

**EXERCICE 1**

On considère les matrices carrées  $A, I, O$  et  $B$  définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - 3I.$$

1. (a) On trouve  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) Si  $k \geq 4$ , on peut écrire  $B^k = B^3 \times B^{k-3}$ .  $k - 3 \geq 1$ , et  $B^3 = O$  entraînent  $B^k = 0$ . Comme on a déjà vu que  $B^3 = O$ , on a, en fait,  $B^k = O$  pour tout entier  $k \geq 3$ .

N.B.: on peut aussi effectuer une preuve par récurrence.

2. De  $B = A - 3I$ , on déduit  $A = 3I + B$ . Comme les matrices  $3I$  et  $B$  commutent ( $(3I)B = B \times (3I) = 3B$ ), la formule du binôme de Newton permet d'écrire, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3I)^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k. \text{ Puisque, pour } k \geq 3, B^k = O, \text{ cette formule se}$$

réduit à  $A^n = \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k$  (les termes correspondant à  $k = 3, 4, \dots, n$  sont nuls), c'est-à-dire

$$A^n = \binom{n}{0} 3^n B^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} B^1 + \binom{n}{2} 3^{n-2} B^2.$$

Comme  $\binom{n}{0} 3^n B^0 = 3^n I$ ,  $\binom{n}{1} 3^{n-1} B^1 = n \times 3^{n-1} B = 3^n \times \frac{n}{3} B$ , et  $\binom{n}{2} 3^{n-2} B^2 = \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 = 3^n \times \frac{n(n-1)}{18} B^2$  ( $3^{n-2} = 3^n \times \frac{1}{9}$ ), on obtient, pour tout entier  $n \geq 2$  :  $A^n = 3^n \left( I + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right).$

Faisant  $n = 1$  dans cette formule, il vient  $A^1 = 3^1 \left( I + \frac{1}{3} B \right)$ , c'est-à-dire  $A = 3I + B$ , dont on constate que l'égalité est vraie.

De même, faisant  $n = 0$ , il vient  $A^0 = 3^0 I$ , c'est-à-dire ( $A^0 = I$ )  $I = I$ , et 'on voit que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$A^n = 3^n \left( I + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right).$$

3. On considère les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définies par leurs premiers termes  $u_0 = 2, v_0 = 1, w_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$  par les relations :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n, \quad v_{n+1} = u_n + 3v_n, \quad w_{n+1} = -u_n + 3w_n.$$

(a) Les relations  $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = -u_n + 3w_n \end{cases}$  s'écrivent matriciellement sous la forme  $X_{n+1} = AX_n$ .

(b) On montre, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n, X_n = A^n X_0$ .

Pour  $n = 0$ , la relation s'écrit  $X_0 = A^0 X_0$ , elle est vraie :  $A^0 = I$ .

On suppose alors que, pour un entier  $n \geq 0$ , quelconque, on a  $X_n = A^n X_0$ .

On en déduit que  $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$ .

On a ainsi montré que la formule est encore vraie pour l'entier  $n + 1$ , et l'on peut alors conclure que, pour tout entier naturel  $n, X_n = A^n X_0$ .

(c) Puisque  $u_0 = 2, v_0 = 1, w_0 = 0$ , on a  $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Pour obtenir l'expression de  $X_n$  en fonction de  $n$ , on peut, d'abord obtenir celle de  $A^n$  à partir de la relation  $A^n = 3^n \left( I + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2 \right)$ . On peut aussi calculer d'abord  $BX_0 = B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , on trouve

$$BX_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ On trouve ensuite } B^2X_0 = B^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = 3^n \left( I + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2 \right) X_0 \\ &= 3^n \left( X_0 + \frac{n}{3}BX_0 + \frac{n(n-1)}{18}B^2X_0 \right) \\ &= 3^n \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{n}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{18} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3^n \left( 2 + \frac{2n}{3} \right) \\ 3^n \left( 1 + \frac{2n}{3} + \frac{n(n-1)}{9} \right) \\ 3^n \left( -\frac{2n}{3} - \frac{n(n-1)}{9} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} u_n = 3^n \left( 2 + \frac{2n}{3} \right) \\ v_n = 3^n \left( 1 + \frac{2n}{3} + \frac{n(n-1)}{9} \right) = 3^n \left( 1 + \frac{5}{9}n + \frac{1}{9}n^2 \right) \\ w_n = 3^n \left( -\frac{2n}{3} - \frac{n(n-1)}{9} \right) = 3^n \left( -\frac{5}{9}n - \frac{1}{9}n^2 \right) \end{cases}$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n \times 3^n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 \times 3^n) = +\infty$ . De :

$$\begin{cases} u_n = 2 \times 3^n + \frac{2}{3}n \times 3^n \\ v_n = 3^n + \frac{5}{9}n \times 3^n + \frac{1}{9}n^2 \times 3^n \\ w_n = -\frac{5}{9}n \times 3^n - \frac{1}{9}n^2 \times 3^n \end{cases} \text{ on déduit alors :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty.$$

## EXERCICE 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ .

### 1. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

On a  $f(x) = x^2e^{-x} + e^{-x}$ . On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ .

### $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ .

(b) Pour tout  $x < 0$ ,  $f(x) = x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) e^{-x}$ , donc  $\frac{f(x)}{x} = \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \times xe^{-x}$ . On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$ ,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ , la courbe de  $f$  admet donc une branche parabolique de direction  $Oy$  au voisinage de  $-\infty$ .

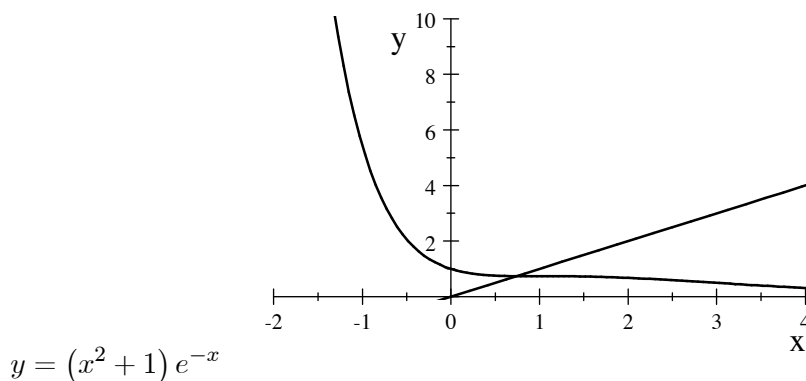
(c)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions dérivables, et  $f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 + 1) \times (-e^{-x}) = -(x^2 - 2x + 1)e^{-x} = -(1-x)^2 e^{-x}$ . Comme, pour tout  $x$ ,  $e^{-x} > 0$ , et  $(1-x)^2$ , on voit que, pour tout  $x$ ,  $f'(x) \leq 0$ , avec égalité si et seulement si  $x = 1$ .

Tableau des variations de  $f$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f$	$+\infty$	$\searrow$ $2/e$ $\searrow$	0

(d) On a déjà trouvé  $f'(1) = 0$ . On trouve aussi  $f'(0) = -1$ .

Allure de la courbe



On considère maintenant la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = f(x) - x$ .

2. (a)  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  parce que  $f$  l'est, ainsi que la fonction  $x \mapsto -x$ .

On a  $h'(x) = f'(x) - 1$ . Comme, pour tout  $x$ ,  $f'(x) \leq 0$ , on a  $h'(x) < 0$ ,  $h$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Remarque : il n'y avait donc pas à expliciter  $h'(x)$ .

(b) On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ , donc  $\lim_{-\infty} h = +\infty$ .

D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ , donc  $\lim_{+\infty} h = -\infty$ .

- $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ;
- $h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ ;
- $\lim_{-\infty} h = +\infty$  et  $\lim_{+\infty} h = -\infty$ .

Le théorème de la bijection permet d'affirmer que  $h$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, il existe un unique élément  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $h(\alpha) = 0$ . Comme les équations  $f(x) = x$  et  $h(x) = 0$  sont équivalentes, on peut conclure que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$ .

On trouve  $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \approx 0,3$  (l'énoncé fournit  $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,8$ ), et

$h(1) = f(1) - 1 \approx -0,3$  (l'énoncé fournit  $f(1) \approx 0,7$ ).

Comme  $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$  et  $h(1) < 0$ , on a  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ , donc  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

3. (a)  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Donc, pour tout élément  $x$  de  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , on a  $f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ . Mais l'énoncé fournit  $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,8$ , et  $f(1) \approx 0,7$ , donc  $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1$  et  $f(1) \geq \frac{1}{2}$ , et ceci entraîne  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ . Ainsi, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

N.B: au prix d'un petit travail, il aurait été possible de se passer des indications de l'énoncé (ce n'est évidemment pas ce qu'il convenait de faire un jour de concours).

En effet, on trouve  $f(1) = \frac{2}{e}$ , et  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4\sqrt{e}}$ .

On sait que  $2 < e < 3$ . Il en résulte, d'une part, que  $\frac{2}{3} < \frac{2}{e}$ , d'où  $\frac{1}{2} < \frac{2}{e}$ , c'est-à-dire  $f(1) < 1$ .

Il en résulte d'autre part, que  $\sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$ , donc  $\frac{5}{4\sqrt{e}} > \frac{5}{4 \times 2} = \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ .

**(b)** On a  $f'(x) = -(1-x)^2 e^{-x}$ . Pour tout élément  $x$  de  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , on a  $0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2}$ , d'où  $0 \leq (1-x)^2 \leq \frac{1}{4}$ .

Comme  $0 < e^{-x} \leq 1$  (car  $x \geq 0$ ), on a  $0 \leq (1-x)^2 e^{-x} \leq \frac{1}{4}$ . On voit alors que  $f'(x) \leq 0$ , et

$$|f'(x)| = (1-x)^2 e^{-x} \leq \frac{1}{4}.$$

Appliquant alors l'inégalité des accroissements finis à la fonction  $f$ , et aux éléments  $x$  de  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  et  $\alpha$ , on a, puisque  $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$ . Mais  $f(\alpha) = \alpha$ , et finalement,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation valable pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**4. (a)** On montre, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . Puisque  $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , l'énoncé est vrai pour  $n = 0$ .

Si l'on suppose que, pour un entier  $n \geq 0$ , quelconque,  $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , alors, par **3 (a)**,  $f(u_n) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , l'énoncé est donc encore vrai pour l'entier  $n + 1$ , ce qui permet de conclure que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

**(b)** Faisant  $x = u_n$  dans **3 (b)**, on obtient  $|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ . Comme  $f(u_n) = u_{n+1}$ , on a ainsi

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

On montre ensuite, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .

Comme  $\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ , on a  $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 |u_0 - \alpha|$ , l'énoncé est donc vrai pour  $n = 0$ .

On suppose alors que, pour un entier  $n \geq 0$ , quelconque, on a  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .

De  $\begin{cases} |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha| \end{cases}$ , on déduit  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ , c'est-à-dire  $|u_{n+1} - \alpha| \leq$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

On voit alors que l'énoncé est donc encore vrai pour l'entier  $n + 1$ , et l'on peut ainsi conclure que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ .

Comme  $-1 < \frac{1}{4} < +1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|\right) = 0$ . Le théorème de

l'encadrement entraîne alors ( $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ ) que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ .

**(c)** On construit.

### EXERCICE 3

On dispose de deux urnes  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$ .

L'urne  $\mathcal{U}_1$  contient 20 boules dont une rouge et 19 blanches.

L'urne  $\mathcal{U}_2$  contient 20 boules dont 3 rouges et 17 blanches.

On désigne par "partie" le protocole suivant :

On choisit une urne de manière équiprobable, puis on tire une boule de cette urne et on note sa couleur, enfin on remet la boule tirée dans l'urne dont elle provient.

1. Ici on effectue une seule partie.

(a) Si l'on note  $U_i$ , pour  $i = 1$  ou  $2$ , l'évènement "l'urne choisie est l'urne  $\mathcal{U}_i$ " (noter la différence de graphie), les évènements  $U_1$  et  $U_2$  forment un système complet d'évènements. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire  $P(R) = P_{U_1}(R)P(U_1) + P_{U_2}(R)P(U_2)$ .

Comme le choix d'une urne se fait de manière équiprobable, on a  $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$ .

Puisque l'urne  $\mathcal{U}_1$  contient 20 boules dont une rouge et 19 blanches, on a  $P_{U_1}(R) = \frac{1}{20}$ .

Puisque l'urne  $\mathcal{U}_2$  contient 20 boules dont 3 rouges et 17 blanches, on a  $P_{U_2}(R) = \frac{3}{20}$ .

On a donc  $P(R) = \frac{1}{20} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{20} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ .

(b) On cherche la probabilité d'avoir choisi l'urne  $\mathcal{U}_1$  lorsqu'on a tiré une boule rouge, c'est-à-dire  $P_R(U_1)$ . La formule des probabilités composées permet d'écrire  $P_R(U_1) = \frac{P(R \cap U_1)}{P(R)} = \frac{P_{U_1}(R)P(U_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{20} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{4}$ .

2. Effectuer un tirage, et examiner si la boule tirée est rouge, constitue un épreuve de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{10}$ . Puisque la boule tirée est remise dans l'urne après chaque tirage, les 40 épreuves de Bernoulli sont (mutuellement) indépendantes. On sait alors que la variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de fois où il a obtenu la couleur rouge au cours de ces 40 parties suit la loi binomiale de taille 40 et de paramètre  $\frac{1}{10}$ .

On a donc  $X(\Omega) = \llbracket 0, 40 \rrbracket$ , et, pour tout élément de  $\llbracket 0, 40 \rrbracket$ ,  $P(X = k) = \binom{40}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{40-k}$ , ce qu'on

peut écrire sous la forme  $P(X = k) = \binom{40}{k} \frac{9^{40-k}}{10^{40}}$ .

(b) Le nombre de fois où, en moyenne, le joueur obtient la couleur rouge en 40 parties est l'espérance de  $X$ . On a  $E(X) = 40 \times \frac{1}{10} = 4$ .

(c) On doit savoir qu'on peut, sous certaines conditions, approcher la loi binomiale de taille  $n$  et de paramètre  $p$  par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np$  (de sorte que les espérances de la loi binomiale et de la loi de Poisson soient égales). Dans les conditions de l'énoncé, et compte-tenu de (b), il convient de choisir  $\lambda = 4$ .

On cherche alors la probabilité que le joueur ait obtenu au moins deux fois la couleur rouge au cours de ces 40 parties, c'est-à-dire  $P(X \geq 2)$ . Or  $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ .

Compte tenu de la table fournie par l'énoncé, on obtient  $P(X \geq 2) = 1 - 0,018 - 0,073$ , c'est-à-dire  $P(X \geq 2) = 0,909$ .

3. Dans cette question le joueur répète les parties en remettant à chaque fois la boule tirée dans son urne d'origine, jusqu'à ce qu'il obtienne la couleur rouge pour la 1<sup>ère</sup> fois.

Soit  $Y$  le rang de la partie où il obtient pour la 1<sup>ère</sup> fois la couleur rouge.

(a)  $Y$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{10}$ . On doit savoir, ou savoir retrouver, que  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ , et, pour tout élément  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $P(Y = k) = \frac{1}{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$ .

(b) On doit savoir que l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$  vaut  $\frac{1}{p}$  et sa variance vaut  $\frac{1-p}{p^2}$ . On a donc  $E(Y) = 10$ , et  $V(Y) = \frac{\frac{9}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 90$ .

## EXERCICE 4

1. Préliminaires :

On considère une variable aléatoire  $Y$  qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(a) "la densité usuelle" ? Il y a deux densités "usuelles" d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, à savoir les fonctions  $g$  et  $f$  définies ci-dessous.

$$(i) \begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ g(t) = e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}, \text{ et } (ii) \begin{cases} h(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ h(t) = e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

( $g$  et  $h$  ne diffèrent que par leur valeur en 0).

On choisira, par exemple la fonction  $g$  comme densité "usuelle" de  $Y$ .

Rappel : à partir d'une densité  $g$  d'une variable aléatoire, on peut définir une infinité de densités de cette même variable aléatoire. Il suffit pour cela de changer, de manière arbitraire, la valeur de la fonction  $g$  en un nombre fini de points.

Quelle que soit la densité choisie, on trouve que  $E(Y) = 1$ , et  $V(Y) = 1$  (on doit savoir que l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  vaut  $\frac{1}{\lambda}$  et sa variance vaut  $\frac{1}{\lambda^2}$ ).

(b) Pas très joli ce "en déduire". Il a justement fallu, en cours, montrer que l'intégrale proposée converge, et calculer sa valeur pour répondre à la question précédente.

La réponse attendue par l'auteur de l'énoncé était que, puisque  $E(Y) = 1$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt$  converge, avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt = 1$ . De plus,  $g$  étant nulle sur  $]-\infty, 0[$ , ceci entraîne que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} tg(t) dt$  converge, avec  $\int_0^{+\infty} tg(t) dt = 1$ . Autrement dit (pour tout  $t \geq 0$ ,  $tg(t) = te^{-t}$ ), l'intégrale  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$  converge, avec  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$ .

2. (a)  $f$  est nulle sur  $]-\infty; 0[$ , donc continue sur  $]-\infty; 0[$ .  $f$  est continue sur  $[0; +\infty[$  comme composée de fonctions continues.

De plus,  $f$  étant nulle sur  $]-\infty; 0[$ , on a  $\lim_{0^-} f = 0 = f(0)$ ,  $f$  est donc continue à gauche de 0. Il en résulte que  $f$  est donc aussi continue en  $x = 0$ , et donc, continue sur  $\mathbb{R}$ .

$f$  est nulle sur  $]-\infty; 0[$ , donc positive sur  $]-\infty; 0[$  (N.B.: on utilise généralement le mot "positif" pour dire "positif ou nul", on dit alors "strictement positif" si besoin est, pour distinguer; la raison en est que les relations d'ordre "large" sont plus fréquemment utilisées que les relations d'ordre "strict").

Pour tout  $t \geq 0$ ,  $e^{-t} > 0$ , donc  $te^{-t} \geq 0$ .

Finalement,  $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ .

(b) On a vu que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$  converge, avec  $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$ .

Puisque  $f$  est nulle sur  $]-\infty; 0[$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge, avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$ .

En résumé :

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , et possède donc un nombre fini (égal à 0) de points de discontinuités);
- $f$  est positive sur  $\mathbb{R}$ ;
- l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge, avec  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$  En utilisant le préliminaire, montrer que  $f$  est une densité.

On peut alors conclure que  $f$  est une densité de probabilité.

3. (a) On a (c'est la définition de la notion de fonction de répartition), pour tout réel  $x$ ,  $F(x) = P(X \leq x)$ .

Puisque  $X$  admet  $f$  pour une densité de probabilité, on a  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .

Puisque  $f$  est nulle sur  $]-\infty; 0[$ , pour tout  $x > 0$ ,  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$  converge, et est nulle, c'est-à-dire que  $F(x) = 0$ .

De plus, pour  $x \geq 0$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x te^{-t} dt$ .

Pour calculer cette intégrale, on effectue une intégration par parties, en posant

On effectue une intégration par parties, en posant :  $\begin{cases} u(t) = t \text{ d'où } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t}, \text{ avec } v(t) = -e^{-t} \end{cases}$  (les fonctions  $u$  et  $v$  étant dérivables, à dérivées continues). On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^x t e^{-t} dt &= \int_0^x u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t) v(t) dt \\ &= [t \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x 1 \times (-e^{-t}) dt = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt \end{aligned}$$

Comme  $\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x$ , on a

$$\int_0^x t e^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^x + [-e^{-t}]_0^x = [-(t+1)e^{-t}]_0^x = 1 - (x+1)e^{-x}$$

En résumé,

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) On a  $P(X \leq 2) = F(2) = 1 - 3e^{-2}$  (on ne peut faire mieux sans données de valeurs particulières).

D'autre part,  $P_{X \leq 2}(X > 1) = \frac{P((X > 1) \cap (X \leq 2))}{P(X \leq 2)} = \frac{P(1 < X \leq 2)}{P(X \leq 2)}$ .

Comme  $(X \leq 2) = (X \leq 1) \cup (1 < X \leq 2)$  et les événements  $(X \leq 1)$  et  $(1 < X \leq 2)$  étant incompatibles, on a  $P(X \leq 2) = P(X \leq 1) + P(1 < X \leq 2)$ , d'où  $P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1)$ .

Comme  $F(2) = 1 - 3e^{-2}$  et  $F(1) = 1 - 2e^{-1}$ , on a  $P(1 < X \leq 2) = 2e^{-1} - 3e^{-2}$ .

Donc  $P_{X \leq 2}(X > 1) = \frac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{1 - 3e^{-2}}$ .

4. (a) Pour calculer cette intégrale, on effectue une intégration par parties, en posant

On effectue une intégration par parties, en posant cette fois :  $\begin{cases} u(t) = t^2 \text{ d'où } u'(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-t}, \text{ avec } v(t) = -e^{-t} \end{cases}$  (les fonctions  $u$  et  $v$  étant dérivables, à dérivées continues). On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^x t^2 e^{-t} dt &= \int_0^x u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t) v(t) dt \\ &= [t^2 \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x 2t \times (-e^{-t}) dt = [-t^2 e^{-t}]_0^x + 2 \int_0^x t e^{-t} dt \end{aligned}$$

Comme  $[-t^2 e^{-t}]_0^x = -x^2 e^{-x}$ , on a :

$$\int_0^x t^2 e^{-t} dt = -x^2 e^{-x} + 2 \int_0^x t e^{-t} dt.$$

(b) On sait (croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles) que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ .

D'autre part, on a vu que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$  converge, avec  $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1$ , et ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t e^{-t} dt = 1$ .

Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_0^x t^2 e^{-t} dt \right) = 2$ .

Or, l'existence de  $E(X)$  est équivalente à la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ , et, en cas de convergence,

on a  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ . Puisque  $f$  est nulle sur  $]-\infty, 0[$ , La convergence de cette intégrale est équivalente à

celle de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ , c'est-à-dire de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ . On vient justement de voir que cette dernière intégrale converge, et vaut 2.

On peut alors conclure que  $X$  admet une espérance, et  $E(X) = 2$ .