

## Exercice 1

### Partie A

1) Montrons que  $P$  est inversible et déterminons son inverse par la méthode du pivot :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad \rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 11L_1 - 6L_3 \\ L_2 \leftarrow 11L_2 - 3L_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 11 & 22 & 0 & 5 & -6 & -6 \\ 0 & 11 & 0 & -3 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

↑ une réduite a ses éléments diagonaux non nuls, donc  $P$  est inversible

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 11 & 0 & 0 & 11 & -22 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & -3 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow (1/11)L_1 \\ L_2 \leftarrow (1/11)L_2 \\ L_3 \leftarrow (1/11)L_3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/11 & 8/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 1 & 1/11 & 1/11 & 1/11 \end{array} \right)$$

$$\text{donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3/11 & 8/11 & -3/11 \\ 1/11 & 1/11 & 1/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \quad MP = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 72 \\ 0 & 1 & 36 \\ 0 & -3 & 24 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$P^{-1}MP = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 72 \\ 0 & 1 & 36 \\ 0 & -3 & 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{11 \cdot 12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \cdot 12 \end{pmatrix} \text{ soit : } \boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D}.$$

Puisque  $D$  est diagonale, sa puissance  $n$ -ième est obtenue en élevant les éléments de la diagonale à la puissance  $n$  :

$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/12)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}, \text{ soit : } \boxed{D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/12)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

3)

- pour  $n = 1$

On sait que  $D = P^{-1}MP$ , d'où, en multipliant à droite par  $P^{-1}$  et à gauche par  $P$ ,  $PDP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_I M \underbrace{PP^{-1}}_I$ , et

donc :  $M = PDP^{-1}$ ; la propriété est vraie pour  $n = 1$

- si pour un entier naturel quelconque non nul  $n$ ,  $M^n = PD^nP^{-1}$ , alors, comme  $M^{n+1} = M^nM$ ,  
 $M^{n+1} = PD^n \underbrace{P^{-1}P}_I DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ; la propriété est héréditaire, et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 1, M^n = PD^nP^{-1}}.$$

4) D'où :

$$PD^n = \begin{pmatrix} 0 & 2\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 \\ 0 & \left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 \\ 0 & -3\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M^n = PD^n P^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6+16\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3+8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2-24\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$$

### Partie B

$B_n$  « Olivier choisit le jeu de ballon le jour  $n$  »,

$V_n$  « Olivier choisit la voile le jour  $n$  »

$S_n$  « Olivier choisit le ski nautique le jour  $n$  ».

1) L'énoncé donne :

le premier jour, les enfants choisissent au hasard, donc  $b_1 = v_1 = s_1 = \frac{1}{3}$ .

- chaque enfant qui a choisi le jeu de ballon un jour, le lendemain reste fidèle à ce sport avec la probabilité  $1/2$ , choisit la planche à voile avec la probabilité  $1/4$  et choisit le ski nautique avec la probabilité  $1/4$ . Donc

$$P(B_{n+1}/B_n) = \frac{1}{2}, P(V_{n+1}/B_n) = \frac{1}{4} \text{ et } P(S_{n+1}/B_n) = \frac{1}{4}$$

- chaque enfant qui a choisi la planche à voile un jour, le lendemain décide de recommencer avec la probabilité  $1/3$ , et choisit le jeu de ballon avec la probabilité  $2/3$ . Donc :

$$P(V_{n+1}/V_n) = \frac{1}{3}, P(B_{n+1}/V_n) = \frac{2}{3} \text{ et } P(S_{n+1}/V_n) = 0$$

- chaque enfant qui a choisi le ski nautique un jour, le lendemain décide de recommencer avec la probabilité  $1/4$ , choisit le jeu de ballon avec la probabilité  $1/2$  et choisit la planche à voile avec la probabilité  $1/4$ . Donc :

$$P(S_{n+1}/S_n) = \frac{1}{4}, P(B_{n+1}/S_n) = \frac{1}{2} \text{ et } P(V_{n+1}/S_n) = \frac{1}{4}$$

2) Pour  $n$  entier naturel non nul,  $\{B_n; V_n; S_n\}$  forme un système complet d'événements, et donc, formule des probabilités totales,

$$\begin{cases} P(B_{n+1}) = P(B_{n+1}/B_n) \times P(B_n) + P(B_{n+1}/V_n) \times P(V_n) + P(B_{n+1}/S_n) \times P(S_n) \\ P(V_{n+1}) = P(V_{n+1}/B_n) \times P(B_n) + P(V_{n+1}/V_n) \times P(V_n) + P(V_{n+1}/S_n) \times P(S_n) \\ P(S_{n+1}) = P(S_{n+1}/B_n) \times P(B_n) + P(S_{n+1}/V_n) \times P(V_n) + P(S_{n+1}/S_n) \times P(S_n) \end{cases}, \text{ ce qui donne :}$$

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{2}s_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{4}s_n \\ s_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + 0v_n + \frac{1}{4}s_n \end{cases}, \text{ ceci pour tout } n \text{ de } \mathcal{L}^*.$$

3) Ce système s'écrit matriciellement : 
$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ v_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ s_n \end{pmatrix}, \text{ soit : } \boxed{X_{n+1} = MX_n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathcal{L}^*.$$

4) Pour  $n=1$ , l'égalité précédente s'écrit :  $X_1 = M^0 X_1$  ; or par convention  $M^0 = I$  et  $IX_1 = X_1$  : la relation est vraie pour  $n=1$  ;

Si pour un entier naturel quelconque  $n \geq 1$ ,  $X_n = M^{n-1} X_1$ , alors, comme d'après la question précédente  $X_{n+1} = MX_n$ ,  $X_{n+1} = M \cdot M^{n-1} X_1 = M^n X_1$  ; la relation est donc héréditaire ; donc :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geq 1, X_n = M^{n-1} X_1.}$$

5) On a donc :

$$\begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ s_n \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 6 + 16 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \\ 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 3 + 8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \\ 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 2 - 24 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ et :}$$

$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{33} \left( 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 6 + 16 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{33} \left( 18 + 4 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \right) \\ v_n = \frac{1}{33} \left( 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 3 + 8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{33} \left( 9 + 2 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \right) \\ s_n = \frac{1}{33} \left( 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 2 - 24 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} + 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \right) = \frac{1}{33} \left( 6 - 6 \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \right) \end{cases}$$

$$\boxed{b_n = \frac{6}{11} + \frac{4}{33} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} ; v_n = \frac{3}{11} + \frac{2}{33} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} ; s_n = \frac{2}{11} - \frac{2}{11} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$

6) Comme  $-1 < \frac{1}{12} < 1$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \rightarrow 0$ , et donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{6}{11} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{11} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{2}{11}.}$$

## Exercice 2

On dispose d'une urne; contenu de l'urne :  $\begin{matrix} 1B \\ 3R \\ \hline 4 \text{ boules} \end{matrix}$

### Partie A

1) On tire simultanément 2 boules dans l'urne, donc un résultat est une combinaison de 2 boules prises parmi 4 ; il y a donc  $C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$  résultats possibles; les résultats sont équiprobables puisque les boules sont indiscernables, et donc il y a équiprobabilité des tirages.

Le résultat du tirage est "2 boules Rouges" quand on a tiré les 2 boules parmi les 3 rouges, donc

$$p(\text{on obtient 2 R}) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2) a) On peut obtenir 2 boules Rouges dès le 1<sup>er</sup> tirage et le n<sup>o</sup> du tirage est un entier, donc l'ensemble des valeurs prises par  $N$  est :  $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ .

b) A chaque tirage, on considère les deux issues  $S = \text{"on a obtenu 2 R"}$ , de probabilité  $p = \frac{1}{2}$ , et son contraire (ou bien : chaque tirage de 2 boules est une épreuve de Bernoulli dont le succès est  $S = \text{"on a obtenu 2 R"}$ , de probabilité  $p = \frac{1}{2}$ ) ; les tirages sont indépendants puisqu'on remet les boules dans l'urne après chaque tirage ;  $N$  est le rang du tirage où l'on obtient  $S$  pour la 1<sup>ère</sup> fois. Donc :

$$N \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p = \frac{1}{2}.$$

On a , pour tout entier naturel non nul  $k$  :  $p(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2}$ , soit :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, p(N = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

c) On sait que  $E(N) = 1/p$ , et  $V(N) = (1/p^2) - (1/p)$  soit :  $E(N) = 2$  et  $V(N) = 2$ .

d) L'expérience s'arrête au plus tard au 4<sup>ème</sup> tirage est l'événement  $(N \leq 4)$ .

$$p(N \leq 4) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}, \text{ ou } p(N \leq 4) = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (1/2)^4}{1 - (1/2)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$$

(car  $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$  pour  $q \neq 1$ ) Et donc :  $p(N \leq 4) = \frac{15}{16}$ .

### Partie B

1) Comme il y a 1 boule Blanche et 3 boules Rouges, quand on effectue des tirages successifs sans remise d'une boule de l'urne, on peut obtenir la boule blanche aux 1<sup>er</sup>, 2<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup>, ou 4<sup>ème</sup> tirage.

$$Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}.$$

2) Avec les notations de l'énoncé,  $(Y = 2) = (R_1 \cap B_2)$ , donc, avec la formule des probabilités composées,  $p(Y = 2) = p(R_1 \cap B_2) = p(R_1) \times p(B_2 / R_1)$  ;

Or  $p(R_1) = \frac{3}{4}$ , et  $p(B_2 / R_1) = \frac{1}{3}$  puisque, si on a tiré une Rouge en 1<sup>er</sup>, il reste 3 boules dans l'urne,

dont 1 Blanche, donc :  $p(Y = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ ;

3) Toujours avec la formule des probabilités composées, on trouve :

$$p(Y = 3) = p(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = p(R_1) \times p(R_2 / R_1) \times p(B_3 / R_1 \cap R_2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

et de la même manière,  $p(Y = 4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$ , et enfin  $p(Y = 1) = p(B_1) = \frac{1}{4}$

donc  $Y$  suit la loi uniforme sur  $\{1; 4\}$ , et  $E(Y) = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$ ,  $V(Y) = \frac{4^2 - 1}{12} = \frac{5}{4}$ .

4)  $Z$  est le nombre de boules rouges restant dans l'urne quand l'expérience s'arrête.

si on tire la B en 1<sup>er</sup>, il reste 3 R, donc si  $(Y = 1)$ ,  $(Z = 3)$   
 si on tire la B en 2<sup>ème</sup>, il reste 2 R, donc si  $(Y = 2)$ ,  $(Z = 2)$   
 si on tire la B en 3<sup>ème</sup>, il reste 1 R, donc si  $(Y = 3)$ ,  $(Z = 1)$   
 si on tire la B en 4<sup>ème</sup>, il reste 0 R, donc si  $(Y = 4)$ ,  $(Z = 0)$  } donc  $Z = 4 - Y$ .

ou bien :  $(Y = k)$  est l'événement "on a tiré  $(k - 1)$  boules rouges, puis 1 boule blanche". Il reste donc  $Z = 3 - (k - 1) = 4 - k$  boules rouges dans l'urne ; donc  $Z = 4 - Y$ .

Et donc  $Z(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ , et pour  $k$  de  $Z(\Omega)$ ,  $p(Z = k) = p(Y = 4 - k) = \frac{1}{4}$

$E(Z) = E(4 - Y) = 4 - E(Y)$ , donc  $E(Z) = \frac{3}{2}$ .

Et  $V(Z) = V(4 - Y) = V(-Y) = (-1)^2 V(Y)$ , donc  $V(Z) = \frac{5}{4}$ .

### Partie C

1) Comme  $X$  on s'arrête quand on obtient deux boules consécutives de la même couleur,  $X$  prend au minimum la valeur 2, et donc, puisque  $X$  prend des valeurs entières :

$$X(\Omega) = \{2; 3; 4; \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\};$$

Remarque :

comme on effectue des tirages d'une boule avec remise, à chaque tirage, la composition de l'urne est la

même, donc, pour tout  $i$  entier naturel non nul,  $p(B_i) = \frac{1}{4}$  et  $p(R_i) = \frac{3}{4}$

2)  $(X = 2)$  quand on a tiré consécutivement deux boules de la même couleur, c'est-à-dire soit deux blanches, soit deux rouges :

$$(X = 2) = (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2), \text{ ou, écrit plus simplement : } (X = 2) = (B_1 B_2) \text{ ou } (R_1 R_2);$$

les résultats des tirages sont indépendants, et  $(B_1 B_2)$  et  $(R_1 R_2)$  sont incompatibles, donc :

$$p(X = 2) = p(B_1) \times p(B_2) + p(R_1) \times p(R_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = \frac{10}{16}, \text{ soit : } p(X = 2) = \frac{5}{8}.$$

( $X = 3$ ) quand on a tiré une 1<sup>ère</sup> boule d'une couleur et les deux suivantes de l'autre couleur :

( $X = 3$ ) = ( $B_1R_2R_3$ )ou( $R_1B_2B_3$ ), donc

$$p(X = 3) = p(B_1) \times p(R_2) \times p(R_3) + p(R_1) \times p(B_2) \times p(B_3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right), \text{ soit :}$$

$$p(X = 3) = \frac{3}{16}.$$

3) De même, ( $X = 4$ ) quand on a tiré alternativement deux boules de couleurs différentes, puis deux boules de la même couleur, distincte de la couleur de la boule tirée en 2<sup>ème</sup> :

$$(X = 4) = (B_1R_2B_3B_4)\text{ou}(R_1B_2R_3R_4).$$

( $X = 2k$ ) quand on a tiré successivement, ( $k - 1$ ) fois de suite, deux boules de couleurs différentes puis les deux dernières boules de la même couleur, distincte de la couleur de la boule tirée juste avant :

( $X = 2k$ ) = [ $(B_1R_2)(B_3R_4)\dots\dots(B_{2k-3}R_{2k-2})B_{2k-1}B_{2k}$ ]ou[ $(R_1B_2)(R_3B_4)\dots\dots(R_{2k-3}B_{2k-2})R_{2k-1}R_{2k}$ ], et donc

$$p(X = 2k) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^{k-1} \left[ \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] = \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{8}\right);$$

4) De même, ( $X = 5$ ) quand on a tiré alternativement 3 boules de couleurs différentes, puis deux boules de la même couleur, distincte de la couleur de la boule tirée en 3<sup>ème</sup> :

$$(X = 5) = (B_1R_2B_3R_4R_5)\text{ou}(R_1B_2R_3B_4B_5),$$

( $X = 2k + 1$ ) quand on a tiré successivement,  $k$  fois de suite, deux boules de couleurs différentes puis une dernière boule de la même couleur que celle tirée juste avant, c'est-à-dire en  $n^\circ 2k$  :

$$(X = 2k + 1) = [(B_1R_2)(B_3R_4)\dots\dots(B_{2k-1}R_{2k})R_{2k+1}]\text{ou}[(R_1B_2)(R_3B_4)\dots\dots(R_{2k-1}B_{2k})B_{2k+1}], \text{ et donc}$$

$$p(X = 2k + 1) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^k \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right] = \left(\frac{3}{16}\right)^k.$$

$$5) \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k$$

or  $-1 < \frac{3}{16} < 1$ , donc la série géométrique  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k$  est convergente et  $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k = \frac{1}{1 - (3/16)} = \frac{16}{13}$ , donc :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) = \frac{5}{8} \times \frac{16}{13} = \frac{10}{13}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k + 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k = \frac{3}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{3}{16} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^k, \text{ et donc, avec le résultat précédent :}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k + 1) = \frac{3}{16} \times \frac{16}{13} = \frac{3}{13}.$$

$$\text{On vérifie donc } \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k + 1) = \frac{10}{13} + \frac{3}{13} = 1$$

6) Sous réserve de convergence,

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2kP(X = 2k) + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)P(X = 2k+1) ;$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = 2k) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = 2k+1) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k+1)$$

$$\text{or } \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{8} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = 2k+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^k = \frac{3}{16} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$$

$$\text{et comme } \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ si } -1 < x < 1,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1} = \frac{1}{[1-(3/16)]^2} = \left(\frac{16}{13}\right)^2,$$

$$\text{on obtient les sommes : } \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = 2k) = \frac{5}{8} \left(\frac{16}{13}\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = 2k+1) = \frac{3}{16} \left(\frac{16}{13}\right)^2, \text{ et}$$

$$E(X) = 2 \times \frac{5}{8} \left(\frac{16}{13}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{16} \left(\frac{16}{13}\right)^2 + \frac{3}{13} = \left[\frac{5}{4} + \frac{3}{8}\right] \left(\frac{16}{13}\right)^2 + \frac{3}{13} = \frac{13}{8} \times \frac{16}{13} \times \frac{16}{13} + \frac{3}{13} = \frac{32}{13} + \frac{3}{13}, \text{ soit :}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{35}{13}}$$

### Exercice 3

1)  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = (-x+2)e^x - 2$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty, \text{ donc } e^x \rightarrow +\infty \\ (-x+2) \rightarrow -\infty \end{cases}$ , donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$

2)  $g'(x) = -e^x + (-x+2)e^x = (-x+1)e^x$  ;  $g'(x)$  est donc du signe de  $(-x+1)$  puisque  $e^x > 0$  pour tout  $x$ ;

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$e-2$	$-\infty$

3)  $g$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ , donc pour tout  $x$  de  $]0; 1]$ ,  $g(x) > g(0)$ , et comme  $g(0) = 0$ ,  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $]0; 1]$ . Donc l'équation  $g(x) = 0$  n'a pas de solution dans  $]0; 1]$ .

$g$  est  $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{strictement décroissante} \end{cases}$  de  $[1; +\infty[$  vers  $g([1; +\infty[) = ]-\infty; e-2]$ , et  $]-\infty; e-2]$  contient 0

puisque  $e-2 > 0$ , donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique dans  $[1; +\infty[$  ;

donc  $\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet une solution unique non nulle}}$ .

4) En utilisant les variations de  $g$ , on obtient le signe de  $g(x)$  :

$x$	0	1	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	0	$e-2$	0	$-\infty$
$g'(x)$	0	+	0	-

$g(1) = e-2 > 0$  et  $g(2) = -2 < 0$ , donc  $g(2) < g(\alpha) < g(1)$ , donc (comme  $g$  strictement  $\searrow$  sur  $]1; 2]$ ),

$\boxed{1 < \alpha < 2}$ ;

### Partie B

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{x}{e^x - 1} = 0 \times 1$ , donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)}$ .  $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$ .

Pour étudier la dérivabilité de  $f$  en 0, on cherche la limite du taux d'accroissement de  $f$  en 0 :

$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x}{e^x - 1}$ , donc (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ , donc  $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 1}$ .

L'équation d'une tangente au point d'abscisse  $x_0$  est :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  ; d'où l'équation de (T) :

$\boxed{(T) : y = x}$ .

3) Pour  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$ .

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\left. \begin{array}{l} (x^2 / e^x) \rightarrow 0 \\ \text{th de cc} \\ 1 - e^{-x} \rightarrow 1 \end{array} \right\}$  donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$  ; et donc  $\boxed{(Ox) \text{ est asymptote à } (C) \text{ en } +\infty}$ ;

4) a) Pour  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x[(2-x)e^x - 2]}{(e^x - 1)^2} = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$ ; donc

$f'(x)$  a le même signe que  $g(x)$  car  $x > 0$  et  $(e^x - 1)^2 > 0$  dans  $]0; +\infty[$ .

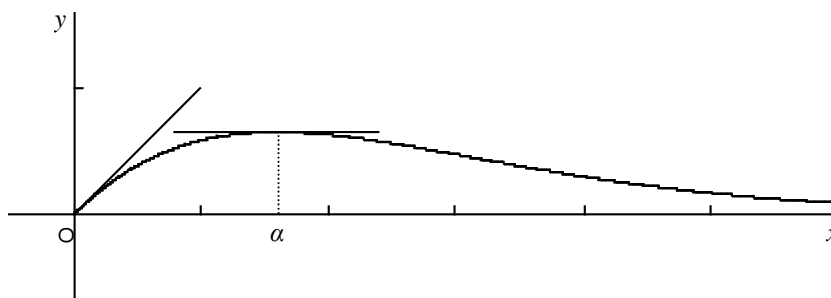
b) Ce qui donne le tableau de variations de  $f$ :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$	
$f'(x)$	1	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$		0

c)  $\alpha$  est solution de l'équation  $g(x) = 0$ , donc  $(-\alpha + 2)e^\alpha = 2$ , donc  $e^\alpha = \frac{2}{2 - \alpha}$ , donc

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2/(2-\alpha) - 1} = \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{2-2+\alpha} = \alpha(2-\alpha). \text{ D'où } f(\alpha) \approx 1,6 \times 0,4 \quad \boxed{f(\alpha) \approx 0,64}.$$

5)



(on place la tangente en 0, de coefficient directeur  $f'(0) = 1$ , le point de coordonnées  $\alpha \approx 1,6$  et  $f(\alpha) \approx 0,64$  et la tangente en ce point qui est horizontale puisque  $f'(\alpha) = 0$ ; la courbe est asymptote à  $(ox)$  en  $+\infty$ )

### Partie C

1) a) Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = 1$ , donc  $0 < u_0 \leq 1$ ; la propriété est vraie au rang 0.

Soit  $n$  un entier quelconque; on suppose que  $0 < u_n \leq 1$ .

Alors, comme  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$ ,

$$f(0) < f(u_n) \leq f(1);$$

or  $f(0) = 0$ ,  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(1) = \frac{1}{e-1} \approx \frac{1}{1,7} < 1$ , donc  $0 < u_{n+1} \leq 1$ ; la propriété est héréditaire;

donc :  $\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 1}$ .

b)  $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{1}{e-1}$ , et  $\frac{1}{e-1} \leq 1$  donc  $u_1 \leq u_0$ : la propriété est vraie au rang 1.

soit  $n$  un entier quelconque; on suppose que  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Alors, comme  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$  et comme les  $u_n$  sont dans  $[0; 1]$  d'après a),  $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ , c'est-à-dire  $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ : la propriété est héréditaire.

Donc :  $\boxed{\text{la suite est décroissante}}$ .

c) La suite est décroissante et minorée (par 0), donc :  $\boxed{\text{la suite est convergente}}$ .

2) a)  $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^x - 1} = x \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(e^x - 1 + x)}{e^x - 1} = 0$ ; dans  $]0, +\infty[$ ,  $x \neq 0$ , donc cette équation équivaut à  $e^x - x - 1 = 0$ .  $f(x) = x \Leftrightarrow e^x - x - 1 = 0$

b)  $h(x) = e^x - x - 1$

$h'(x) = e^x - 1$

dans  $]0, +\infty[$ ,  $e^x > 1$ , donc  $h'(x) > 0$ , donc  $h$  est strictement croissante .

c) Or, pour  $x = 0$ ,  $e^x - x - 1 = 0$ , donc dans  $]0, +\infty[$ ,  $h(x) > 0$ , donc

$L'équation e^x - x - 1 = 0$  n'a pas de solution dans  $]0, +\infty[$  .

3) On sait que :

- La suite  $(u_n)$  est convergente
- Les  $u_n$  sont dans  $]0;1]$
- $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$
- $f$  est continue dans  $[0;1]$

Donc la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  appartient à  $[0;1]$  et est solution de l'équation  $f(x) = x$ .

Cette équation n'a pas de solution dans  $]0;1]$  d'après la question précédente, et a donc pour seule solution 0 dans  $[0;1]$ .

Donc  $la\ limite\ \ell\ de\ la\ suite\ (u_n)\ est\ égale\ à\ 0.$