EXERCICE 1

1.a. Montrons que P est inversible et déterminons P^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois termes de la matrice triangulaire ci-dessus étant non nuls, **P est une matrice inversible** ; poursuivons les transformations :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc la matrice inverse de P est la matrice :

$$\mathbf{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

b. Les calculs donnent :

$$AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 16 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{= D}$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

<u>Première étape</u> :

P_1 est vraie, car on a, d'après la question précédente, on a l'équivalence :

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

Deuxième étape :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n non nul, c'est à dire :

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

On a, par règle de calcul sur les puissances de matrices et par hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie ; d'après le principe de récurrence, on peut conclure que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbf{A^n = PD^nP^{-1}}$$

d. On a bien :

$$\mathbf{P^{-1}}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & -1 & 2\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix}\mathbf{\frac{1}{6}}\\\mathbf{-\frac{1}{6}}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

D est une matrice diagonale, donc D^n s'obtient en élevant les termes de la diagonale de D à la puissance n, ce qui donne, pour tout entier naturel n non nul :

$$D^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a, d'après la question **c.** et ce qui précède :

$$\mathbf{A^n}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\4 & -2 & 0\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\0\end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix}\mathbf{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\\\mathbf{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\\\mathbf{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}\end{pmatrix}$$

2. L'urne bleue peut contenir à l'issue du premier échange deux jetons marqués 0, un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1, ou deux jetons marqués 1, donc **les valeurs possibles de** Z_1 **sont 0, 1 et 2**.

Z_1 vaut 0 si on a extrait le jeton 1 de l'urne bleue et le jeton 0 de l'urne rouge, avant de procéder à l'échange, donc :

$$p(Z_1 = 0) = \frac{1}{2}\text{x}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Z_1 vaut 2 si on a extrait le jeton 0 de l'urne bleue et le jeton 1 de l'urne rouge, avant de procéder à l'échange, donc :

$$p(Z_1 = 2) = \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Enfin :

$$p(Z_1 = 1) = 1 - p(Z_1 = 0) - p(Z_1 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

La loi de probabilité de Z_1 est donc donnée par le tableau suivant :

$\mathbf{z_i}$	**0**	**1**	**2**
$\mathbf{p(Z_1 = z_i)}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$

3.a. Soit n un entier naturel non nul ; lorsque $Z_n = 0$ $(\text{resp. } Z_n = 2)$, l'urne bleue contient deux jetons marqués 0 (resp. 1) après le n-ième échange ; après l'échange suivant, elle ne pourra pas contenir deux jetons marqués 0, donc on a les probabilités conditionnelles :

$$\mathbf{p_{(Z_n=0)}(Z_{n+1} = 0) = p_{(Z_n=2)}(Z_{n+1} = 0) = 0}$$

Lorsque $Z_n = 1$, l'urne bleue contient un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1 après le n-ième échange ; après l'échange suivant, elle contiendra deux jetons marqués 0 si on a extrait le jeton 1 de l'urne bleue et le jeton 0 de l'urne rouge, avant de procéder à cet échange donc on a la probabilité conditionnelle :

$$\mathbf{p_{(Z_n=1)}(Z_{n+1} = 0)} = \frac{1}{2} \text{x} \frac{1}{2} \mathbf{= \frac{1}{4}}$$

b. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{(Z_n = 0), (Z_n = 1), (Z_n = 2)\}$ et en utilisant les probabilités conditionnelles obtenues à la question **3.a.**, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{p_{n+1}} &= p(Z_{n+1} = 0) \\
&= p_{(Z_n=0)}(Z_{n+1} = 0)p(Z_n = 0) + p_{(Z_n=1)}(Z_{n+1} = 0)p(Z_n = 1) + p_{(Z_n=2)}(Z_{n+1} = 0)p(Z_n = 2) \\
&= 0p_n + \frac{1}{4}q_n + 0r_n \\
&\mathbf{= \frac{1}{4}q_n}
\end{aligned}$$

c. On a de même, toujours avec la formule des probabilités conditionnelles appliquée au même système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
\mathbf{q_{n+1}} &= p(Z_{n+1} = 1) \\
&= p_{(Z_n=0)}(Z_{n+1} = 1)p(Z_n = 0) + p_{(Z_n=1)}(Z_{n+1} = 1)p(Z_n = 1) + p_{(Z_n=2)}(Z_{n+1} = 1)p(Z_n = 2) \\
&\mathbf{= p_n + \frac{1}{2}q_n + r_n}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r_{n+1}} &= p(Z_{n+1} = 2) \\
&= p_{(Z_n=0)}(Z_{n+1} = 2)p(Z_n = 0) + p_{(Z_n=1)}(Z_{n+1} = 2)p(Z_n = 1) + p_{(Z_n=2)}(Z_{n+1} = 2)p(Z_n = 2) \\
&= 0p_n + \frac{1}{4}q_n + 0r_n \\
&\mathbf{= \frac{1}{4}q_n}
\end{aligned}$$

4.a. On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathbf{U_{n+1}} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}q_n \\ p_n + \frac{1}{2}q_n + r_n \\ \frac{1}{4}q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \mathbf{= AU_n}$$

Cette relation est valable pour $\mathbf{n=0}$, car d'après la question **2.** , on a :

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = AU_0$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel non nul n, par :

$$U_n = A^n U_0$$

<u>Première étape</u> :

P_1 est vraie, car on a, d'après la question **4.a.** :

$$U_1 = AU_0$$

<u>Deuxième étape</u> :

On suppose P_n vraie pour une valeur de l'entier naturel n non nul, c'est-à-dire :

$$U_n = A^n U_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$U_{n+1} = A^{n+1} U_0$$

On a, d'après la question **4.a.** et par hypothèse de récurrence :

$$U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie ; d'après le principe de récurrence, on peut conclure que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\mathbf{U_n = A^n U_0}$$

c. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$U_n = A^n U_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{p_n} = \mathbf{\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \\ \mathbf{q_n} = \mathbf{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \\ \mathbf{r_n} = \mathbf{\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n} \end{cases}$$

On a :

$$\left|-\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Donc :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{6}} \text{ et } \mathbf{\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{2}{3}}$$

5. Par définition de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{Z_n}) = p(Z_n = 0)x0 + p(Z_n = 1)x1 + p(Z_n = 2)x2 = q_n + 2r_n$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \mathbf{= 1}$$

Donc :

$$\lim_{\mathbf{n \to +\infty}} \mathbf{E}(\mathbf{Z_n}) \mathbf{= 1}$$

<u>EXERCICE 2</u>

1.a. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout réel t :

$$\left(e^t > 0 \text{ et } e^{-t} > 0\right) \Rightarrow e^t + 2 + e^{-t} > 0 \Rightarrow f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}} > 0$$

Ainsi **f est-elle positive sur R**.

f est continue sur R comme somme, composée et inverse de fonctions qui le sont.

f est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et qu'on a, pour tout réel t :

$$f(-t) = \frac{1}{e^{-t} + 2 + e^t} = f(t)$$

b. On a :

$$\left(\lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty \text{ et } \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty\right) \Rightarrow \lim_{\mathbf{t \to +\infty}} \mathbf{f}(\mathbf{t}) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}} \mathbf{= 0}$$

c. On a, pour tout réel t :

$$\mathbf{f}'(\mathbf{t}) = -\frac{e^t - e^{-t}}{\left(e^t + 2 + e^{-t}\right)^2} \mathbf{=} \frac{\mathbf{e^{-t} - e^t}}{\left(\mathbf{e^t + 2 + e^{-t}}\right)^2}$$

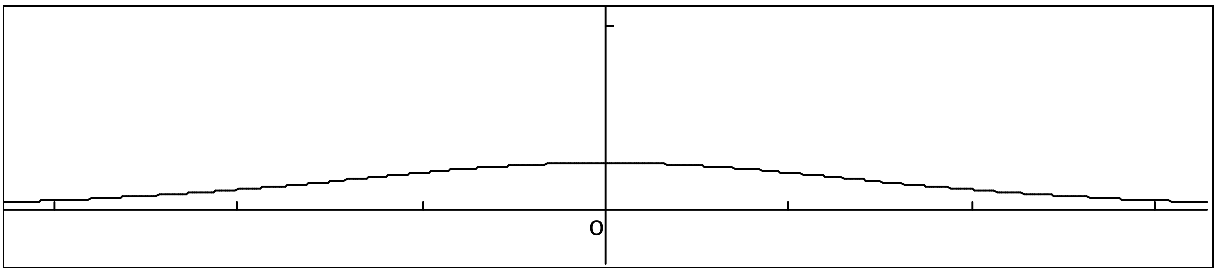
$f'(t)$ est du signe de $e^{-t} - e^t$ sur $\mathbb{R}$, car $\left(e^t + 2 + e^{-t}\right)^2$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$; on a :

$$e^{-t} - e^t > 0 \Leftrightarrow e^{-t} > e^t \Leftrightarrow -t > t \Leftrightarrow 2t > 0 \Leftrightarrow t < 0$$

Ceci permet de dresser le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		+	0	-	
f	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

d. L'allure de la courbe représentative (C) de f est la suivante :



2.a. On a, pour tout réel t :

$$\mathbf{f(t)} = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}} = \frac{1}{e^t + 2 + \frac{1}{e^t}} = \frac{1}{\frac{e^{2t} + 2e^t + 1}{e^t}} = \frac{e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1} \mathbf{=} \frac{\mathbf{e^t}}{\left(\mathbf{e^t + 1}\right)^2}$$

b. On a pour tous réels a et b tels que $a \leq b$:

$$\mathbf{J(a,b)} = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \frac{e^t}{\left(e^t+1\right)^2}\,dt = \int_a^b \frac{\left(e^t+1\right)'}{\left(e^t+1\right)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{e^t+1}\right]_a^b \mathbf{=} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+e^a}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+e^b}}$$

c. On a, d'après la question **2.b.** :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} J(0,x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+e^0} - \frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc **l'intégrale impropre** $\mathbf{I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt}$ **converge** et on a :

$$\mathbf{I = \frac{1}{2}}$$

De même, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} J(x,0) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^0}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc **l'intégrale impropre** $\mathbf{J = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}$ **converge** et on a :

$$\mathbf{J = \frac{1}{2}}$$

On en déduit que **l'intégrale impropre** $\mathbf{K = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}$ **converge** car on a :

$$\mathbf{K} = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = I + J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{= 1}$$

3.a. On a, d'après la question **2.b.**, pour tout réel x :

$$\mathbf{F(x)} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty} J(a,x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{1+e^x}\right) = 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-1}{1+e^x} \mathbf{=} \frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{e^x+1}}$$

b. X étant une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est F, on a :

$$\mathbf{p(X \leq ln2)} = F(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+1} \mathbf{= \frac{2}{3}}$$

Et :

$$\mathbf{p(-ln2 < X \leq ln2)} = F(\ln 2) - F(-\ln 2) = \frac{2}{3} - \frac{e^{-\ln 2}}{e^{-\ln 2}+1} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \mathbf{= \frac{1}{3}}$$

On a également :

$$\mathbf{p_{(X>ln2)}(X \leq ln3)} = \frac{p\left(\left(X > \ln 2\right) \cap \left(X \leq \ln 3\right)\right)}{p\left(X > \ln 2\right)} = \frac{p\left(\ln 2 < X \leq \ln 3\right)}{1 - p\left(X \leq \ln 2\right)}$$

$$= \frac{F(\ln 3) - F(\ln 2)}{1 - F(\ln 2)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \mathbf{= \frac{1}{4}}$$

c. On a, pour tout réel x :

$$\mathbf{F(-x)} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}\left(1+e^{x}\right)} = \frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}} = 1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}} = \mathbf{1-F(x)}$$

On en déduit que, α étant un réel positif, on a :

$$p(-\alpha < X \le \alpha) = F(\alpha) - F(-\alpha) = F(\alpha) - \left(1-F(\alpha)\right) = 2F(\alpha) - 1$$

Donc :

$$p(-\alpha < X \le \alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2F(\alpha) - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(\alpha) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow e^{\alpha} = 3 \Leftrightarrow \alpha = \ln 3$$

Ainsi **$\ln 3$ est l'unique réel positif α tel que $p(-\alpha < X \le \alpha) = \frac{1}{2}$**.

EXERCICE 3

1.a. X, qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{3}{4}$, prend les valeurs 0,1 et 2, donc on a :

$$\mathbf{p(X \ge 1) + p(X \ge 2)} = 1 - p(X=0) + p(X=2) = 1 - \binom{2}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\left(1-\frac{3}{4}\right)^{2} + \binom{2}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)^{0}$$

$$= 1 - \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

b. L'espérance de X est :

$$\mathbf{E(X)} = np = 2x\frac{3}{4} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

L'égalité $(\mathbf{R})$ est donc vérifiée car, d'après la question précédente, il vient :

$$E(X) = p(X \ge 1) + p(X \ge 2) = \sum_{k=1}^{2} p(X \ge k)$$

2.a. $X(\Omega)$ étant inclus dans l'ensemble $\{0,1,\dots,n\}$, l'événement $(X \ge k)$, pour tout entier naturel k appartenant à l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ est la réunion disjointe des événements $(X = k)$, $(X = k+1),\dots,$ $(X = n)$; on en déduit que :

$$p(X \ge k) = p(X = k) + p(X = k+1) + \cdots + p(X = n)$$

b. Ecrivons l'une en dessous de l'autre les égalités obtenues à la question précédente, k prenant les valeurs 1, 2, …, n ; il vient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} p(X \ge 1) & = & p(X=1) & + & p(X=2) & + & \cdots & + & p(X=n-1) & + & p(X=n) \\ p(X \ge 2) & = & & & p(X=2) & + & & + & p(X=n-1) & + & p(X=n) \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ p(X \ge n-1) & = & & & & & & & p(X=n-1) & + & p(X=n) \\ p(X \ge n) & = & & & & & & & & & p(X=n) \end{array}\right.$$

En sommant colonne par colonne ces n égalités, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} p(X \ge k) = p(X=1) + 2p(X=2) + \cdots + +np(X=n) = \sum_{k=1}^{n} kp(X=k) = E(X)$$

L'égalité $(\mathbf{R})$ est donc vérifiée.

3.a. Le jeu vidéo étant constitué de n niveaux, et le commencement d'un niveau supposant la réussite de tous les niveaux précédents, on a :

$$\mathbf{X(\Omega)=\{0,1,\ldots,n\}}$$

b. Pour tout entier naturel k de $\{1,\ldots,n\}$, l'événement $(X \geq k)$ est réalisé si et seulement si les événements N_1, $N_2,\ldots,N_k$ le sont ; on a donc :

$$(X \geq k) = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k$$

On en déduit, en utilisant la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbf{p(X \geq k)} = p(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k) = p(N_1)p_{N_1}(N_2)\ldots p_{N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_{k-1}}(N_k) = \underbrace{\frac{2}{3}\mathrm{x}\cdots\mathrm{x}\frac{2}{3}}_{\text{k fois}} \mathbf{=\left(\frac{2}{3}\right)^k}$$

c. D'après la formule $(\mathbf{R})$, le résultat de la question précédente et la formule de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, on obtient :

$$\mathbf{E(X)} = \sum_{k=1}^{n} p(X \geq k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \mathbf{= 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$