

**EXERCICE 1**

Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } X_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Partie A :**

1. On montre, par la méthode du pivot de Gauss, que  $P$  est inversible, et l'on calcule  $P^{-1}$ .

Les pivots successifs seront portés en gras.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \text{ Par } L_3 \leftarrow L_3 + L_1, \text{ on obtient :}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]. \text{ Par } \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}, \text{ on obtient :}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

On a alors prouvé que  $P$  est inversible, avec :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.  $D$  étant diagonale, on a, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ ,  $D^k = \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^k & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. On trouve  $PD = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$ , puis  $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire  $PDP^{-1} = A$ .

On montre alors, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $A^k = PD^kP^{-1}$ .  
 La formule est vraie pour  $k = 0$  (avec la convention  $A^0 = D^0 = I$ , matrice-unité d'ordre 3) :  $A^0 = I = PD^0P^{-1}$ .  
 On vient aussi de montrer que la formule est vraie pour  $k = 1$  :  $A^1 = A = PD^1P^{-1}$ .  
 On suppose ensuite que, pour un entier  $k \geq 1$ , quelconque, on a  $A^k = PD^kP^{-1}$ . On en déduit alors que  $A^{k+1} = A^k A = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$ , ce qui montre que la formule est encore vraie pour l'entier  $k + 1$ , et permet donc de conclure que, pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $A^k = PD^kP^{-1}$ .

Comment ça, par récurrence ? Il suffit d'écrire que  $D$  étant diagonale, on a, pour tout entier  $k \geq 0$ ,  $D^k = \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^k & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , d'où  $D^kP^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k \\ 1 \end{pmatrix}$ , et, enfin,  $A^kX_1 = PD^kP^{-1}X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k \\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^k \\ 1 - \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^k \end{pmatrix}$ .

**Partie B :**

1. Puisque le consommateur  $M$  choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine, on a  $P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = \frac{1}{3}$ .

Si  $M$  a choisi le dessert  $A$  la semaine  $n$ , alors la semaine  $n + 1$  il choisit : le dessert  $A$  avec une probabilité de  $1/3$  ou le dessert  $C$  avec une probabilité de  $2/3$  : donc  $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$ ,  $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0$ ,  $P_{A_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3}$ .

Si  $M$  a choisi le dessert  $B$  la semaine  $n$ , alors la semaine  $n + 1$  il choisit : le dessert  $A$  avec une probabilité de  $1/3$  ou le dessert  $B$  avec une probabilité de  $2/3$  : donc  $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$ ,  $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ ,  $P_{B_n}(C_{n+1}) = 0$ .

Enfin, si  $M$  a choisi le dessert  $C$  la semaine  $n$ , il reprend le dessert  $C$  la semaine  $n + 1$  : donc  $P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = 0$ ,  $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1$ .

**2.** Pour chaque valeur de  $n$ , les événements  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire :

$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$ , c'est-à-dire, compte tenu de **1.**,

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

De même,  $P(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n)$ , c'est-à-dire, compte tenu de **1.**,  $P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}P(B_n)$ .

Enfin,  $P(C_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n)$ , c'est-à-dire, compte tenu de **1.**,  $P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + P(C_n)$ .

En résumé,

$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$$

$$P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}P(B_n)$$

$$P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + P(C_n)$$

**3.a.** Les relations obtenues en **2.** s'écrivent, sous forme matricielle,  $\begin{pmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$ ,

c'est-à-dire  $U_{n+1} = AU_n$ .

**b.** On montre, par récurrence, que, pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $U_n = A^{n-1}X_1$ .

Pour  $n = 1$ , la formule s'écrit  $U_1 = A^0X_1$ , et elle est vraie ( $A^0 = I$ ), car, en fait,  $U_1 = X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ . Si l'on

suppose que, pour un entier  $n \geq 1$ , quelconque,  $U_n = A^{n-1}X_1$ , alors  $U_{n+1} = AU_n = AA^{n-1}X_1 = A^nX_1$ . On voit que la formule est encore vraie pour l'entier  $n + 1$ , et l'on peut alors conclure que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $U_n = A^{n-1}X_1$ .

**4.** Faisant  $k = n - 1$  dans **A.3.**, on obtient  $\begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix} = A^{n-1}X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$ , d'où

$$P(A_n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (\text{et, en prime, et hors sujet, } P(B_n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ et } P(C_n) = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}).$$

Comme  $-1 < \frac{2}{3} < +1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$ .

*Remarque :* et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1$ . À long terme, le consommateur choisit le dessert  $C$ , ce qui est bien intuitif.

## EXERCICE 2

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + \ln x - 2$ . On donne  $\ln 2 \approx 0,7$ .

**1.a.**  $g$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$  comme composée de fonctions dérivables, et  $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ , et l'on voit que, pour tout élément  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $g'(x) > 0$  ( $g'(x)$  s'écrit comme somme de deux quantités positives),  $g$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

**b.**  $\lim_{0^+} g$  : on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2) = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ , donc  $\lim_{0^+} g = -\infty$ .

$\lim_{+\infty} g$  : on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc  $\lim_{+\infty} g = +\infty$ .

- $g$  est continue sur  $]0; +\infty[$ ;
- $g$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ ;
- $\lim_{0^+} g = -\infty$  et  $\lim_{+\infty} g = +\infty$ .

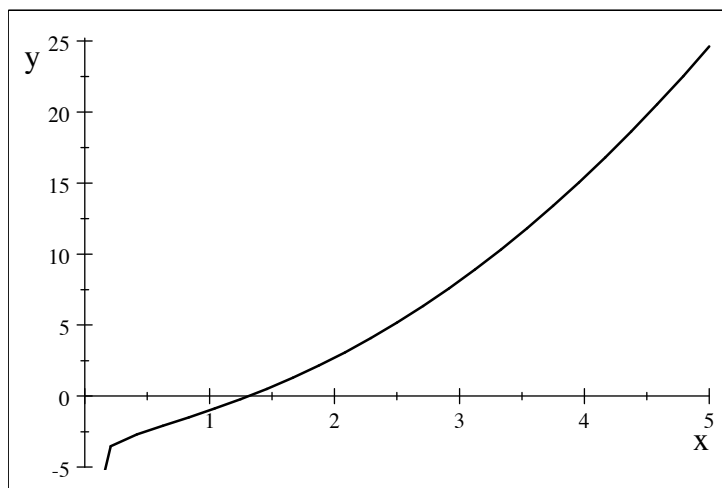
Le théorème de la bijection permet de conclure que  $g$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier, puisque  $0 \in \mathbb{R}$ , il existe un unique élément de  $]0; +\infty[$ , appelé  $\alpha$  par l'énoncé, qui vérifie  $g(\alpha) = 0$ . De plus,  $g(1) = -1 < 0$ , et  $g(2) = 2 - \ln 2 > 1 > 0$  (car  $e > 2$ , donc  $\ln 2 < \ln e = 1$ ).

**d.**  $g$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , et  $g(\alpha) = 0$ .

Donc, pour  $0 < x < \alpha$ , on a  $g(x) < g(\alpha) = 0$ , tandis que, pour  $x > \alpha$ , on a  $g(x) > g(\alpha) = 0$ .

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \text{si } x < \alpha, & g(x) < 0 \\ g(\alpha) & = 0 \\ \text{si } x > \alpha, & g(x) > 0 \end{cases}$$

**e.** Allure de la courbe d'équation  $y = x^2 + \ln x - 2$



### Remarques complémentaires

On a, pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{g(x)}{x} = x + \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ , la courbe représentative de  $g$  admet donc une branche parabolique de direction  $Oy$ .

Au vu de la courbe, il semble qu'elle admette un point d'inflexion, avec une concavité orientée vers le bas au voisinage de l'origine, et une concavité orientée vers le haut au voisinage de  $+\infty$ . Pour confirmer ce que l'on

"voit", on calcule  $g''(x)$ . On trouve  $g''(x) = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x}$ .  $g''(x)$  est, pour tout  $x > 0$ , du signe de  $2x^2 - 1$ . On voit alors que  $g$  est concave sur  $]0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ , convexe sur  $[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[$ , et que la courbe admet le point  $I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2\right)$  ( $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$ ) comme unique point d'inflexion.

**2.a.** On effectue une intégration par parties, en posant  $\begin{cases} u'(x) = 1 \text{ avec } u(x) = x \\ v(x) = \ln x, \text{ d'où } v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_1^\alpha \ln x \, dx &= \int_1^\alpha u'(x) v(x) \, dx = [u(x) v(x)]_1^\alpha - \int_1^\alpha u(x) v'(x) \, dx. \\ &= [x \ln x]_1^\alpha - \int_1^\alpha x \times \frac{1}{x} \, dx = [x \ln x]_1^\alpha - \int_1^\alpha dx \\ &= [x \ln x - x]_1^\alpha \end{aligned}$$

Effectuant, on obtient :  $\int_1^\alpha \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^\alpha = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$ .

**b.** On a, par linéarité de l'intégrale,  $\int_1^\alpha g(x) \, dx = \int_1^\alpha x^2 \, dx + \int_1^\alpha \ln x \, dx - 2 \int_1^\alpha dx$ . Comme  $\int_1^\alpha x^2 \, dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_1^\alpha = \frac{1}{3} \alpha^3 - \frac{1}{3}$ ,  $\int_1^\alpha dx = [x]_1^\alpha = \alpha - 1$ , et  $\int_1^\alpha \ln x \, dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1$ , il vient  $\int_1^\alpha g(x) \, dx = \left( \frac{1}{3} \alpha^3 - \frac{1}{3} \right) + (\alpha \ln \alpha - \alpha + 1) - 2(\alpha - 1)$ , d'où, réduisant,  $\int_1^\alpha g(x) \, dx = \frac{1}{3} \alpha^3 - 3\alpha + \frac{8}{3} + \alpha \ln \alpha$ .

Mais, par définition de  $\alpha$ , on a  $\alpha^2 + \ln \alpha - 2 = 0$ , et l'on en déduit que  $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ . Substituant, il vient :  $\int_1^\alpha g(x) \, dx = \frac{1}{3} \alpha^3 - 3\alpha + \frac{8}{3} + \alpha(2 - \alpha^2) = \frac{8 - 2\alpha^3}{3} - \alpha = \frac{8 - 3\alpha - 2\alpha^3}{3}$ .

**c.** On hachure.

On définit maintenant une suite qui déterminera une valeur approchée du réel  $\alpha$  obtenu en question **1.c**. À cet effet on considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(u_n)}$ .

**3.a.** Soit, pour  $x \in [1; 2]$ ,  $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$ . La fonction  $x \mapsto 2 - \ln x$  est définie, continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , la fonction  $x \mapsto \sqrt{2 - \ln x}$  est donc dérivable sur tout intervalle  $I$  pour lequel  $2 - \ln x > 0$  pour tout  $x \in I$ . Mais, pour tout  $x \in [1; 2]$ ,  $2 - \ln 2 \leq 2 - \ln x$ , et  $2 - \ln 2 > 0$ , donc  $2 - \ln x > 0$ . Ainsi,  $h$  est dérivable sur  $[1; 2]$ .

On a  $h'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 - \ln x}} = -\frac{1}{2xh(x)}$ , et l'on voit que, pour tout  $x \in [1; 2]$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h$  est donc décroissante sur  $[1; 2]$ .

Tableau des variations de  $h$

$x$	1	2
$h'(x)$	-	
$h$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2 - \ln 2}$

N.B.:  $h(1) = \sqrt{2}$  et  $h(2) = \sqrt{2 - \ln 2}$ .

Les nombres  $\sqrt{2}$  et 2 étant positifs, sont dans le même ordre que leurs carrés. Comme  $(\sqrt{2})^2 = 2 \leq 4 = 2^2$ , on a  $\sqrt{2} \leq 2$ .

Comme  $\ln 2 < 1$ , on a  $2 - \ln 2 \geq 1$ , d'où  $\sqrt{2 - \ln 2} \geq \sqrt{1} = 1$ .

$h$  étant décroissante sur  $[1, 2]$ , pour  $x \in [1, 2]$ , on a  $h(2) \leq h(x) \leq h(1)$ , et  $1 \leq h(2)$ ,  $h(1) \leq 2$ , donc  $1 \leq h(x) \leq 2$ , c'est-à-dire que  $h(x) \in [1; 2]$ .

**b.** On montre, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \in [1; 2]$ .

Puisque  $u_0 = 1 \in [1, 2]$ , l'énoncé est vrai pour  $n = 0$ .

Si l'on suppose que, pour un entier  $n \geq 0$ , quelconque,  $u_n \in [1, 2]$ , alors, par **a.**,  $h(u_n) \in [1; 2]$ , c'est-à-dire, puisque  $h(u_n) = \sqrt{2 - \ln(u_n)} = u_{n+1}$ , que  $u_{n+1}$  existe et  $u_{n+1} \in [1; 2]$ . L'énoncé est donc encore vrai pour l'entier  $n + 1$ , et l'on peut alors conclure que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n$  existe, et  $u_n \in [1, 2]$ .

**c.** On a  $h'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2 - \ln x}} = -\frac{1}{2xh(x)}$ , et  $|h'(x)| = \frac{1}{2xh(x)}$ .

On a vu que, pour tout  $x \in [1, 2]$ ,  $h(x) \geq 1$ . Comme, de plus, on a aussi  $2x \geq 2$ , on a  $2xh(x) \geq 2$ , d'où  $\frac{1}{2xh(x)} \leq \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

Par définition du réel  $\alpha$ , on a  $\alpha^2 + \ln \alpha - 2 = 0$ , d'où  $\alpha^2 = 2 - \ln \alpha$ . On a  $\alpha > 0$ , et la relation  $\alpha^2 = 2 - \ln \alpha$  entraîne  $2 - \ln \alpha > 0$ . Prenant les racines carrées, il vient  $\alpha = \sqrt{2 - \ln \alpha}$ , c'est-à-dire  $h(\alpha) = \alpha$ .

On applique alors l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $h$  entre  $u_n$  et  $\alpha$ , tous deux éléments de  $[1, 2]$ . Puisque, pour tout élément  $x$  de  $[1, 2]$ , on a  $|h'(x)| \leq \frac{1}{2}$ , cette inégalité des accroissements finis permet d'écrire  $|h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ . Mais  $h(u_n) = u_{n+1}$  et  $h(\alpha) = \alpha$ , et il vient donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$ .

**d.** On montre, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .

Pour  $n = 0$ , l'énoncé est évident :  $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$ , il y a, en fait, égalité.

On suppose alors que, pour un entier  $n \geq 0$ , quelconque,  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .

Les inégalités  $\begin{cases} |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \end{cases}$  entraînent  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ , c'est-à-dire

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

L'énoncé est donc encore vrai pour l'entier  $n + 1$ , et l'on peut alors conclure que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

Puisque  $-1 < \frac{1}{2} < +1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|\right) = 0$ , et le théorème

de l'encadrement entraîne alors, puisque  $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ , que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ , d'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \alpha) = 0$ . De  $u_n = \alpha + (u_n - \alpha)$ , résulte alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$  (réduction très détaillée).

### EXERCICE 3

**1.a.** Il semble donc qu'on "examine" une ampoule choisie au hasard (ça n'est pas explicitement dit par l'énoncé).

Puisque 20% des ampoules fabriquées proviennent de la machine  $M_3$ , on a  $P(F_3) = 0,20$ .

De même, puisque 30% des ampoules fabriquées proviennent de la machine  $M_2$ , on a  $P(F_2) = 0,30$ .

Enfin, puisque 50% des ampoules fabriquées proviennent de la machine  $M_1$ , on a  $P(F_1) = 0,50$ .

**b.** Soit  $D$  l'événement : "l'ampoule choisie est défectueuse".

Puisque la probabilité qu'une ampoule fabriquée soit défectueuse vaut  $\frac{3}{100}$  pour  $M_1$ , on a  $P_{F_1}(D) = \frac{3}{100}$ ;

puisque la probabilité qu'une ampoule fabriquée soit défectueuse vaut  $\frac{5}{100}$  pour  $M_2$ , on a  $P_{F_2}(D) = \frac{5}{100}$ ;

enfin, puisque la probabilité qu'une ampoule fabriquée soit défectueuse vaut  $\frac{15}{100}$  pour  $M_3$ , on a  $P_{F_3}(D) = \frac{15}{100}$ .

Les événements  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  forment un système complet d'événements. La formule des probabilités totales permet donc d'écrire :  $P(D) = P_{F_1}(D) P(F_1) + P_{F_2}(D) P(F_2) + P_{F_3}(D) P(F_3)$ , c'est-à-dire

$$P(D) = \frac{3}{100} \times 0,50 + \frac{5}{100} \times 0,30 + \frac{15}{100} \times 0,20 = 0,06.$$

**c.** On cherche ici  $P_D(F_3)$ .

On a  $P_D(F_3) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P_{F_3}(D) P(F_3)}{P(D)}$ , c'est-à-dire

$$P_D(F_3) = \frac{\frac{15}{100} \times 0,20}{0,06} = \frac{0,03}{0,06} = 0,5.$$

**2.** Le fait que "la variable  $X$  suit une loi binomiale" est discutable. En toute rigueur, la loi de  $X$  est du type hypergéométrique, de paramètres  $N$ , nombre -inconnu- total des ampoules produites,  $n$ , et  $p = 0,06$ .

Pour justifier que "X suit une loi binomiale", il faut postuler l'indépendance des tirages, ce qui est faux, puisque chaque ampoule ne peut être tirée qu'une fois.

Cependant, lorsque N est "grand", les tirages sont "presque" indépendants. Si l'on raisonne comme s'il en était ainsi, on doit conclure que X suit la loi binomiale de paramètres n et 0,06 ("de taille n et de paramètre 0,06"). Alors :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et, pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} 0,06^k 0,94^{n-k}$$

Le nombre moyen de pièces défectueuses dans le lot est  $E(X)$ . Or  $E(X) = 0,06n$ .

**3.a.** On doit savoir que, sous certaines conditions, la loi d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre n et p peut être approchée par la loi normale de paramètres  $m = np$  et  $\sigma^2 = np(1-p)$ .

Dans les conditions particulières du problème, on est alors conduit à choisir  $m = 0,06 \times 14\,100 = 846$  et  $\sigma^2 = 0,06 \times 0,94 \times 14\,100 = \frac{19\,881}{25}$ . Il ne reste qu'à vérifier que  $141^2 = 19\,881$  (et  $5^2 = 25$ ), pour conclure que

$$m = 846 \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{141}{5}.$$

**b.** À l'aide de l'approximation de la loi de X par celle de Z qui suit la loi normale de paramètres  $m = 846$  et  $\sigma^2 = \frac{19\,881}{25}$  ( $\sigma = \frac{141}{5} = 28,2$ ), on a  $P(818 \leq X \leq 874) \approx P(818 \leq Z \leq 874)$ .

$$\text{Mais } (818 \leq Z \leq 874) = \left( \frac{818 - 846}{\frac{141}{5}} \leq Z \leq \frac{874 - 846}{\frac{141}{5}} \right) = \left( -\frac{140}{141} \leq Z \leq \frac{140}{141} \right) = (-0,99 \leq Z \leq 0,99)$$

( $\frac{140}{141} \approx 0,99$ ), d'où  $P(818 \leq X \leq 874) \approx P(-0,99 \leq Z \leq 0,99) = \Phi(0,99) - \Phi(-0,99)$ . Mais

$\Phi(-0,99) = 1 - \Phi(0,99)$ , donc  $\Phi(0,99) - \Phi(-0,99) = \Phi(0,99) - (1 - \Phi(0,99)) = 2\Phi(0,99) - 1$ .

Ainsi  $P(818 \leq X \leq 874) \approx 2\Phi(0,99) - 1$ , et utilisant la valeur numérique fournie par l'énoncé,  $\Phi(0,99) \approx 0,839$ , on trouve

$$P(818 \leq X \leq 874) \approx 0,678$$

**4.** Dans cette dernière question on suppose que  $n = 7$  et que les sept ampoules choisies sont sans défaut. On suppose également que le temps de fonctionnement d'une ampoule sans défaut suit une loi exponentielle de paramètre 0,2. On branche ces 7 ampoules au même moment.

On note T la variable aléatoire égale au temps pendant lequel les sept ampoules vont fonctionner.

**a.** Si  $T_0$  est le temps de fonctionnement d'une ampoule sans défaut,  $T_0$  suit la loi exponentielle de paramètre 0,2, dont la fonction de répartition est  $F_0(t) = 1 - e^{-0,2t}$  pour  $t > 0$ , et  $F_0(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ .

On a donc, pour tout réel  $t > 0$ ,  $P(T_0 > t) = 1 - P(T_0 \leq t) = 1 - (1 - e^{-0,2t}) = e^{-0,2t}$ .

Dire que les sept ampoules vont fonctionner pendant une durée strictement supérieure à t, c'est dire qu'il va en être ainsi pour chacune des 7 ampoules.

Les temps de fonctionnement des 7 ampoules peuvent être supposés indépendants (évidemment), donc, pour tout  $t > 0$ ,  $P(T > t) = P(T_0 > t)^7 = (e^{-0,2t})^7 = e^{-1,4t}$ .

**b.** Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

Pour  $t \leq 0$ , on a  $F(t) \leq 0$ , tandis que, pour  $t > 0$ ,  $P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-1,4t}$ .

Il suffit alors de reconnaître que T suit la loi exponentielle de paramètre 1,4.

On doit alors savoir que  $E(T) = \frac{1}{1,4} = \frac{5}{7}$ , et que  $V(T) = \frac{1}{1,4^2} = \frac{25}{49}$ .

*Rappel de cours :* Si X, variable aléatoire, de fonction de répartition F suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (où  $\lambda > 0$ ), alors X admet pour densité de probabilité la fonction f (ce n'est pas la seule), avec

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}, \text{ et alors}$$

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E(X) = \frac{1}{\lambda} \\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$