EPREUVES ESC 2004. CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHÉMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Corrigé

EXERCICE 1

On donne les matrices : $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. On montre, par la méthode du pivot de Gauss, que P est inversible, et l'on calcule P^{-1}.

Les pivots successifs sont portés en caractères gras.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$; par $\begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$, on obtient :

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$; par $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2$, on obtient :

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$; par $L_1 \longleftarrow 2L_1 + L_3$, on obtient :

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$; enfin, par $\begin{cases} L_1 \longleftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \longleftarrow -L_2 \\ L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{cases}$, on obtient :

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$;

et l'on a ainsi montré que P est inversible, avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (c'est la première colonne de P^{-1}).

2.(a). D étant diagonale, on a, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (avec la convention que $D^0 = I$, pour le cas $n = 0$).

(b) On trouve alors $D^n P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times 2^n \\ (-1)^n \\ \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix}$.

3.(a) On trouve $PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = A$.

On montre alors, par récurrence, que, pour tout entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$ (on adopte, pour cela, la convention $A^0 = I$).

Pour $n = 0$, l'énoncé est $A^0 = PD^0P^{-1}$. Il est vrai, puisqu'il se réduit à $I = I$.

Pour $n = 1$, l'énoncé a été prouvé dans la première partie de la question : $A = PDP^{-1}$.

On suppose alors que, pour un entier $n \geq 1$, quelconque, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. On en déduit que $A^{n+1} = A^nA = \left(PD^nP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^n\left(P^{-1}P\right)DP^{-1}$, et, puisque $D^n\left(P^{-1}P\right)D = D^nID = D^nD = D^{n+1}$, on obtient $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$, on voit que l'énoncé est alors encore vrai pour l'entier $n+1$, et l'on peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(b) Il n'est pas nécessaire de calculer A^n, pour exprimer $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a trouvé $D^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times 2^n \\ (-1)^n \\ \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix}$. Comme $A^n = PD^nP^{-1}$, on a

$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times 2^n \\ (-1)^n \\ \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix}$, d'où, aisément,

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times 2^n + \frac{3}{2}(-1)^n \\ -\frac{1}{2} \times 2^n + \frac{1}{2}(-1)^n \\ -\frac{1}{2} \times 2^n + \frac{1}{2}(-1)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2^n + 3(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

Partie B

Les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont définies par les conditions initiales $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 0$, et par les égalités :

$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n + 3y_n + \frac{3}{2}z_n - 3 \\ y_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 2y_n + \frac{3}{2}z_n - 1 \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 3y_n + \frac{1}{2}z_n - 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

On pose $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Les relations $\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n + 3y_n + \frac{3}{2}z_n - 3 \\ y_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 2y_n + \frac{3}{2}z_n - 1 \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 3y_n + \frac{1}{2}z_n - 3 \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $X_{n+1} = AX_n + B$ **relation (1).**

2.(a) La relation $U = AU + B$ s'écrit aussi $U - AU = B$, ce qui équivaut à $(I - A)U = B$.

(b) On a $I - A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A(I - A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I$.

Multipliant membre à membre la relation $(I - A)U = B$, à gauche par A, on obtient $A(I - A)U = AB$, d'où $-2IU = AB$, c'est-à-dire, puisque $IU = U$, $-2U = AB$.

Puisque $-2U = AB$, on a $U = -\dfrac{1}{2}AB$. On trouve $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3.(a) On a $\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = AX_n + B \\ U = AU + B \end{array} \right.$. Par soustraction membre à membre, on obtient $X_{n+1} - U = A(X_n - U)$.

(b) On montre, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $\quad X_n - U = A^n(X_0 - U)$.
La formule est évidente pour $n = 0$: $X_0 - U = A^0\,(X_0 - U)$, puisque $A^0 = I$.
Si l'on suppose que, pour un entier $n \geq 0$, quelconque, on a $X_n - U = A^n(X_0 - U)$, alors $X_{n+1} - U = A(X_n - U) = A \times A^n(X_0 - U) = A^{n+1}\,(X_0 - U)$, la formule est donc encore vraie pour l'entier $n + 1$, et ceci permet de conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n - U = A^n(X_0 - U)$.

4. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(x_0 = 1, y_0 = 1$ et $z_0 = 0)$. On en déduit que $X_0 - U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans la **partie A**, on a trouvé $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -2^n + 3\,(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \end{pmatrix}$. Ainsi, $X_n - U = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -2^n + 3\,(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \end{pmatrix}$;

Il en résulte que $X_n = U + A^n(X_0 - U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -2^n + 3\,(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \times 2^n + \frac{3}{2}\,(-1)^n \\ 1 - \frac{1}{2} \times 2^n + \frac{1}{2}\,(-1)^n \\ -\frac{1}{2} \times 2^n + \frac{1}{2}\,(-1)^n \end{pmatrix}$,

et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = -\dfrac{1}{2} \times 2^n + \dfrac{3}{2}\,(-1)^n \\ y_n = 1 - \dfrac{1}{2} \times 2^n + \dfrac{1}{2}\,(-1)^n \\ z_n = -\dfrac{1}{2} \times 2^n + \dfrac{1}{2}\,(-1)^n \end{array} \right.$$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $I\!R$ par : $\left\{ \begin{array}{l} f\,(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ f\,(t) = \dfrac{1}{8} \text{ si } 0 \leq t \leq 4 \\ f\,(t) = \dfrac{2}{t^2} \text{ si } t > 4 \end{array} \right.$

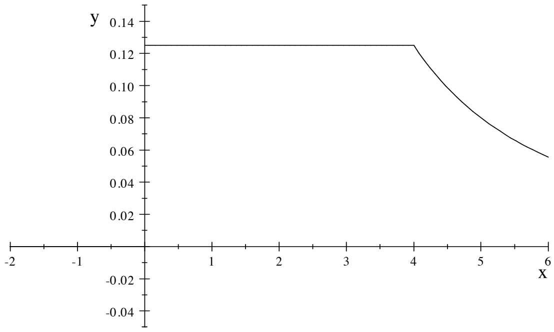
1. (a) f est nulle sur $]-\infty; 0[$ et sur $]4; +\infty[$, et positive sur $[0; 4]$, donc positive ou nulle sur $I\!R$.

(b) On a $\lim\limits_{4^-} f = \dfrac{1}{8} = f\,(4)$ (f est continue à gauche de 4) et $\lim\limits_{4^+} f = \lim\limits_{t \to 4^+} \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{1}{8}$, donc $\lim\limits_{4} f = f\,(4)$, f est donc continue en $t = 4$.

(c) On a $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2}{t^2} = 0$.

(d) Pour $t > 4$, $f\,(t) = \dfrac{2}{t^2}$, f est donc dérivable sur $]4; +\infty[$, et, pour tout $t \in\,]4; +\infty[$, $f'\,(t) = -\dfrac{4}{t^3} < 0$ pour tout $t > 4$.

(e) $f\,(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & t < 0 \\ \dfrac{1}{8} & si & 0 \leq t < 4 \\ \dfrac{2}{t^2} & si & t > 4 \end{array} \right.$



allure de la courbe de f

2.(a) Pour $x > 4$, on a $\displaystyle\int_4^x f(t)\ dt = \int_4^x \frac{2}{t^2}\ dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_4^x = \frac{1}{2} - \frac{2}{x}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_4^x f(t)\ dt\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.

b. Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, il en va de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$, avec, de plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^4 f(t)\ dt + \int_4^{+\infty} f(t)\ dt$. Mais $\displaystyle\int_0^4 f(t)\ dt = \int_0^4 \frac{1}{8} dt = \frac{1}{2}$, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1$.

3.(a) Puisque f est nulle sur $]-\infty;0[$, on a, pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$. On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)\ dt\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1$.

(b) *Remarque :* la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, sauf en $t = 0$, et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$, F est donc bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X, admettant f pour densité de probabilité.

L'existence de l'espérance de X est équivalente à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ dt$. Cette intégrale est convergente en $-\infty$, puisque f est nulle sur $]-\infty;0[$. Il s'agit donc d'examiner la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt$, ce qui revient à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_4^{+\infty} t\,f(t)\ dt$. Soit donc $x > 4$. On a : $\displaystyle\int_4^x t\,f(t)\ dt = \int_4^x t \times \frac{2}{t^2}\ dt = 2\int_4^x \frac{dt}{t} = 2\left[\ln t\right]_4^x = 2(\ln x - \ln 4)$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_4^x t\,f(t)\ dt\right) = \lim_{x\to+\infty} 2(\ln x - \ln 4) = +\infty$, puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ est donc divergente, et X n'a pas d'espérance.

(c) On a $P(X > 4) = \displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$ (calculé plus haut).

De même, $P(3 < X \leq 4) = \displaystyle\int_3^4 f(t)\ dt = \int_3^4 \frac{1}{8}\ dt = \frac{1}{8}$.

Enfin, $P_{(X>4)}(X \leq 5) = \dfrac{P((X \leq 5) \cap (X > 4))}{P(X > 4)} = \dfrac{P(4 < X \leq 5)}{P(X > 4)}$. Comme $P(4 < X \leq 5) = \displaystyle\int_4^5 f(t)\ dt = \int_4^5 \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t}\right]_4^5 = \frac{1}{10}$, on a $P_{(X>4)}(X \leq 5) = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{4}{5}$.

(d) On a $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt = 1 - F(4)$. Puisque $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt = \frac{1}{2}$, On a $F(4) = \dfrac{1}{2}$. F étant, comme fonction de

répartition, croissante sur $]0;+\infty[$, la solution cherchée se trouve dans $]4;+\infty[$.
Or, pour $x>4$, $F(x)=F(4)+\int_4^x f(t)\ dt=\frac{1}{2}+\int_4^x \frac{2}{t^2}dt=\frac{1}{2}+\left[-\frac{2}{t}\right]_4^x=1-\frac{2}{x}$, l'équation $F(x)=\frac{3}{4}$ peut donc s'écrire $1-\frac{2}{x}=\frac{3}{4}$, d'où, aisément $x=8$.

EXERCICE 3

Partie A : Etude de la loi de X.

1. Clairement $X(\Omega)=\{0,1,...,N\}$.

2. Dire que l'événement $(X=0)$ est réalisé, c'est dire que les N lancers ont fourni FACE. Ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{2^N}$. Ainsi, $P(X=0)=\frac{1}{2^N}$.

3. Dire que l'événement $(X=k)$ est réalisé, c'est dire que les $k-1$ premiers lancers ont fourni FACE, le suivant ayant fourni PILE. La probabilité d'obtenir, lors d'un lancer un PILE étant égale à $\frac{1}{2}$ (pièce équilibrée), et les lancers étant indépendants, on a, pour tout entier naturel k de $\{1,...,N\}$ $P(X=k)=\frac{1}{2^k}$.

Partie B : Calcul de l'espérance mathématique de la variable X.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=2u_n+n-1 \end{cases}$$

1. (a) $u_1=2u_0+0-1=1$, $u_2=2u_1+1-1=2$, $u_3=2u_2+2-1=5$.

(b) On montre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geq 1$.
L'énoncé est vrai pour $n=0$, puisque $u_0=0$. Si l'on suppose que, pour un entier $n\geq 0$, quelconque, $u_n\geq 1$, alors $u_{n+1}\geq 2\times 1+n-1=n+1\geq 1$, l'énoncé est donc encore vrai pour l'entier $n+1$, et ceci achève de prouver qu'il est vrai pour tout entier $n\geq 0$.

(c) D'une part, on a $u_0=1\geq 1$. Si $n\geq 0$, on a $u_n\geq 1$, d'où $2u_n-1\geq 1$, donc $u_{n+1}\geq n+1$, et, en définitive, pour tout entier $k\geq 0$, $u_k\geq k$.
Remarque : il ne s'agit *pas* d'une preuve par récurrence.
Puisque, pour tout $n\geq 0$, $u_n\geq n$, et $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

(d) Pour tout entier $n\geq 0$, $u_{n+1}-u_n=u_n+n-1\geq 0$, car $u_n-1\geq 0$ et $n\geq 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

2. Soit $v_n=n+u_n$.

(a) On a $v_{n+1}=(n+1)+u_n=(n+1)+2u_n+n-1=2(u_n+n)=2v_n$.

(b) Puisque, pour tout entier n, $v_{n+1}=2v_n$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
On en déduit que, pour tout n, $v_n=2^n v_0=2^n$, car $v_0=u_0=1$.

(c) Les relations $v_n=2^n$, et $v_n=u_n+n$ entraînent $u_n=2^n-n$.

3.(a) On a $u_{n+1}-1=2u_n-2+n$, d'où, divisant membre à membre par 2^n, $\frac{u_{n+1}-1}{2^n}=\frac{2(u_n-1)}{2^n}+\frac{n}{2^n}$, et, simplifiant,

$$\frac{u_{n+1}-1}{2^n}=\frac{u_n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$$

(b) *Remarque* : pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^k}$, car le terme correspondant à $k = 0$ est nul.

On montre par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

L'énoncé est vrai pour $n = 1$, puisque $\displaystyle\frac{u_1 - 1}{2^0} = 0$, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1-1} \frac{k}{2^k} = 0$.

On suppose alors que, pour un entier $n \geq 1$, quelconque, on a $\displaystyle\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

On en déduit alors, utilisant **3.(a)** que :

$\displaystyle\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \frac{n}{2^n}$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \frac{n}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$, donc $\displaystyle\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}$. On voit que la formule est encore vraie pour l'entier $n + 1$, et l'on peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$$

(c) On a trouvé que $u_n = 2^n - n$. Reportant dans **3.(b)**, il vient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}}$. Mais

$\displaystyle\frac{2^n - n - 1}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$. Finalement,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

(d) On a $X(\Omega) = [\![0, N]\!]$, $P(X = 0) = \dfrac{1}{2^N}$, et, pour tout élément k de $[\![1, N]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

Donc $\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{N} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k}$. Faisant $n = N + 1$ dans **(c)** (c'est-à-dire $n - 1 = N$), on obtient

$$E(X) = 2 - \frac{N+2}{2^N}$$

Remarque : la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{N+2}{2^N}$ est aisée à prouver par récurrence. L'ayant vérifiée pour $N = 1$ ($\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2}$), et l'ayant supposée vraie pour un entier $N \geq 1$, quelconque, on a

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^k} + \frac{N+1}{2^{N+1}} = 2 - \frac{N+2}{2^N} + \frac{N+1}{2^{N+1}}$.