

EXERCICE 1

Dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.a. On trouve $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $k \geq 3$, on peut écrire $N^k = N^3 N^{k-3}$, et $N^3 = 0$ (matrice nulle), donc $N^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. De $N = A - I$ résulte $A = N + I$. Comme I et N commutent ($NI = IN = N$), la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$A^n = (I + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k.$$

Soit $n \geq 2$. Pour $k \geq 2$, on a $N^k = 0$, la somme écrite ci-dessus se réduit donc à trois termes, ceux qui correspondent à $k = 0, 1, 2$, et

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2, \text{ c'est-à-dire } A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

Effectuant, on trouve :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Faisant $n = 0$ dans cette dernière expression, il vient $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la formule est ainsi vraie pour $n = 0$.

Faisant $n = 1$ dans la même expression, il vient $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la formule est ainsi vraie pour $n = 1$.

La formule $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2.a. Remarque : la méthode du pivot ne sert pas, ici, à "montrer que A est inversible". A est triangulaire, sans aucun zéro sur sa diagonale, A est donc inversible.

On utilise alors la méthode du pivot de Gauss pour montrer, calculer A^{-1} .

Les pivots successifs seront portés en gras.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \text{ Par } L_1 \leftarrow L_1 - L_2, \text{ on obtient :}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \text{ Par } \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{cases}, \text{ on obtient :}$$

1	0	0	1	-1	1
0	1	0	0	1	-1
0	0	1	0	0	1

On a alors prouvé que la matrice A est inversible, avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Faisant $n = -1$ dans la formule obtenue en **1.b.**, il vient $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (noter que

$\frac{(-1)(-1-1)}{2} = 1$), la formule est ainsi vraie pour $n = -1$.

La formule $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est donc vraie pour tout entier $n \geq -1$.

On souhaite alors déterminer les expressions des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) définies par :

$$x_0 = 1, y_0 = 1 \text{ et } z_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$$

3.a. Puisque, pour tout entier $n \geq 0$, $z_{n+1} = z_n$, la suite (z_n) est constante. On a donc, pour tout entier $n \geq 0$, $z_n = z_0 = 1$.

b. Il résulte de **a.** et de la définition des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) que, pour tout entier $n \geq 0$, $y_{n+1} = y_n + 1$, la suite (y_n) est donc arithmétique, de raison 1.

Puisque $y_0 = 1$, on a, pour tout entier naturel n , $y_n = y_0 + n = n + 1$.

4. Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. On a $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les relations $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}$ sont équivalentes à l'unique égalité matricielle $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}. \text{ Or } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_{n+1} \text{ et } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_n, \text{ et}$$

l'on a donc $X_{n+1} = AX_n$.

b. On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n : $X_n = A^n X_0$.

Pour $n = 0$, la formule s'écrit $X_0 = A^0 X_0$, et elle est vraie, puisque $A^0 = I$.

On suppose que, pour un entier $n \geq 0$, quelconque, on a $X_n = A^n X_0$.

Alors $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$. On voit que la formule est encore vraie pour l'entier $n + 1$, et l'on peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

c. On a $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1 \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On voit, en particulier que $x_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

ainsi que la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = t(1 - t)$.

1.a. On a, pour tout élément t de $[0; 1]$, $f(t) = t - t^2$. f est dérivable sur $[0; 1]$ en tant que fonction polynôme, et $f'(t) = 1 - 2t$. On en déduit le tableau des variations de f :

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(t)$		+	-
f	0	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$

b. On montre, par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

L'énoncé est, par hypothèse, vrai pour $n = 0$, puisque $u_0 = \frac{1}{2} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

On suppose alors que, pour un entier $n \geq 0$, quelconque, $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Il résulte de l'étude des variations de f que, pour tout élément t de $[0; 1]$, $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{4}$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$,

on a donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$, d'où $u_{n+1} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

L'énoncé est donc encore vrai pour l'entier $n + 1$, et ceci permet de conclure que, pour tout entier naturel n , $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

c. On montre, par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, c'est-à-dire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Puisque $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, l'énoncé est vrai pour $n = 0$: $u_1 \leq u_0$.

On suppose ensuite que, pour un entier $n \geq 0$, quelconque, $u_{n+1} \leq u_n$. Comme u_n et u_{n+1} sont deux éléments de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, et que f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on a alors $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$. Mais $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, et l'on a donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. L'énoncé est donc encore vrai pour l'entier $n + 1$.

On peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq u_n$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Remarque : l'énoncé demande de prouver la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Puisque $u_0 = \frac{1}{2}$, et que, pour tout n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$, on pouvait s'attendre à ce que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante, sans même qu'il soit nécessaire de calculer u_1 (en fait, $u_1 = \frac{1}{4} < u_0$).

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et minorée par 0 (puisque, pour tout n , $0 \leq u_n$).

Le théorème de convergence monotone permet de conclure que suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

d. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il en est de même de la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Mais $u_{n+1} = f(u_n) = u_n(1 - u_n)$. Les théorèmes généraux sur les limites (*réduction alternative* : on peut utiliser la continuité de la fonction f) entraînent que la suite $(u_n(1 - u_n))_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l(1 - l)$.

Par comparaison, on a $l = l(1 - l)$.

Mais l'équation $l = l(1 - l)$ est équivalente à $l = l - l^2$, d'où $l^2 = 0$, d'où encore $l = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une valeur l , qui ne peut être égale qu'à 0. Donc $l = 0$.

En conclusion, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2.a. Puisque, pour tout k , $u_{k+1} = u_k(1 - u_k) = u_k - u_k^2$, on a $u_k - u_{k+1} = u_k^2$.

b. On a $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}$. Mais $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} = \sum_{k=1}^n u_k$, donc

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_0 - u_n$. Comme $u_0 = \frac{1}{2}$, il vient finalement, pour tout entier naturel non n :

$$S_n = \frac{1}{2} - u_n.$$

c. Il s'agit de justifier que **(i)** pour tout entier naturel k , $p_k \geq 0$; **(ii)** la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k$ converge, avec $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Or, **(i)** est clair. D'autre part, pour tout entier $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} p_k = 2 \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 = 2S_n = 2 \left(\frac{1}{2} - u_n \right) = 1 - 2u_n$.

Puisqu'on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k \right) = 1$, c'est-à-dire que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k$ converge, avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1.$$

On peut alors conclure que la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une loi de probabilité.

EXERCICE 3

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.

On lance le dé et on observe son résultat :

Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.

Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de PILES apparus au cours de cette expérience.

1.a. Le dé étant équilibré, tous les résultats des lancers du dé sont équiprobables, et X suit donc la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, c'est-à-dire que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et, pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$.

b. On doit, en principe savoir que, lorsqu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a $E(X) = \frac{n+1}{2}$, et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$. Faisant $n = 6$, on trouve $E(X) = \frac{7}{2}$, et $V(X) = \frac{35}{12}$.

Rappel rapide : Soit X suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{n+1}{12} [2(2n+1) - 3(n+1)]$$

$$\text{d'où, après simplification } V(X) = \frac{n+1}{12} (n-1) = \frac{n^2-1}{12}.$$

2. L'événement $(Y = 2)$ entraîne $(X = 6)$ (si l'on a obtenu deux PILES, c'est que le lancer du dé a fourni un 6), donc $(Y = 2) = (Y = 2 \cap X = 6)$. La formule des probabilités composées permet alors d'écrire

$P(Y = 2) = P(Y = 2 \cap X = 6) = P(X = 6) P_{X=6}(Y = 2)$. D'une part, $P(X = 6) = \frac{1}{6}$, et, d'autre part, $P_{X=6}(Y = 2)$ est la probabilité d'obtenir deux PILES lorsqu'on lance deux fois une pièce de monnaie, donc $P_{X=6}(Y = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
Donc $P(Y = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

3.a. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_{X=k}(Y = 0)$ est la probabilité de n'obtenir aucun PILE lorsqu'on lance une pièce de monnaie. Ainsi, $P_{X=k}(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

b. $P_{X=6}(Y = 0)$ est la probabilité de n'obtenir aucun PILE lorsqu'on lance deux fois une pièce de monnaie. Donc $P_{X=6}(Y = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Les événements $(X = k)$ forment, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un système complet d'événements. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire $P(Y = 0) = \sum_{k=1}^6 P_{X=k}(Y = 0) P(X = k)$.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_{X=k}(Y = 0) P(X = k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, donc

$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^5 P_{X=k}(Y = 0) P(X = k) = \frac{5}{12}$, tandis que $P_{X=6}(Y = 0) P(X = 6) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$, donc $P(Y = 0) = \frac{5}{12} + \frac{1}{24} = \frac{11}{24}$.

c. L'énoncé attend visiblement qu'on calcule $P(Y = 1)$ en utilisant le fait que $P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 1$, d'où $P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 2) = 1 - \frac{11}{24} - \frac{1}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.
En résumé, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, et

$$P(Y = 0) = \frac{11}{24}, \quad P(Y = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 2) = \frac{1}{24}$$

Remarque : l'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas la vérification qui consiste à effectuer le calcul de la somme $P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$. Esquissions un calcul direct.

$P(Y = 1) = \sum_{k=1}^6 P_{X=k}(Y = 1) P(X = k)$. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_{X=k}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ (c'est la probabilité d'obtenir un PILE lorsqu'on lance une pièce de monnaie). On a aussi $P_{X=6}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ (c'est la probabilité d'obtenir deux PILES lorsqu'on lance deux fois une pièce de monnaie, c'est-à-dire d'obtenir PILE suivi de FACE - probabilité $\frac{1}{4}$, ou FACE suivi de PILE - probabilité $\frac{1}{4}$)

Donc $P(Y = 1) = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, et l'on peut alors vérifier que $P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 1$.

On trouve alors $E(Y) = 0 \times P(Y = 0) + 1 \times P(Y = 1) + 2 \times P(Y = 2) = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{24} = \frac{7}{12}$

4.a. Tableau de la loi conjointe du couple (X, Y)

$Y \setminus X$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	0	0	0	0	0	$\frac{1}{24}$

Détail des calculs

Selon un usage répandu, on notera $P(X = i, Y = j)$ pour $P(X = i \cap Y = j)$.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P(X = k, Y = 0) = P(X = k) P_{X=k}(Y = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$;

$P(X = 6, Y = 0) = P(X = 6) P_{X=6}(Y = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P(X = k, Y = 1) = P(X = k) P_{X=k}(Y = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$;

$P(X = 6, Y = 1) = P(X = 6) P_{X=6}(Y = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$;

pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P(X = k, Y = 2) = 0$ (l'événement $(X = k \cap Y = 2)$ est impossible, lançant une pièce, on ne peut obtenir deux PILES)

Enfin $P(X = 6, Y = 2) = P(Y = 2) = \frac{1}{24}$ (voir plus haut).

b. On a $E(XY) = \sum i \times j P(X = i, Y = j)$, la somme portant sur tous les couples (i, j) , pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$. Tous les termes correspondant à $j = 0$ (6 termes) sont nuls. 5 des 6 termes $P(X = i, Y = 2)$, ceux correspondant à $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sont nuls, ainsi qu'on le voit dans le tableau ci-dessus.

Il reste donc à calculer une somme de 7 termes.

On a $E(XY) = \sum_{k=1}^6 k \times 1 P(X = k, Y = 1) + 6 \times 2 P(X = 6, Y = 2)$.

Mais $\sum_{k=1}^6 k P(X = k, Y = 1) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^6 k = \frac{7}{4}$, donc $E(XY) = \frac{7}{4} + 12 \times \frac{1}{24} = \frac{9}{4}$.

Il en résulte que $cov(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y) = \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{5}{24}$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction réelle définie par :
$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ ou } t > 2 \\ f(t) = \frac{1}{2}t & \text{si } t \in [0; 2] \end{cases}$$

1.a. f étant nulle sur $]-\infty; 0]$, on a $\lim_{0^-} f = 0 = f(0)$. De plus, $\lim_{0^+} f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}t\right) = 0$. On a donc $\lim_{0^+} f = f(0)$

$(= 0)$, f est donc continue en 0.

f est clairement positive ou nulle sur \mathbb{R} .

f étant nulle sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. f étant polynomiale sur $]1, 2[$ est continue sur $]1, 2[$.

Comme f est continue en $x = 0$, f est continue sur \mathbb{R} , sauf peut-être en $x = 2$. f possède donc un nombre fini de points de discontinuité.

On peut noter que $\lim_{2^-} f = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{2}t\right) = 1$, et $\lim_{2^+} f = 0$, f n'est pas continue en $x = 2$.

Soit, enfin, $A > 2$. f étant nulle sur $]-\infty; 0]$ et sur $]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^A f(t) dt$ converge, avec

$$\int_{-\infty}^A f(t) dt = \int_0^A f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^A f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^2 = 1.$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

En résumé,

- f est clairement positive ou nulle sur \mathbb{R} .
- f possède un nombre fini, égal à 1 de points de discontinuité, avec $\lim_{2^-} f = 1$, et $\lim_{2^+} f = 0$.

- L'intégrale $\int_{-\infty}^A f(t) dt$ converge, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

f est donc une densité de probabilité.

b. On note désormais X une variable de densité f , et on note F sa fonction de répartition.

Par définition de la notion de fonction de répartition, on a $F(x) = P(X \leq x)$, donc $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Pour $x \leq 0$, on a $f(t) = 0$ pour tout $t \leq x$, donc $F(x) = 0$.

Si $0 < x \leq 2$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}t dt = \left[\frac{1}{4}t^2 \right]_0^x = \frac{1}{4}x^2$.

Enfin, si $x > 2$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^2 \frac{1}{2}t dt = \left[\frac{1}{4}t^2 \right]_0^2 = 1$. (remarque : ceci découle aussi de ce que, vu le cas où $0 < x \leq 2$, on a $F(2) = 1$, et de ce que F est croissante sur \mathbb{R}).

En résumé,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(F est continue sur \mathbb{R} en tant que fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, toutes les inégalités peuvent alors être choisies au sens large).

c. On a $P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{4}$.

De même, $P\left(\frac{1}{2} < X \leq 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

Enfin, lorsqu'on demande de justifier que $X(\Omega) =]0; 2]$, on demande de prouver que $P(0 < X \leq 2) = 1$. Or, $P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = 1$, ce qui prouve le résultat.

2. On a $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$, sous réserve que cette dernière intégrale converge, ce qui est le cas, puisque f est nulle en dehors de $[0; 2]$.

$$\text{Donc } E(X) = \int_0^2 tf(t) dt = \int_0^2 t \times \frac{1}{2}t dt = \left[\frac{1}{6}t^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Soient U la variable aléatoire définie par $U = X^2$ et G sa fonction de répartition.

3. On a $(0 < X \leq 2) = (0 < X^4 \leq 4) = (0 < U \leq 4)$, donc $U(\Omega) =]0; 4]$.

Il en résulte que, si $x \leq 0$, on a $P(U \leq 0) = 0$, c'est-à-dire $G(x) = 0$. De même, si $x > 4$, $P(U > x) = 0$, d'où $G(x) = 1 - P(U > x) = 1$.

4.a. On a $(U \leq 2) = (X^2 \leq 2) = (-\sqrt{2} \leq X \leq \sqrt{2})$.

On en déduit que $G(2) = P(U \leq 2) = P(X \leq \sqrt{2}) - P(X < -\sqrt{2})$. $P(X < -\sqrt{2}) = 0$, et donc

$$G(2) = F(\sqrt{2}) = \frac{1}{4}(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}.$$

b. Plus généralement, on a, comme plus haut, pour $x \in]0; 4]$, $G(x) = P(U \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) - P(X < -\sqrt{x})$, et $P(X < -\sqrt{x}) = 0$, donc $G(x) = F(\sqrt{x}) = \frac{1}{4}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{4}x$.

c. On rappelle que la fonction G , fonction de répartition de la variable aléatoire U , est une fonction croissante de \mathbb{R} dans $[0; 1]$.

On voit, de plus, que $G(0) = 0$ et $G(4) = 1$. Il en résulte que

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

On reconnaît alors que U suit la loi uniforme sur $[0; 4]$ (si on ne le reconnaît pas, on peut toujours dériver f là où elle est dérivable, c'est-à-dire en tout point de $\mathbb{R} - \{0, 4\}$).

d. On peut savoir que l'espérance d'une variable aléatoire Z qui suit la loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ (où $a \leq b$) vaut $\frac{a+b}{2}$. Si on ne le sait pas, on le retrouve, dans ce cas particulier, par $E(U) = \int_0^4 tg(t) dt$, où $g(t) = \frac{1}{4}$ pour $t \in [0; 4]$. On trouve $E(U) = 2$.

Ainsi, $E(X^2) = 2$, et l'on en déduit que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Remarque : beaucoup de travail pour peu de choses. On a, de manière directe,

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^2 t^2 \times \frac{1}{2} dt = \left[\frac{1}{6}t^3\right]_0^2 = 2$, sans que la variable aléatoire U présente une quelconque utilité.

ESC 2011, Voie Technologique.

EXERCICE 1

On note : $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1.a. Montrer par la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1} .

b. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités qui seront appelées **A, B, C**.

On considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable l'une des deux autres activités.

Le premier jour (c'est-à-dire le jour 1), le client choisit l'activité **B**.

On notera A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement "le client choisit l'activité **A** le jour n " (respectivement **B, C**) et on notera a_n (respectivement b_n, c_n) sa probabilité.

On définit également la matrice U_n par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, ainsi $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.a. Par une formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = MU_n$.

b. En utilisant la relation obtenue en **1.b.** en déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{cases} a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

EXERCICE 2

Dans tous les calculs et expressions, la lettre "e" désigne l'exponentielle de 1. On donne $e \approx 2,7$.

1.a. Montrer que pour tout réel x , $x^2 - xe + e > 0$.