 2^n}{2}\right) J = \frac{1}{2} I + \frac{1/4 - 1/2}{2} J = \frac{1}{2} I - \frac{1}{8} J = \frac{1}{8}(4I - J) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$ la formule est encore valable pour $n = -1$.

Exercice II

$f(x) = x + 1 + 2\frac{\ln x}{x}$

Partie A

1) Quand $x \to 0$, $\left.\begin{array}{c} x + 1 \to 1 \\ \ln x \to -\infty \text{ et } 1/x \to +\infty, \text{ donc } \frac{\ln x}{x} \to -\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty \\ \text{(ox) est asymptote à C} \end{array}}$

Quand $x \to +\infty$, $\left.\begin{array}{c} x + 1 \to +\infty \\ \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\text{c.c; ln et pol}} \to 0 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; de plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x+1)\right) = 0$, donc $\boxed{\text{D :}}$ $\boxed{y = x + 1 \text{ est asymptote à C en } +\infty}$

2) $u(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

a) $u'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{x^2 - 1}{x}$; *u'(x)* est du signe de $x^2 - 1$ dans $]0;+\infty[$, d'où le sens de variations de *u* :

x	0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

u a un minimum égal à 3, donc $u(x)$ est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$.

b) $f'(x) = 1 + 2\dfrac{1-\ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 + 2 - 2\ln x}{x^2} = \dfrac{u(x)}{x^2}$; donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$, c'est-à-dire strictement positif sur $]0\,;+\infty[$.

c) d'où le tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3)

a) La position de C par rapport à D est donnée par le signe de $f(x) - (x+1)$;

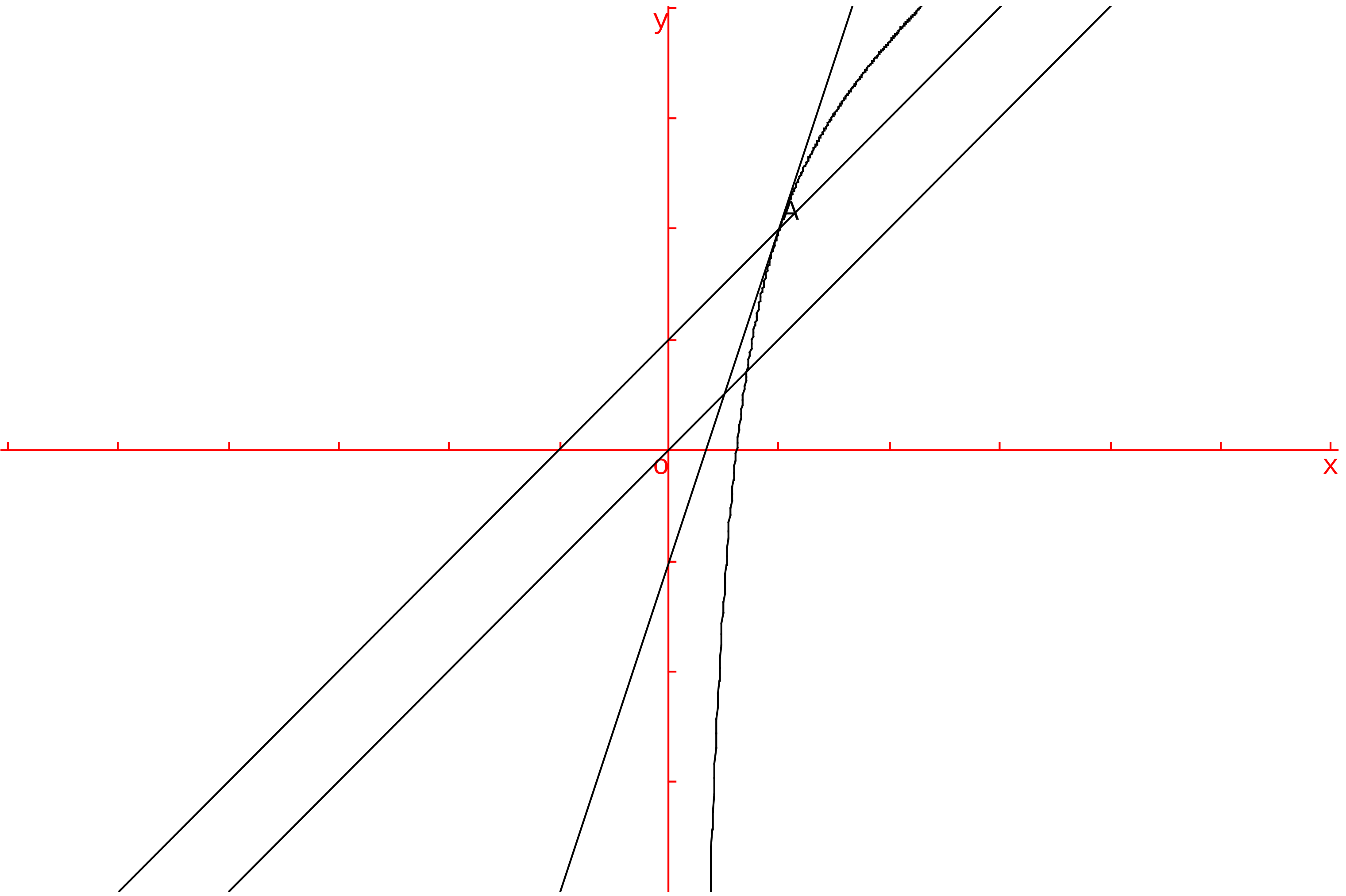
$f(x) - (x+1) = 2\dfrac{\ln x}{x}$, qui est du signe de $\ln x$, d'où :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
conclusion		$\dfrac{\text{D}}{\text{C}}$	D coupe C	$\dfrac{\text{C}}{\text{D}}$	

b) L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f(1) = 2$; $f'(1) = 3$, d'où l'équation de T : $y = 3(x-1) + 2$, soit $\boxed{\text{T : } y = 3x - 1}$

c)



Partie B

1) a) Le nombre α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C et de la droite Δ d'équation $y = x$.

b) $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + 2\dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x + 2\ln x = 0}_{\text{car } x \neq 0 \text{ dans }]0;+\infty[} \Leftrightarrow \ln x = -\dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow x = g(x)$.

Puisque α est solution de $f(x) = x$, α est donc solution de $x = g(x)$, donc $\boxed{g(\alpha) = \alpha}$.

2)

a) Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, donc $0 \le u_0 \le 1$; l'inégalité est vraie au rang 0.

Soit n un entier positif quelconque ; supposons que $0 \le u_n \le 1$; alors $-\dfrac{1}{2} \le -\dfrac{1}{2}u_n \le 0$, donc , comme l'exponentielle est croissante, $e^{-\frac{1}{2}} \le e^{-\frac{1}{2}u_n} \le e^0$;

Comme $e^{-\frac{1}{2}} \ge 0$, $e^{-\frac{1}{2}u_n} = u_{n+1}$ et $e^0 = 1$, on obtient : $0 \le u_{n+1} \le 1$; l'inégalité est héréditaire ; donc $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de} \angle\text{, on a } 0 \le u_n \le 1}$

b) $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$, donc $g'(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} = -\dfrac{1}{2}g(x)$.

Quand $0 \le x \le 1$, avec les mêmes encadrements que ceux donnés dans la question précédente en remplaçant u_n par x, on obtient $0 \le g(x) \le 1$, donc $0 \le \dfrac{1}{2}g(x) \le \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire : $\boxed{|g'(x)| \le \dfrac{1}{2}}$.

c) On sait que pour une fonction *g* dérivable sur un intervalle I,
si : $|g'(x)| \le k$ pour tout *x* de I, alors, pour tout a et tout b de I, $|g(b) - g(a)| \le k|b - a|$.

Ici, *g* est dérivable sur I, $|g'(x)| \le \dfrac{1}{2}$ pour tout *x* de I ; de plus α et tous les u_n sont dans I.

Donc, pour tout entier *n* de ∠, $|g(u_n) - g(\alpha)| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Or $g(u_n) = u_{n+1}$ et (question 1)) $g(\alpha) = \alpha$; donc :

pour tout entier *n* de ∠, $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|}$.

3) On montre par récurrence l'inégalité demandée :

Pour $n = 0$, comme $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 0 \le \alpha \le 1 \end{cases}$, $|u_0 - \alpha| \le 1$; et comme $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$, on a bien : $|u_0 - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$. L'inégalité est vraie au rang 0.

Si pour un entier positif *n* quelconque, on a $|u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, alors, comme d'après la question précédente,

$|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; l'inégalité est héréditaire.

On a donc : $\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ de IN}, |u_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$

4) a) Quand $n \to +\infty$, comme $-1 \le \dfrac{1}{2} \le 1$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$, donc, théorème des gendarmes, $|u_n - \alpha| \to 0$, donc (u_n) converge vers 0.

b) On aura $|u_n - \alpha| \leq 10^{-2}$ dès que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-2}$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100}$; or $2^7 = 128 \geq 100$, donc : $\boxed{\text{à partir de } n = 7,\ |u_n - \alpha| \leq 10^{-2}}$; Ou bien :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow n \ln\frac{1}{2} \leq -2\ln 10 \Leftrightarrow \underbrace{n \geq \frac{2\ln 10}{\ln 2}}_{\text{car } \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \text{ et } \ln 2 > 0} \Leftrightarrow n \geq 2.3{,}32 \Leftrightarrow n \geq 6{,}64$$; ceci est vrai à partir de

$n = 7$, puisque n est entier.

Exercice III

Partie A

1) a) Pour un tirage, on considère l'événement R : la boule tirée est rouge, de probabilité $p = \frac{2}{3}$.

Les trois tirages sont indépendants puisqu'il y a remise ;
X compte le nombre de réalisations de R ;

Donc X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$ $\boxed{X \hookrightarrow B(3,\ 2/3)}$

Donc $\boxed{X(\Omega) = [\![0;3]\!]}$

Et pour k de $[\![0;3]\!]$, $p(X = k) = C_3^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}$;

Soit :

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

b) $\boxed{E(X) = n.p = 2}$ et $\boxed{V(X) = n.p(1-p) = \frac{2}{3}}$.

2) a) $[(X = 2)\text{et}(Y = 1)]$ est l'événement : on a tiré deux boules rouges, et on a tiré la première en premier, c'est-à-dire l'événement $[(R_1R_2B_3) \text{ ou } (R_1B_2R_3)]$; or les R_i et B_j sont indépendants, de probabilité respective $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, et les événements $R_1R_2B_3$ et $R_1B_2B_3$ sont incompatibles, donc

$$\boxed{p[(X = 2)\text{et}(Y = 1)] = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27}}.$$

$[(X = 3)\text{et}(Y = 2)]$est impossible : on ne peut pas tirer 3 boules rouges, et la première boule rouge en 2ème ,
donc $\boxed{p[(X = 3)\text{et}(Y = 2)] = 0}$;

b) On peut analyser de la même façon tous les $[(X = i)\text{et}(Y = j)]$, ou donner le tableau des résultats possibles, qui sont au nombre de 8, puisqu'un résultat est une trois-liste d'éléments de {R, B}, avec leurs probabilités et les valeurs prises par X et Y :

	p	X	Y		p	X	Y
$R_1R_2R_3$	$\frac{8}{27}$	3	1	$R_1B_2B_3$	$\frac{2}{27}$	1	1
$R_1R_2B_3$	$\frac{4}{27}$	2	1	$B_1R_2B_3$	$\frac{2}{27}$	1	2
$R_1B_2R_3$	$\frac{4}{27}$	2	1	$B_1B_2R_3$	$\frac{2}{27}$	1	3
$B_1R_2R_3$	$\frac{4}{27}$	2	2	$B_1B_2B_3$	$\frac{1}{27}$	0	0

D'où l'on tire le tableau de la loi conjointe de X et Y :

X \ Y	0	1	2	3	$p(X=k)$
0	$\frac{1}{27}$	0	0	0	$\frac{1}{27}$
1	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{6}{27}$
2	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
3	0	$\frac{8}{27}$	0	0	$\frac{8}{27}$
$p(Y=j)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	1

c) On retrouve la loi de X en additionnant les probabilités par lignes : en effet,

d) Les (Y=j) forment un système complet d'événements et avec la formule des probabilités totales, $p(X=k)=\sum p[(X=k)\text{ et }(Y=j)]$.
De la même manière, on trouve la loi de probabilité de Y .
$\boxed{E(Y)=\sum j\,p(Y=j)=\frac{18}{27}+2\frac{6}{27}+3\frac{2}{27}=\frac{36}{27}=\frac{4}{3}}$.

e) X et Y ne sont pas indépendantes car les probabilités ne sont pas égales aux produits des marges.

f) $\underline{\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)}$

$$E(XY)=\sum k.j.p\big[(X=k)\text{ et }(Y=j)\big]=\frac{2}{27}(1+2+3)+\frac{8}{27}(2+3)+\frac{4}{27}4=\frac{68}{27}$$

donc $\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{68}{27}-2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{68-8*9}{27}=-\frac{4}{27}}$.

Partie B

1) a) On mise 10 € et chaque boule rouge tirée rapporte 5 € ; comme X est égale au nombre de boules rouges tirées, le gain algébrique est : $\boxed{G = 5X - 10}$.

b) Le gain algébrique moyen est $\boxed{E(G)=E(5X-10)=5E(X)-10=0}$.
Comme E(G) = 0, $\boxed{\text{le jeu est équitable}}$.

2) a) On obtient un gain algébrique de 5 € quand on tire 3 boules rouges ;
$\boxed{p(G=5)=p(X=3)=\frac{8}{27}}$.

b) Lors d'une partie, la probabilité d'un gain égal à 5 € est de 8/27 ;
Les parties sont indépendantes ;
Z est le rang de la 1ère réalisation de (G = 5) ;

Donc $\boxed{Z \hookrightarrow \mathbf{G}(8/27)}$; $\boxed{Z(\Omega)=\mathbb{N}^*}$; et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $\boxed{p(Z=k)=\left(\frac{19}{27}\right)^{k-1}\frac{8}{27}}$.

$\boxed{E(Z)=\frac{27}{8}}$ et $\boxed{V(Z)=\frac{19/27}{(8/27)^2}=\frac{19*27}{64}}$.

Partie C

1) Comme dans la partie A, on effectue des tirages indépendants d'une boule puisqu'il y a remise ;

Pour chaque tirage, la probabilité de R : tirer une rouge, est de $\frac{2}{3}$

Et N compte le nombre de réalisations de r au cours des 450 tirages ;
Donc $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{B}\ (450\ ;\ 2/3)}$.

2) Comme $\begin{cases} n = 450 \geq 30 \\ np = 450.\frac{2}{3} = 300 \geq 15 \\ np(1-p)450.\frac{2}{3}.\frac{1}{3} = 100 \geq 5 \end{cases}$, On peut approcher la loi de N par la loi normale de paramètres

m = E(N) = 300 et $\sigma = \sqrt{V(N)} = 10$: avec $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{N}\ (300, 10)}$.

3) En confondant la loi de N avec la loi normale, on cherche

$p(290 \leq N \leq 310) = p\left(\frac{290-300}{10} \leq \frac{N-300}{10} \leq \frac{310-300}{10}\right) = p\left(-1 \leq \frac{N-300}{10} \leq 1\right)$ comme $\frac{N-300}{10}$

suit la loi normale centrée réduite, on cherche $\Phi(1) - \Phi(-1)$

or $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout *x* réel, donc :

$\Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(-1)] = 2\Phi(1) - 1 = 1{,}6826 - 1 = 0{,}6826$.

$$\boxed{p(290 \leq N \leq 310) = 0{,}6826}$$