ESC T 2 006. Corrigé

EXERCICE 1

Soient les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.a. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & 13 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, et l'on vérifie qu'on a bien $A^2 = 3I - 2A$.

Cette dernière relation entraîne $\frac{1}{3}\left(A^2 + 2A\right) = I$, d'où $\frac{1}{3}(A + 2I) \times A = I$. On en déduit que A est inversible, avec

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

b. On trouve $AH = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & -9 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, et l'on constate que $AH = -3H$.

c. On trouve $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, et l'on voit que $A - I = 2H$, d'où $A = I + 2H$.

2. On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} b_0 = 0 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ b_{n+1} = -3b_n + 2 \end{cases}$

a. On montre, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $A^n = I + b_n H$.
Pour $n = 0$, l'énoncé s'écrit $A^0 = I + b_0 H$. Puisque $b_0 = 0$, l'énoncé est vrai, en prenant la convention $A^0 = 0$.
On suppose ensuite que, pour un entier $n \geq 0$, quelconque, $A^n = I + b_n H$. On en déduit que $A^{n+1} = A \times A^n = A \times (I + b_n H)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. Donc $A^{n+1} = A + b_n AH$. Comme, par **1.b.**, on a $AH = -3H$, et, par **1.c.**, $A = I + 2H$, il vient $A^{n+1} = (I + 2H) - 3b_n H = I + (-3b_n + 2) H$, c'est-à-dire, par définition de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A^{n+1} = I + b_{n+1}H$, la formule est donc encore vraie pour l'entier $n + 1$.
On peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = I + b_n H$.

b. Il résulte de **a.** que $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = (I + b_n H)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + b_n H \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Un calcul immédiat fournit $H\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, et donc $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$$

c. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Le point fixe α, défini par la relation $\alpha = -3\alpha + 2$ est $\alpha = \frac{1}{2}$.
On a : $\begin{cases} b_{n+1} = -3b_n + 2 \\ \alpha = -3\alpha + 2 \end{cases}$, d'où, par soustraction membre à membre, $b_{n+1} - \alpha = -3(b_n - \alpha)$, la suite $(b_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique, de raison -3. Donc, pour tout entier $n \geq 0$, $b_n - \alpha = (-3)^n (b_0 - \alpha)$; puisque $\alpha = \frac{1}{2}$, et $b_0 = 0$, on a $b_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(-3)^n$, d'où $b_n = \frac{1}{2}(1 - (-3)^n)$.
On a alors $3b_n + 3 = \frac{3}{2}(1 - (-3)^n) + 3 = \frac{3}{2}(3 - (-3)^n)$, et
$b_n + 3 = \frac{1}{2}(1 - (-3)^n) + 3 = \frac{1}{2}(7 - (-3)^n)$.

Ainsi, $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3}{2}\left(3 - (-3)^n\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(7 - (-3)^n\right) \end{pmatrix}$

On considère maintenant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 3 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 6 - 5u_n + 6v_n \quad \text{et } v_{n+1} = 2 - 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

3.a. On vérifie que, $A \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 - 5u_n + 6v_n \\ 2 - 2u_n + 3v_n \end{pmatrix}$. Puisque $u_{n+1} = 6 - 5u_n + 6v_n$ et $v_{n+1} = 2 - 2u_n + 3v_n$, on a $A \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $X_{n+1} = AX_n$.

b. On montre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.
La formule est vraie pour $n = 0$: $X_0 = A^0 X_0$, avec, toujours, la convention $A^0 = I$.
Si l'on suppose que, pour un entier $n \geq 0$, quelconque, on a $X_n = A^n X_0$, alors $A^{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_n$, la formule est donc encore vraie pour l'entier $n + 1$, et l'on peut ainsi conclure que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c. On a $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc $X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. D'après **2.b.** et **2.c.**, on a donc $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}\left(3 - (-3)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(7 - (-3)^n\right) \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

a. f est nulle sur $]-\infty; 1[$, et sur $]A; +\infty[$; comme, pour tout $t \in [1; A]$, $f(t) = \dfrac{1}{t \ln A} > 0$, on a, pour tout réel t, $f(t) \geq 0$.

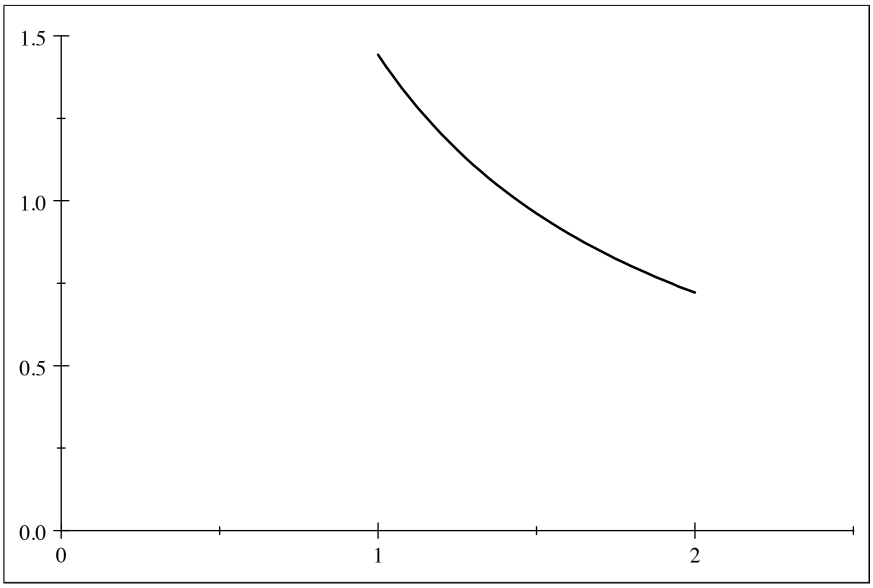
b. f étant nulle sur $]-\infty; 1[$, et sur $]A; +\infty[$, on a, pour tout $t \in]-\infty; 1[\cup]A; +\infty[$, $f'(t) = 0$. Puisque, pour tout élément t de $]1; A[$, $f(t) = \dfrac{1}{t \ln A}$, on a $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2 \ln A}$.

En résumé, $f'(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t^2 \ln A} & \text{si} \quad t \in]1; A[\\ 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty; 1[\cup]A; +\infty[\end{cases}$

On voit que, pour tout élément t de $]1; A[$, $f'(t) < 0$, f est donc (strictement) décroissante sur $]1; A[$.

N.B.: en fait, il n'est pas nécessaire de recourir au calcul de la dérivée pour parvenir à cette conclusion. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$, donc sur $]1; A[$. Comme $\ln A > 0$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t \ln A}$ est également décroissante sur $]1; A[$.

c. *Allure de la courbe d'équation* $y = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{t \times \ln 2} & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < t \end{cases}$



2.a. Soit $x < 1$. f étant nulle sur $]-\infty; x[$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = 0$.

b. Soit x tel que $1 \leq x \leq A$. f étant nulle sur $]-\infty; 1[$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{1}^{x} f(t)\ dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t \ln A}\ dt = \left[\frac{\ln t}{\ln A}\right]_1^x = \frac{\ln x}{\ln A}$.
En particulier, $F(A) = 1$.

c. Pour $x > A$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{A} f(t)\ dt + \int_{A}^{x} f(t)\ dt$. F étant nulle sur $]A; +\infty[$, on a $\int_{A}^{x} f(t)\ dt = 0$, tandis que $\int_{-\infty}^{A} f(t)\ dt = F(A) = 1$, donc, pour tout $x > A$, $F(x) = 1$.

On suppose dans toute la suite que X suit une **loi de Benford de paramètre** 10.

Ainsi, $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t \ln 10} & \text{si } 1 \leq t \leq 10 \\ 0 & \text{si } t < 1 \text{ ou } t > 10 \end{cases}$, et $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{\ln 10} & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$

3.a. Puisque f est nulle en dehors de $[1; 10]$, X admet une espérance, et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_{1}^{10} tf(t)\ dt$.
Donc $E(X) = \int_{1}^{10} t \times \frac{1}{t \ln 10}\ dt = \frac{1}{\ln 10} \int_{1}^{10} dt = \frac{9}{\ln 10}$.

b. On a $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{\ln b}{\ln 10} - \frac{\ln a}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \ln \frac{b}{a}$.
D'autre part, $P(ac < X \leq bc) = F(bc) - F(ac) = \frac{1}{\ln 10} \ln \frac{bc}{ac} = \frac{1}{\ln 10} \ln \frac{b}{a}$, et l'on voit que, en effet, $P(ac < X \leq bc) = P(a < X \leq b)$.

La loi de Benford est ainsi invariante par changement d'échelle.

4.a. Soit $y < 1$. Puisque $Y = X^2$, l'événement $(X > 1)$ *entraîne* l'événement $(Y > 1)$, et donc aussi l'événement $(Y > y)$. L'événement $(Y \leq y)$ *entraîne* donc l'événement $(X \leq 1)$. Il en résulte que $0 \leq P(Y \leq y) \leq P(X \leq 1)$. Comme $P(X \leq 1) = 0$, ceci entraîne $P(Y \leq y) = 0$.

N.B.: on pouvait aussi distinguer les cas $y < 0$, et $0 \leq y < 1$. Lorsque $y < 0$, puisque $Y = X^2$, on a $(Y \leq y) = \emptyset$. Lorsque $0 \leq y < 1$, on a $(Y \leq y) = \left(X \leq \sqrt{y}\right) = \emptyset$, car $\left(X \leq \sqrt{y}\right) \subset (X \leq 1) = \emptyset$. Dans les deux cas, $(Y \leq y) = \emptyset$, donc $P(Y \leq y) = 0$.

b. Soit $y > 100$. On a $(Y \leq y) = \left(X \leq \sqrt{y}\right)$, donc $P(Y \leq y) = P\left(X \leq \sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y}\right) = 1$, car, pour $y > 100$, on a $\sqrt{y} > 10$.

c. On a $(Y \leq 64) = \left(X^2 \leq 64\right) = (-8 \leq X \leq 8) = (X \leq 8)$, donc $P(Y \leq 64) = P(X \leq 8) = \dfrac{\ln 8}{\ln 10}$. Comme $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$, il vient $P(Y \leq 64) = P(X \leq 8) = \dfrac{3\ln 2}{\ln 10}$.

d. Plus généralement, soit y un réel appartenant à $[1; 100]$.
On a $(Y \leq y) = \left(X \leq \sqrt{y}\right)$, d'où $P(Y \leq y) = F\left(\sqrt{y}\right) = \dfrac{\ln\sqrt{y}}{\ln 10}$. Comme $\ln\sqrt{y} = \dfrac{1}{2}\ln y$, il vient $P(Y \leq y) = \dfrac{\ln y}{2\ln 10}$.

e. Soit G la fonction définie sur $I\!R$ par $G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 1 \\ \dfrac{\ln y}{2\ln 10} & \text{si} \quad 1 \leq y \leq 100 \\ 1 & \text{si} \quad y > 1 \end{cases}$. G est alors la fonction de répartition de Y. G est continue sur $I\!R$, dérivable sur $I\!R$, sauf peut-être en 1 et en 100. De plus, $G'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 1 \\ \dfrac{1}{2y\ln 10} & \text{si} \quad 1 < y < 100 \\ 0 & \text{si} \quad y > 1 \end{cases}$. On remarque que $2\ln 10 = \ln 100$. Posant alors $g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 1 \\ \dfrac{1}{y\ln 100} & \text{si} \quad 1 \leq y \leq 100 \\ 0 & \text{si} \quad y > 1 \end{cases}$, on voit que, pour tout $y \in I\!R - \{1; 100\}$, $g(y) = G'(y)$, et Y admet donc la fonction g comme densité de probabilité. On reconnaît alors que Y suit la loi de Benford de paramètre 100.

EXERCICE 3

On considère trois urnes : l'urne $\mathcal{U}_1$ contient deux boules rouges et trois boules bleues, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et aucune boule bleue et l'urne $\mathcal{U}_3$ contient une boule bleue et aucune boule rouge.

On choisit d'abord une de ces trois urnes au hasard avec équiprobabilité. Une fois cette urne choisie, on effectue dans cette urne et sans jamais en changer une série illimitée de tirages d'une boule, avec remise dans cette urne. Pour $i = 1, 2, 3$ on note U_i l'événement : " l'urne choisie pour les tirages est l'urne $\mathcal{U}_i$".

Pour tout entier naturel non nul k, on note R_k : " le k-ième tirage a amené une boule rouge ".

Partie A

1. Les événements U_1, U_2, U_3 sont deux à deux incompatibles : on ne choisit qu'une urne.
Leur réunion est certaine : on choisit l'une des trois urnes.
Les événements U_1, U_2, U_3 forment donc un système complet d'événements.

N.B.: la formulation "les événements (U_1, U_2, U_3) forment un système complet d'événements" n'est pas très correcte. Il vaudrait mieux écrire "les événements U_1, U_2, U_3 *forment* un système complet d'événements", ou "$\{U_1, U_2, U_3\}$ *est* un système complet d'événements". (U_1, U_2, U_3) est *un* triplet, constitué de 3 événements, et non *des* événements.

L'urne $\mathcal{U}_1$ contient deux boules rouges et trois boules bleues : donc $P_{U_1}(R_k) = \dfrac{2}{5}$;
l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge : donc $P_{U_2}(R_k) = 1$;
l'urne $\mathcal{U}_3$ contient une boule bleue et aucune boule rouge : donc $P_{U_3}(R_k) = 0$.

Les événements U_1, U_2, U_3 formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales permet d'écrire : $P(R_k) = P_{U_1}(R_k) P(U_1) + P_{U_2}(R_k) P(U_2) + P_{U_3}(R_k) P(U_3)$. Puisqu'on choisit une des trois urnes au hasard avec équiprobabilité, on a $P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \dfrac{1}{3}$. Il vient donc : $P(R_k) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{3} + 1 \times \dfrac{1}{3} + 0 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{15}$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a. Par la formule généralisée des probabilités composées, $P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) = P_{U_1}(R_1) P_{U_1 \cap R_1}(R_2) ... P_{U_1 \cap R_1 \cap ... \cap R}$
Mais on a vu en **1.** que $P_{U_1}(R_1) = \dfrac{2}{5}$. De même, les tirages étant effectués avec remise de la boule tirée dans l'urne, $P_{U_1 \cap R_1}(R_2) = ... = P_{U_1 \cap R_1 \cap ... \cap R_{n-1}}(R_n) = P_{U_1}(R_1) = \dfrac{2}{5}$. Il en résulte que $P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

b. Si les tirages sont effectués dans l'urne $\mathcal{U}_2$, ils ne peuvent fournir que des boules rouges, donc $P_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) = 1$.
Si les tirages sont effectués dans l'urne $\mathcal{U}_3$, ils ne peuvent fournir que des boules bleues, donc $P_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) = 0$.
Les événements U_1, U_2, U_3 formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales permet d'écrire :
$P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) = P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) P(U_1) + P_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) P(U_2) + P_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) P(U_3)$

c'est-à-dire $P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_n) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{1}{3}$.

3. Par **1.**, on a $P(R_1) = P(R_2) = \dfrac{7}{15}$, tandis que, par **2.b.**, $P(R_1 \cap R_2) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{29}{75}$.
Comme $\dfrac{29}{75} = P(R_1 \cap R_2) \neq P(R_1) P(R_2) = \dfrac{49}{225}$, les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

Partie B

1. On a $P_{R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_k)}{P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1})} = \dfrac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k + \dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1} + \dfrac{1}{3}} = \dfrac{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}}$.

2. L'événement $(Z = 1)$ est réalisé si, et seulement si la première boule tirée est bleue, c'est-à-dire que $(Z = 1) = \overline{R_1}$, donc $P(Z = 1) = P\left(\overline{R_1}\right) = \dfrac{8}{15}$.

b. Soit $k \geq 2$. L'événement $(Z = k)$ est réalisé si, et seulement si les $k - 1$ premiers tirages ont fourni des boules rouges, et le k-ième tirage a fourni une boule bleue.
Autrement dit, $(Z = k) = R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$, d'où, utilisant la formule des probabilités composées, $P(Z = k) = P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1}) P_{R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1}}\left(\overline{R_k}\right)$.
Par **A.2.a.**, on sait que $P(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1}) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}\right)$, et, par **B.1.**, on sait que

$P_{R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}}$, ce qui entraîne

$P_{R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1}}\left(\overline{R_k}\right) = 1 - P_{R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_{k-1}}(R_k) = 1 - \dfrac{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}}$. Comme

$\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}-\left(\frac{2}{5}\right)^{k}=\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$, on obtient finalement, après simplification,

$$P(Z=k)=\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\right)\times\frac{\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}.$$

c. On a $P(Z=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}P(Z=k)=\frac{8}{15}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$. Mais $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}=\frac{1}{5}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}$ ($\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}=\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+...=\frac{2}{5}\left(1+\frac{2}{5}+...\right)$). Comme $-1<\frac{2}{5}<+1$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}$ converge, avec $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}$. Donc $P(Z=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}P(Z=k)=\frac{8}{15}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$.

D'une part, on a $P(Z\geq 1)=P(Z=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}P(Z=k)$, et, d'autre part, $P(Z=0)=1-P(Z\geq 1)$, et donc $P(Z=0)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Remarque : ce résultat est intuitif. Les tirages successifs finiront bien par fournir une boule bleue, à moins que ces tirages se fassent dans l'urne $\mathcal{U}_2$, ce qui se produit avec la probabilité $\frac{1}{3}$ (celle du choix de l'urne $\mathcal{U}_2$).

Partie C

Dans cette partie on s'intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre de tirages ayant amené une boule rouge au cours des 200 premiers tirages.

1.a. On a clairement $X(\Omega)=[\![0,200]\!]$.

b. Soit $k\in[\![0,200]\!]$.

Lorsque les tirages se font dans $\mathcal{U}_1$, chacun d'eux fournit une boule rouge avec la probabilité $\frac{2}{5}$. *Les tirages s'effectuant avec remise de la boule tirée*, le nombre de boules rouges tirées suit la loi binomiale de taille 200 et de paramètre $\frac{2}{5}$, c'est-à-dire que, pour tout entier k de $[\![0,200]\!]$, $P_{U_1}(X=k)=\binom{200}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{200-k}$.

c. Soit k un entier tel que $1\leq k\leq 199$.
Les événements U_1,U_2,U_3 formant un système complet d'événements, la formule des probabilités totales permet d'écrire : $P(X=k)=P_{U_1}(X=k)P(U_1)+P_{U_2}(X=k)P(U_2)+P_{U_3}(X=k)P(U_3)$.
Mais l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et aucune boule bleue, donc $P_{U_2}(X=j)=\begin{cases}1 & \text{si } j=200\\ 0 & \text{si } j\in[\![0,199]\!]\end{cases}$.

De même, l'urne $\mathcal{U}_3$ contient une boule bleue et aucune boule rouge, donc $P_{U_3}(X=j)=\begin{cases}1 & \text{si } j=0\\ 0 & \text{si } j\in[\![1,199]\!]\end{cases}$.

Ainsi, $P_{U_2}(X=k)=P_{U_3}(X=k)=0$, d'où $P(X=k)=P_{U_1}(X=k)P(U_1)=\frac{1}{3}P_{U_1}(X=k)$.

Question **C.2.** *modifiée*

2. On approchera toute variable T de loi binomiale $\mathcal{B}\left(200,\frac{2}{5}\right)$ par une variable N de loi normale $\mathcal{N}(80,48)$.

Remarque : une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(80,48)$ a une espérance égale à 80 et une variance égale à 48, et, donc, un écart-type égal à $4\sqrt{3}$ ($\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$).

a. On a $(74<T\leq 86)=\left(\frac{74-80}{4\sqrt{3}}<T\leq\frac{86-80}{4\sqrt{3}}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}<T\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, et donc, suivant les données de l'énoncé, $P(74<T\leq 86)\approx P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{N-80}{4\sqrt{3}}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b. On sait que, N suivant la loi normale $\mathcal{N}(80,48)$, $\dfrac{N-80}{4\sqrt{3}}$ suit la loi normale centrée réduite.).

Donc $P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{N-80}{4\sqrt{3}}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\Phi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\Phi\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, et $\Phi\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, donc

$P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{N-80}{4\sqrt{3}}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\approx 2\times 0,81-1=0,62.$

Ainsi, avec les données de l'énoncé $P(74<T\leq 86)\approx 0,62$.

Remarque :

L'énoncé d'origine disait :

2. On approchera toute variable T de loi binomiale $\mathcal{B}\left(200,\dfrac{2}{5}\right)$ par une variable N de loi normale $\mathcal{N}(80,48)$.

a. Montrer que $P(60<T\leq 100)\approx P\left(-\dfrac{5}{12}<\dfrac{N-80}{48}\leq\dfrac{5}{12}\right)$.

b. Utiliser cette approximation pour montrer que $P(60<T\leq 100)\approx 0,11$.

(On donne : $\Phi\left(\dfrac{5}{12}\right)\approx 0,66$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.).

Il est exact qu'on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}\left(200,\dfrac{2}{5}\right)$ par la loi normale $\mathcal{N}(80,48)$ (on "approche" plutôt la *loi* que la *variable*, d'ailleurs). On peut donc tout à fait aboutir à $(60<T\leq 100)=\left(-\dfrac{5}{12}<\dfrac{N-80}{48}\leq\dfrac{5}{12}\right)$, puis à $P(60<T\leq 100)\approx P\left(-\dfrac{5}{12}<\dfrac{N-80}{48}\leq\dfrac{5}{12}\right)$.

Cependant, si N suit la loi normale $\mathcal{N}(80,48)$, $\dfrac{N-80}{48}$ ne suit *nullement* la loi normale centrée réduite. Il est donc alors *impossible d'*"utiliser cette approximation pour montrer que $P(60<T\leq 100)\approx 0,11$".

En fait $(60<T\leq 100)=\left(\dfrac{60-80}{4\sqrt{3}}<\dfrac{T-80}{4\sqrt{3}}\leq\dfrac{100-80}{4\sqrt{3}}\right)=\left(-\dfrac{5}{\sqrt{3}}<\dfrac{T-80}{4\sqrt{3}}\leq\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$, d'où $P(60<T\leq 100)\approx P\left(-\dfrac{5}{\sqrt{3}}<\dfrac{N-80}{4\sqrt{3}}\leq\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$. Comme $\dfrac{N-80}{4\sqrt{3}}$ suit la loi normale centrée réduite, on a $P\left(-\dfrac{5}{\sqrt{3}}<\dfrac{N-80}{4\sqrt{3}}\leq\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)=\Phi\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)-\Phi\left(-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)=2\Phi\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)-1$.

Des tables fournissent $\Phi\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)=0,998$ à 10^{-3} près , et donc $P(60<T\leq 100)\approx 0,996$.

ESC Maths 2007 T

EXERCICE 1

Soient les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-2&-6&6\\0&0&0\\-1&-3&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&-2\\1&3&-2\end{pmatrix}\qquad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1.a. Calculer les produits matriciels $A(A-I)$ et $B(B-I)$.

b. En déduire que $A^2=A$ et $B^2=B$.

c. Calculer AB ainsi que BA (ces deux produits donnent un résultat simple).

On note dans toute la suite $W = A + 2B$.

2.a. Calculer les produits $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que $W \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice W est-elle inversible ?

c. Montrer que $W = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et retrouver le résultat précédent par la méthode du pivot.

3.a. En utilisant les relations obtenues en question **1.**, montrer que $W^2 = A + 4B$.

b. Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $W^n = A + 2^n B$.

Dans toute la suite de cet exercice on note pour tout réel x la matrice $H(x) = A + xB$.

4.a. Calculer le produit $H(x) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que la matrice $H(x)$ n'est pas inversible.

b. Montrer que pour tous réels x et y , $H(x) H(y) = H(xy)$.

c. En déduire par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul :

$$(H(x))^n = H(x^n)$$

Quelle relation retrouve-t-on en prenant $x = 2$?

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $I\!R$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 \text{ si } t \leq 0 \\ f(t) = e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-2t} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

1.a. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 0]$ et sur $]0; +\infty[$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} f(t)$ puis en déduire que f est continue sur $I\!R$.

c. Soit θ un réel de l'intervalle $]0; 1[$. Montrer que : $\theta - \theta^3 \geq 0$.

d. Montrer que si $t > 0$ alors $e^{-\frac{2}{3}t}$ est un réel de l'intervalle $]0; 1[$.
En déduire grâce à la question **c.**, et en posant $\theta = e^{-\frac{2}{3}t}$, que $f(t) \geq 0$.

Dans toute la suite de l'exercice on note pour tout réel x : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

2.a. Que vaut $F(x)$ lorsque $x \leq 0$?
Justifier que si $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

b. Montrer que pour tout réel x strictement positif et pour tout réel a strictement positif,

$$\int_0^x e^{-at} dt = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-ax}\right) \ .$$

c. En déduire que pour tout réel x strictement positif : $F(x) = 1 - \dfrac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}$.

d. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

On considère alors une variable aléatoire X admettant une densité f, et de fonction de répartition F.

3. On s'intéresse dans cette question à l'équation notée $(\mathbf{E})$:

$$P(X \leq \mu) = P(X > \mu) \quad (\mathbf{E})$$

équation dont l'inconnue est le réel μ strictement positif .

a. Justifier que pour tout réel x , $P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$.
En déduire que l'équation $(\mathbf{E})$ est équivalente à l'équation $(\mathbf{E'})$:

$$P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \quad (\mathbf{E'})$$

b. Montrer que $(\mathbf{E'}) \Longleftrightarrow 1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0$.

c. Montrer que la fonction g définie sur $]0;1[$ par : $g(\theta) = 1 - 3\theta + \theta^3$ réalise une bijection de $]0;1[$ sur $]-1;1[$.

d. En déduire par le même changement de variable qu'au **1.d.** que l'équation $(\mathbf{E})$ admet une et une seule solution (qu'on ne cherchera pas à calculer).

EXERCICE 3

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.
Les parties **A**, **B** et **C** de cet exercice sont indépendantes , elles correspondent à des expériences aléatoires différentes utilisant le sac mentionné ci-dessus.

Partie A

1. Montrer que si l'on extrait deux jetons simultanément de S, la probabilité que ces deux jetons portent le numéro 2 est : $p = \dfrac{3}{10}$. (On pourra conserver cette notation dans la suite de cette partie **A**).

2. Dans cette question on considère le sac S et on effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants).

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2.

a. Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
(On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.

b. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ et vérifier que $V(X) = (21)^2$.

3.a. On décide d'une approximation de X par une variable T suivant une loi normale $N(m, \sigma^2)$.
Quelles valeurs donner à m et σ pour que X et T aient même espérance et même variance ?

b. Calculer alors la probabilité $P(588 < T \leq 672)$ en utilisant la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. (On donne $\Phi(2) \approx 0,97725$)

Partie B

On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S. On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués avant le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois.

1.a. Justifier que la variable aléatoire $Z = Y + 1$ suit une loi classique.

b. En déduire $Y(\Omega)$ puis la probabilité $P(Y = k)$ pour tout entier k de $Y(\Omega)$.

2.a. Préciser l'espérance mathématique et la variance de Z.

b. En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.

Partie C

On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac S.

On désigne par X_1 la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés, et par X_2 la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés.

1. Donner la loi de probabilité du couple (X_1, X_2), en présentant les résultats dans un tableau à double entrée.

2. En déduire la loi de probabilité de X_1 et celle de X_2.

3. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?