

EXERCICE 1

1.a. En désignant par $\mathbf{0}$ la matrice nulle, les calculs donnent :

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Et :

$$\mathbf{B}(\mathbf{B}-\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

b. D'après la question 1.a., on a les équivalences :

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$$

On obtient de même :

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$$

c. Les calculs donnent :

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Et :

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

2.a. Les calculs donnent :

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. On déduit de la question 2.a. que :

$$\mathbf{W} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\mathbf{B} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si la matrice \mathbf{W} était inversible, on aurait donc :

$$\mathbf{W} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1}\mathbf{W} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{W}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice \mathbf{W} n'est pas inversible.

c. Les calculs donnent :

$$\mathbf{W} = \mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot de Gauss donne :

$$W = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases}$$

La matrice triangulaire ci-dessus ayant un terme diagonal nul n'est pas inversible, donc **W n'est pas inversible**, et le résultat de la question précédente a bien été retrouvé.

3.a. A et B commutant d'après la question **1.c.**, et d'après la question **1.b.**, on a :

$$W^2 = (A + 2B)^2 = A^2 + 4AB + 4B^2 = A + 2 \times 0 + 4B = A + 4B$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$W^n = A + 2^n B$$

Première étape :

P_1 est vraie car on a, par définition de W :

$$W^1 = W = A + 2B = A + 2^1 B$$

Deuxième étape :

On suppose P_n vraie pour une valeur de l'entier naturel n non nul, c'est-à-dire :

$$W^n = A + 2^n B$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$W^{n+1} = A + 2^{n+1} B$$

D'après les questions **1.b.** et **1.c.**, et par hypothèse de récurrence, on a :

$$W^{n+1} = W^n W = (A + 2^n B)(A + 2B) = A^2 + 2AB + 2^n BA + 2^{n+1} B^2 = A + 2^{n+1} B$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie ; le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure que, **pour tout entier naturel n non nul, on a :**

$$W^n = A + 2^n B$$

4.a. Par définition de $H(x)$ et d'après la question **2.a.**, les calculs donnent :

$$H(x) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (A + xB) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + xB \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par un raisonnement analogue à celui de la question **2.b.**, on en déduit que **la matrice $H(x)$ n'est pas inversible.**

b. D'après les questions **1.b.** et **1.c.**, on a, pour tous réels x et y :

$$H(x)H(y) = (A + xB)(A + yB) = A^2 + yAB + xBA + xyB^2 = A + xyB = H(xy)$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n , définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$(H(x))^n = H(x^n)$$

Première étape :

P_1 est vraie car on a :

$$(H(x))^1 = H(x) = H(x^1)$$

Deuxième étape :

On suppose P_n vraie pour une valeur de l'entier naturel n non nul, c'est-à-dire :

$$(H(x))^n = H(x^n)$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$(H(x))^{n+1} = H(x^{n+1})$$

D'après la question **4.b.** et par hypothèse de récurrence, on a :

$$(H(x))^{n+1} = (H(x))^n H(x) = H(x^n) H(x) = H(x^n x) = H(x^{n+1})$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie ; le principe du raisonnement par récurrence permet de conclure que, **pour tout entier naturel n non nul, on a :**

$$(H(x))^n = H(x^n)$$

En prenant $x = 2$, on a, par définition de $H(x)$ l'équivalence :

$$(H(2))^n = H(2^n) \Leftrightarrow (A + 2B)^n = A + 2^n B$$

On a ainsi **retrouvé le résultat de la question 3.b.**

EXERCICE 2

1.a. f est continue sur $]-\infty, 0]$ comme fonction constante et **sur $]0, +\infty[$** comme différence et composée de fonctions qui le sont.

b. On a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-2t} \right) = e^0 - e^0 = 0$$

f est continue sur \mathbb{R} car f est continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$ d'après la question **1.a.**, et continue en 0 puisque :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$$

c. On a :

$$\theta - \theta^3 = \theta(1 - \theta^2) = \theta(1 - \theta)(1 + \theta)$$

Puisque θ un réel de l'intervalle $]0, 1[$, θ , $1 - \theta$ et $1 + \theta$ sont strictement positifs, donc on a :

$$\theta - \theta^3 \geq 0$$

d. On a :

$$t > 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}t < 0 \Rightarrow e^{\frac{2}{3}t} < e^0 = 1$$

Par ailleurs $e^{\frac{2}{3}t}$ est strictement positif, donc si $t > 0$ alors $e^{\frac{2}{3}t}$ est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

Puisque si $t > 0$, $e^{\frac{2}{3}t}$ est un réel de l'intervalle $]0, 1[$, on peut poser $\theta = e^{\frac{2}{3}t}$ et en déduire, d'après la question **1.c.**, que :

$$f(t) = e^{\frac{2}{3}t} - e^{-2t} = \theta - \theta^3 \geq 0$$

2.a. Lorsque $x \leq 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

Si $x > 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = F(0) + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt$$

b. Pour tout réel x strictement positif et pour tout réel a strictement positif, on a :

$$\int_0^x e^{-at} dt = -\frac{1}{a} \int_0^x (-a) e^{-at} dt = -\frac{1}{a} [e^{-at}]_0^x = -\frac{1}{a} (e^{-ax} - 1) = \frac{1}{a} (1 - e^{-ax})$$

c. D'après les questions **2.a.** et **2.b.**, on a, pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-2t} \right) dt = \int_0^x e^{-\frac{2}{3}t} dt - \int_0^x e^{-2t} dt \\ &= \frac{3}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{3}x} \right) - \frac{1}{2} (1 - e^{-2x}) = 1 - \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

d. D'après la question **2.c.**, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right) = 1$$

Car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{2}{3}x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

3.a. Les événements $(X > x)$ et $(X \leq x)$ sont des événements contraires, donc on a :

$$p(X > x) = p(\overline{X \leq x}) = 1 - p(X \leq x)$$

D'après ce qui précède, on a les équivalences :

$$p(X \leq \mu) = p(X > \mu) \Leftrightarrow p(X \leq \mu) = 1 - p(X \leq \mu) \Leftrightarrow 2p(X \leq \mu) = 1 \Leftrightarrow p(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$$

L'équation (E) est donc équivalente à l'équation (E').

b. D'après la question **2.c.**, on a :

$$\begin{aligned} p(X \leq \mu) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow F(\mu) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}\mu} + \frac{1}{2} e^{-2\mu} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}\mu} + \frac{1}{2} e^{-2\mu} = 0 \Leftrightarrow 1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi a-t-on :

$$(E') \Leftrightarrow 1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0$$

c. g est continue sur $]0, 1[$ comme fonction polynôme.

g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ car on a, pour tout réel de θ de $]0, 1[$:

$$g'(\theta) = -3 + 3\theta^2 = 3(\theta^2 - 1) = 3(\theta - 1)(\theta + 1) < 0$$

Donc g réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $]g(1), g(0)[=]-1, 1[$.

d. D'après les questions **3.a.** et **3.b.**, on a les équivalences :

$$(E) \Leftrightarrow (E') \Leftrightarrow 1 - 3e^{-\frac{2}{3}\mu} + e^{-2\mu} = 0 \Leftrightarrow g\left(e^{-\frac{2}{3}\mu}\right) = 0$$

g réalisant une bijection de $]0, 1[$ sur $] -1, 1[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, 1[$, et par suite, **l'équation (E) admet une solution unique μ dans $]0, +\infty[$ car :**

$$e^{-\frac{2}{3}\mu} = \alpha \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\mu = \ln \alpha \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{2} \ln \alpha$$

EXERCICE 3**Partie A**

1. Le nombre de tirages simultanés de deux jetons dans le sac qui en contient cinq est :

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10$$

Le nombre de tirages simultanés de deux jetons numérotés 2 dans le sac qui en contient trois est :

$$\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$$

Donc la probabilité d'obtenir deux jetons numérotés 2 est :

$$p = \frac{3}{10}$$

2.a. En appelant succès l'événement S : « obtenir deux jetons numérotés 2 lors d'un tirage simultané de deux jetons dans le sac », de probabilité $p = p(S) = \frac{3}{10}$ d'après la question A.1.,

X représente le nombre de succès obtenus lors des deux mille cent épreuves indépendantes formées par les deux mille cent tirages effectués avec remise .

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n = 2100, p = \frac{3}{10}\right)$.

X prend pour valeurs $\llbracket 0, 2100 \rrbracket$ et, pour tout entier naturel k de $\llbracket 0, 2100 \rrbracket$, on a :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{2100}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{2100-k}$$

b. L'espérance et la variance de X sont respectivement :

$$E(X) = np = 2100 \times \frac{3}{10} = 630 \text{ et } V(X) = np(1-p) = 630 \times \frac{7}{10} = 441 = 21^2$$

3.a. T suivant une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on a :

$$E(T) = m \text{ et } V(T) = \sigma^2$$

D'après la question A.2.b., pour que X et T aient même espérance et même variance, on doit prendre :

$$m = 630 \text{ et } \sigma = 21$$

b. La variable aléatoire $T^* = \frac{T-m}{\sigma} = \frac{T-630}{21}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, de fonction de répartition Φ , donc, puisque X est approximée par T, la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned} p(588 < X \leq 672) &= p(588 < T \leq 672) = p\left(\frac{588-630}{21} < T^* \leq \frac{672-630}{21}\right) = p\left(\frac{-42}{21} < T^* \leq \frac{42}{21}\right) \\ &= p(-2 < T^* \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) = 2\Phi(2) - 1 \\ &= 2 \times 0,97725 - 1 \approx 0,9545 \end{aligned}$$

Partie B

1.a. La probabilité d'obtenir un jeton numéroté 1 lors d'un tirage est $p = \frac{2}{5}$; $Z = Y + 1$ est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois un jeton numéroté 1, c'est-à-dire le temps d'attente d'un jeton numéroté 1, au cours d'une série illimitée de tirages mutuellement indépendants, puisque effectués avec remise, donc **Z suit la loi géométrique** $\mathcal{G}\left(p = \frac{2}{5}\right)$.

b. On a :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

Et la loi de Z est définie, pour tout entier naturel k non nul, par :

$$p(Z = k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

Or on a :

$$Z = Y + 1 \Leftrightarrow Y = Z - 1$$

Donc :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

Et la loi de Y est définie, **pour tout entier naturel k**, par :

$$p(Y = k) = p(Z - 1 = k) = p(Z = k + 1) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^k$$

2.a. L'espérance et la variance de Z sont respectivement :

$$E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{5}{2} \text{ et } V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{2}{5}}{\frac{4}{25}} = \frac{3}{5} \times \frac{25}{4} = \frac{15}{4}$$

b. D'après la question **B.2.a.**, l'espérance et la variance de Y sont respectivement :

$$E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \text{ et } V(Y) = V(Z - 1) = 1^2 V(Z) = V(Z) = \frac{15}{4}$$

Partie C

1. X_1 prend les valeurs $1+1=2$, $1+2=3$ et $2+2=4$, et X_2 les valeurs 1 et 2.

Les trois événements $(X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)$, $(X_1 = 3) \cap (X_2 = 1)$ et $(X_1 = 4) \cap (X_2 = 1)$ sont l'événement impossible, donc :

$$p((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = p((X_1 = 3) \cap (X_2 = 1)) = p((X_1 = 4) \cap (X_2 = 1)) = 0$$

Le nombre de tirages successifs et avec remise de deux jetons du sac est $5^2 = 25$.

L'événement $(X_1 = 2) \cap (X_2 = 1)$ est réalisé si on extrait deux jetons numérotés 1, donc :

$$p((X_1 = 2) \cap (X_2 = 1)) = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

L'événement $(X_1 = 4) \cap (X_2 = 2)$ est réalisé si on extrait deux jetons numérotés 2, donc :

$$p((X_1 = 4) \cap (X_2 = 2)) = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$$

On obtient enfin :

$$p((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2)) = 1 - \frac{4}{25} - \frac{9}{25} = \frac{12}{25}$$

La loi du couple (X_1, X_2) est donc donnée par le tableau ci-dessous :

$X_1 \backslash X_2$	1	2	$p(X_1 = i)$
2	$\frac{4}{25}$	0	$\frac{4}{25}$
3	0	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$
4	0	$\frac{9}{25}$	$\frac{9}{25}$
$p(X_2 = j)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{21}{25}$	

2. Les lois des variables aléatoires X_1 et X_2 sont les lois marginales de X_1 et X_2 , respectivement obtenues dans la dernière colonne et la dernière ligne du tableau de la question C.1..

3. Les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes, car on a, par exemple :

$$p((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) \neq p(X_1 = 2)p(X_2 = 2)$$

En effet :

$$p((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = 0 \text{ et } p(X_1 = 2)p(X_2 = 2) = \frac{4}{25} \cdot \frac{21}{25} = \frac{84}{625}$$