1.a. En séparant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, calculer l'expression $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$.

b. De quelle loi usuelle reconnaît-on la fonction de répartition et la densité ?

On considère dès lors une variable aléatoire X de fonction de répartition F et de densité f, et on définit la variable aléatoire Y par la relation $Y = \dfrac{1}{2}X$.

2.a. Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.

b. Montrer que Y admet pour fonction de répartition la fonction G donnée par :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ 1 - e^{-2y} & \text{si} \quad y \geq 0 \end{cases}.$$

c. En déduire que Y suit une loi usuelle et en donner une densité g.

Dans toute la suite de l'exercice la fonction g désigne la densité usuelle de Y.

3. Dans le cadre du suivi des coupures d'électricité dans une ville donnée, on s'intéresse à la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 2f(t) - g(t)$.

a. Vérifier que $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$.

b. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que h est une densité.

On considère alors une variable aléatoire Z de densité h, modélisant le temps d'attente en heures après une coupure d'électricité jusqu'à rétablissement du courant.

4.a. Montrer que $E(Z) = 2E(X) - E(Y)$.

En déduire le temps moyen s'écoulant avant le rétablissement du courant.

b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{-t} - e^{-2t}\, dt$ et en déduire que $P(Z \leq \ln 2) = \dfrac{1}{4}$.

ESC 2011, Voie Technologique. Corrigé

EXERCICE 1

1.a. Par la méthode du pivot de Gauss, on montre que P est inversible, et l'on calcule P^{-1}.

Les pivots successifs seront portés en gras.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\left|\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$. Par $\begin{cases} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$, on obtient :

$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|$. Par $L_2 \longleftrightarrow L_3$, on obtient :

$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right|$. Par $\begin{cases} L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$, on obtient :

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$. Par $\begin{cases} L_1 \longleftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \longleftarrow 3L_2 + 2L_3 \end{cases}$, on obtient :

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ Enfin, par $\begin{cases} L_1 \longleftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \longleftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \longleftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{cases}$ on obtient :

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$. On a ainsi prouvé que P est inversible, avec :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b. On trouve $PD = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis

$PDP^{-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $PDP^{-1} = M$.

2.a. Soit n un entier naturel non nul.
Les événements A_n, B_n et C_n forment clairement un système complet d'événements (c'est-à-dire qu'ils sont deux à deux incompatibles, et que leur réunion est certaine). La formule des probabilités totales permet donc d'écrire

$$\begin{cases} P(A_{n+1}) & = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ P(B_{n+1}) & = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ P(C_{n+1}) & = P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \end{cases}$$

Mais, puisque "on considère que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain et choisit de manière équiprobable l'une des deux autres activités", on a
$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) = 0$ ("que si le jour n le client a choisi une activité, il en change systématiquement le lendemain"), et
$P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$.
De plus, $P(A_{n+1}) = a_{n+1}$, $P(B_{n+1}) = b_{n+1}$, $P(C_{n+1}) = c_{n+1}$, $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$, $P(C_n) = c_n$.

Les trois formules écrites plus haut fournissent donc : $\begin{cases} a_{n+1} & = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} & = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} & = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases}$

et ces relations s'écrivent matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$U_{n+1} = MU_n$.

b. On montre, par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $U_n = \frac{1}{3}PD^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $n = 1$, la formule s'écrit $U_1 = \frac{1}{3}PD^0\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $U_1 = \frac{1}{3}P\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (par convention, $D^{0\cdot} = I$, matrice-unité d'ordre 3) (*rappel : écrire la formule qu'il faut prouver, ça n'est pas la prouver)*.
Mais, puisque le premier jour, le client choisit l'activité **B** , on a $a_1 = c_1 = 0$, et $b_1 = 1$ (l'événement B_1 est

certain, c'est une donnée de l'énoncé), donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Or, on trouve $P \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U_1$, la formule est donc vraie pour $n = 1$.

On suppose ensuite que, pour un entier $n \geq 1$, quelconque, on a $U_n = \dfrac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De **2.b.** et de la relation $M = PDP^{-1}$ on déduit alors que $U_{n+1} = MU_n = \left(PDP^{-1}\right) \left(\dfrac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \dfrac{1}{3} PDP^{-1}PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $DP^{-1}PD^{n-1} = DID^{n-1} = D^n$, on a $U_{n+1} = \dfrac{1}{3} PD^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On voit que la formule est encore vraie pour l'entier $n + 1$, et l'on peut alors conclure que, pour tout entier $n \geq 1$, $U_n = \dfrac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Effectuant, on trouve $D^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$, puis

$U_n = \dfrac{1}{3} PD^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$, et il en résulte que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

(formule qu'il est aisé de vérifier pour $n = 1$).

EXERCICE 2

1.a. Le discriminant Δ du trinôme du second degré $x^2 - xe + e$ est égal à $\Delta = e^2 - 4e = e\,(e - 4)$. Comme $0 < e < 4$, on a $0 < e - 4 < 0$, donc $\Delta < 0$. La règle qui donne le signe du trinôme permet alors de conclure que, pour tout réel x, $x^2 - xe + e > 0$.

b. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $P\,(x) = 2x^2 - (2e)\,x + e^2 - 2e$.
Le discriminant du trinôme $P\,(x)$ vaut $(-2e)^2 - 4 \times 2 \times \left(e^2 - 2e\right) = -4e^2 + 16e = 4e\,(4 - e)$. Puisque $0 < e < 4 - e$, on a $4e\,(4 - e) > 0$, et le trinôme $P\,(x)$ admet donc les deux racines distinctes $\dfrac{1}{2}e - \dfrac{1}{2}\sqrt{-e^2 + 4e}$ et $\dfrac{1}{2}e + \dfrac{1}{2}\sqrt{-e^2 + 4e}$ (noter que $\sqrt{-4e^2 + 16e} = \sqrt{4\,(-e^2 + 4e)} = 2\sqrt{-e^2 + 4e}$) . Comme l'énoncé donne $\alpha \approx 0,4$; $\beta \approx 2,3$ (indication malheureusement située en fin d'énoncé), α est la plus petite des racines, et β la plus grande. Puisqu'il est clair que $\dfrac{1}{2}e - \dfrac{1}{2}\sqrt{-e^2 + 4e} < \dfrac{1}{2}e + \dfrac{1}{2}\sqrt{-e^2 + 4e}$, on doit choisir $\alpha = \dfrac{1}{2}e - \dfrac{1}{2}\sqrt{-e^2 + 4e} \approx 0,4$ et $\beta = \dfrac{1}{2}e + \dfrac{1}{2}\sqrt{-e^2 + 4e} \approx 2,3$.
Puisque $2 > 0$ (2 est le coefficient dominant de $P\,(x)$, c'est-à-dire du terme de plus haut degré de $P\,(x)$), la règle qui donne le signe du trinôme permet d'affirmer que :

- pour tout élément x de $]-\infty; \alpha[\cup]\beta; +\infty[$, $P\,(x) > 0$;
- pour tout élément x de $]\alpha; \beta[$, $P\,(x) < 0$;

• $P(\alpha) = P(\beta) = 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \ln\left(x^2 - xe + e\right)$.

2.a. On trouve $f(0) = 1 - \ln e = 0$; $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$; $(e-1)^2 - (e-1)e + e = \left(e^2 - 2e + 1\right) - \left(e^2 - e\right) + e = 1$, d'où $f(e-1) = 1 - \ln 1 = 1$, $f(e) = 1 - \ln\left(e^2 - e^2 + e\right) = 1 - \ln e = 0$.
En résumé,

$$f(0) = 0; \quad f(1) = 1; \quad f(e-1) = 1; \quad f(e) = 0$$

De plus, $\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \left(\frac{e}{2}\right)e + e = \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{2} + e = e - \frac{e^2}{4} = e\left(1 - \frac{e}{4}\right)$, d'où $\ln\left(e\left(1 - \frac{e}{4}\right)\right) = \ln e + \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right) = 1 + \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$, et $f\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - \left(1 + \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)\right) = -\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - xe + e\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
de même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2 - xe + e\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

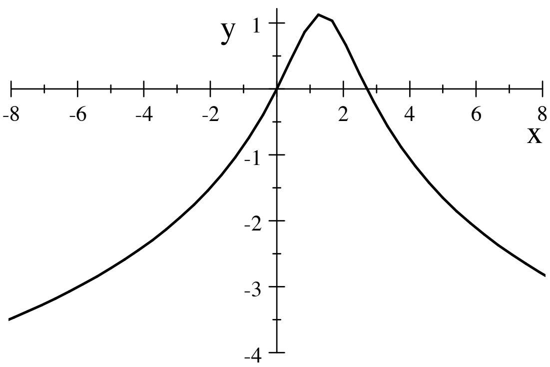
b. On trouve $f'(x) = -\dfrac{2x - e}{x^2 - xe + e} = \dfrac{e - 2x}{x^2 - xe + e}$. Comme, pour tout x, $x^2 - xe + e > 0$, $f'(x)$ est du signe de $e - 2x$, c'est-à-dire que :
• pour tout $x < \frac{e}{2}$, $f'(x) > 0$;
• $f'\left(\frac{e}{2}\right) = 0$;
• pour tout $x > \frac{e}{2}$, $f'(x) < 0$.
On trouve, de plus, $f'(0) = \dfrac{e}{e} = 1$, et $f'(x) = \dfrac{e - 2e}{e^2 - e \times e + e} = \dfrac{-e}{e} = -1$.

c. Suivant les données de l'énoncé, on a $e - 1 \approx 1,7$, $\dfrac{e}{2} \approx 1,35$, ce qui permet d'ordonner les nombres $0, 1, e-1, e, \dfrac{e}{2}$: on a $0 < 1 < \dfrac{e}{2} < e - 1 < e$.
<u>Tableau des variations de f</u>

x	$-\infty$		0		1		$e/2$		$e-1$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$f(e/2)$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. On trouve :
$$f''(x) = \frac{\left(x^2 - xe + e\right) \times (-2) - (2x - e)(e - 2x)}{\left(x^2 - xe + e\right)^2} = \frac{2x^2 - 2ex + e^2 - 2e}{\left(x^2 - xe + e\right)^2}$$
c'est-à-dire $f''(x) = \dfrac{P(x)}{\left(x^2 - xe + e\right)^2}$, avec $P(x) = 2x^2 - 2ex + e^2 - 2e$.
Comme, pour tout x, $\left(x^2 - xe + e\right)^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $P(x)$. Or, on a vu en **1.b.** que $P(x)$ s'annule *et change de signe* (ne pas oublier !) en $x = \alpha$ et en $x = \beta$. $\mathcal{C}_f$ admet donc les deux points d'inflexion $I_1(\alpha; f(\alpha))$ et $I_2(\beta; f(\beta))$.

4. *Allure de la courbe d'équation* $y = 1 - \ln\left(x^2 - xe + e\right)$



Compléments

(i) Calcul de $f(\alpha)$ et $f(\beta)$

Si, ici, x désigne l'un des deux nombres α et β obtenus plus haut comme étant les racines de $P(x)$ (*rappel :* $\alpha = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\sqrt{-e^2+4e}$ et $\beta = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}\sqrt{-e^2+4e}$), on a $2x^2 - 2ex + e^2 - 2e = 0$.

Il en résulte que $2x^2 - 2ex = 2e - e^2$, d'où

$$\begin{aligned} x^2 - xe + e &= \frac{1}{2}\left(2x^2 - 2ex\right) + e = \frac{1}{2}\left(2e - e^2\right) + e = \frac{1}{2}\left(4e - e^2\right) \\ &= 2e\left(1 - \frac{e}{4}\right) \end{aligned}$$

On obtient alors $\ln\left(x^2 - xe + e\right) = \ln\left[2e\left(1 - \frac{e}{4}\right)\right] = \ln 2 + 1 + \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$ ($\ln e = 1$) , et enfin, $f(x) = 1 - \left(\ln 2 + 1 + \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)\right) = -\ln 2 - \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$.

Ainsi $f(\alpha) = f(\beta) = -\ln 2 - \ln\left(1 - \frac{e}{4}\right) \approx 0,45$.

(ii) Branches infinies de $\mathcal{C}_f$

On a, pour tout x non nul, $x^2 - xe + e = x^2\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right)$, d'où $\ln\left[x^2\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right)\right] = \ln x^2 + \ln\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right)$ ($\ln x^2$ doit se lire $\ln\left(x^2\right)$ et non $(\ln x)^2$). Il convient d'éviter le brutal $\ln x^2 = 2\ln x$ qui crée un certain malaise lorsque $x < 0$. En fait, on a $\ln x^2 = \ln|x|^2$ (car, pour tout x, $x^2 = |x|^2$), d'où $\ln x^2 = 2\ln|x|$, et $\ln\left[x^2\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right)\right] = 2\ln|x| + \ln\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right)$.

On peut alors écrire que

$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x} - 2\frac{\ln|x|}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right)$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right) = 1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right) = 0$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{e}{x} + \frac{e}{x^2}\right) = 0$; de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, et l'on sait (cours) que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln|x|}{x} = 0$.il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, et $\mathcal{C}_f$ admet donc, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction Ox.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, et $\mathcal{C}_f$ admet donc aussi, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction Ox.

EXERCICE 3

1.a. Pour chaque client, le fait de choisir, ou non, le forfait $n°1$ constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ (il "achète un de ces trois forfaits au hasard, avec équiprobabilité" - NDLR : c'est drôlement crédible !). Ces épreuves sont indépendantes ("sans être influencé par les choix des autres clients" - NDLR : c'est plus crédible, quand même !). Parmi n clients, la variable aléatoire X_1 égale au nombre de ceux qui ont choisi le forfait $n°1$ suit donc la loi binomiale de taille n et de paramètre $\frac{1}{3}$.

On a donc $X_1(\Omega) = [\![0,n]\!]$, et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X_1 = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, ce qu'on peut écrire sous la forme $P(X_1 = k) = \binom{n}{k}\frac{2^{n-k}}{3^n}$.

En résumé,

$$\begin{cases} X_1(\Omega) = [\![0,n]\!] \\ \text{pour tout } k \in X_1(\Omega), \quad P(X_1 = k) = \binom{n}{k}\frac{2^{n-k}}{3^n} \end{cases}$$

b. On doit savoir que l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) et de paramètre p ($p \in]0,1[$) est égale à np, et sa variance est égale à $np(1-p)$.

On a donc $E(X_1) = \frac{n}{3}$, et $V(X_1) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$.

c. *Il suffit de recopier la réponse à la question* **1.a.** *en changeant* "forfait $n°1$" *en* "forfait $n°j$", *et* X_1 *par* X_j, *où* j *prend n'importe quelle valeur dans l'ensemble* $\{1, 2, 3\}$. *Ainsi :*

Pour chaque client, le fait de choisir, ou non, le forfait $n°j$ constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$ (il "achète un de ces trois forfaits au hasard, avec équiprobabilité"). Ces épreuves sont indépendantes ("sans être in□uencé par les choix des autres clients"), les mêmes remarques que plus haut étant faites quant à la crédibilité des hypothèses. Parmi n clients, la variable aléatoire X_j égale au nombre de ceux qui ont choisi le forfait $n°j$ suit donc la loi binomiale de taille n et de paramètre $\frac{1}{3}$ (ouf !).

2.a. Puisque chaque client achète un forfait (aucun ne repart de la boutique en disant qu"'il va ré□échir"), on a $X_1 + X_2 + X_3 = n$, d'où $X_1 + X_2 = n - X_3$. On a donc $V(X_1 + X_2) = V(n - X_3) = V(X_3) = \frac{2n}{9}$ *(rappel :* si X est une variable aléatoire admettant une variance, alors, pour tous réels a et b, $V(aX + b) = a^2V(X)$).
b. On doit savoir que $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2cov(X_1, X_2)$.
Il en résulte que $cov(X_1, X_2) = \frac{1}{2}(V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2))$. Puisque $V(X_1 + X_2) = V(X_1) = V(X_2) = \frac{2n}{9}$, il vient

$$cov(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}$$

On doit aussi savoir que, si les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, leur covariance est nulle (*rappel :* la réciproque est fausse). Or, $cov(X_1, X_2) = -\frac{n}{9} \neq 0$ (à condition, toutefois, que le nombre n de clients ne soit pas nul). X_1 et X_2 ne sont donc pas indépendantes.

3. Les X_1 clients ayant choisi le forfait $n°1$ versent, chaque mois, en euros, une somme égale à $10X_1$.
Les X_2 clients ayant choisi le forfait $n°2$ versent, chaque mois, en euros, une somme égale à $20X_1$.
Les X_3 clients ayant choisi le forfait $n°3$ versent, chaque mois, en euros, une somme égale à $30X_1$.
La somme globale mensuelle en euros H, versée par ces n clients à l'opérateur est donc $H = 10X_1 + 20X_2 + 30X_3$.
La linéarité de l'espérance permet alors d'écrire que $E(H) = 10E(X_1) + 20E(X_2) + 30E(X_3)$. Comme $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{n}{3}$, on obtient $E(H) = 20n$.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$.

1.a. Cas où $x < 0$

Alors ($]-\infty; x] \subset]-\infty; 0[$), pour tout élément t de $]-\infty; x]$, $f(t) = 0$, donc $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0$.

Cas où $x \geq 0$

Puisque f est nulle sur $]-\infty; 0[$, pour $x \geq 0$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{0}^{x} f(t)\, dt = \int_{0}^{x} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x}$.

En résumé, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

Remarque : et l'on peut, en fait, écrire, si on le souhaite, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

b. Au vu de l'expression donnée ci-dessus, on doit reconnaître que f est une densité, et F la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

On considère dès lors une variable aléatoire X de fonction de répartition F est de densité f, et on définit la variable aléatoire Y par la relation $Y = \frac{1}{2}X$.

2.a. Puisque X suit la loi exponentielle de paramètre 1, on doit savoir que $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$ (plus généralement, si une variable aléatoire suit loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on doit savoir que son espérance vaut $\dfrac{1}{\lambda}$, et sa variance vaut $\dfrac{1}{\lambda^2}$).
On doit aussi savoir que, pour tout réel a, $E(aX) = aE(X)$, et $V(aX) = a^2V(X)$.
Puisque $Y = \dfrac{1}{2}X$, on a donc $E(Y) = \dfrac{1}{2}E(X) = \dfrac{1}{2}$, et $V(Y) = \dfrac{1}{4}V(X) = \dfrac{1}{4}$.

b. Soit G la fonction de répartition de Y. On a, pour tout réel y, $G(y) = P(Y \leq y)$, et $(Y \leq y) = \left(\dfrac{1}{2}X \leq y\right) = (X \leq 2y)$, donc $G(y) = P(X \leq 2y) = F(2y)$.
Comme le signe de $2y$ est le même que celui de y, il résulte de **1.a.** que :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0 \\ 1 - e^{-2y} & \text{si} \quad y \geq 0 \end{cases}.$$

c. Compte-tenu de **b.**, on reconnaît que Y suit la loi exponentielle de paramètre 2, loi dont une densité g est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{-2t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

Remarque : G est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. On retrouve l'expression de g en dérivant G sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et en donnant une valeur arbitraire à g en 0, étant entendu qu'en pratique, on attribue à $g(0)$ une valeur qui la rende "la moins discontinue possible", $g(0) = 0$ (g est alors continue à gauche de 0, et discontinue à droite de 0), ou $g(0) = 1$ (g est alors discontinue à gauche de 0, et continue à droite de 0).

Dans toute la suite de l'exercice la fonction g désigne la densité usuelle de Y.

3. Dans le cadre du suivi des coupures d'électricité dans une ville donnée, on s'intéresse à la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 2f(t) - g(t)$.

a. Que dire ? On vérifie, en effet, que $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$.

b. h est nulle sur $]-\infty; 0[$, donc continue sur $]-\infty; 0[$. h est continue sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues.
De plus, h étant nulle sur $]-\infty; 0[$, on a $\lim\limits_{0^-} h = 0$, tandis que $\lim\limits_{0^+} h = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(2e^{-t} - 2e^{-2t}\right) = 0$; donc $\lim\limits_{0} h = 0 = h(0)$, h est donc continue en $t = 0$, et, en définitive, h est continue sur $\mathbb{R}$ (*rédaction alternative :* h étant nulle sur $]-\infty; 0[$, on a $\lim\limits_{0^-} h = 0 = h(0)$, tandis que h est continue à droite de 0 comme composée de fonctions continues à droite de 0, h est donc continue en 0).
Il convient ensuite de comprendre "h est positive sur $\mathbb{R}$" comme signifiant "h est positive *ou nulle* sur $\mathbb{R}$".
Or, h étant nulle sur $\mathbb{R}$, est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, pour $t \geq 0$, on a $2t \geq t$, donc, la fonction $x \longmapsto e^{-x}$étant décroissante sur $\mathbb{R}$, $e^{-t} \geq e^{-2t}$, et l'on en déduit que $2e^{-t} - 2e^{-2t} \geq 0$, c'est-à-dire $h(t) \geq 0$. Finalement, pour tout réel t, $h(t) \geq 0$.

c. On sait déjà que h est continue sur $\mathbb{R}$, et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
On sait aussi que f est une densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre 1, et que, donc, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge, avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$. De même g est une densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre 2, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt$ converge, avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = 1$. Comme, pour tout t, $h(t) = 2f(t) - g(t)$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt$ converge, avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = 2 - 1 = 1$.
En résumé,
• h est continue sur $\mathbb{R}$;

• h est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;
• l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt$ converge, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\ dt = 1$.
On peut alors conclure que h est une densité de probabilité.

On considère alors une variable aléatoire Z de densité h, modélisant le temps d'attente en heures après une coupure d'électricité jusqu'à rétablissement du courant.

4.a. On vient de remarquer que $h = 2f - g$.
On sait, d'autre part, que X admet une espérance, avec $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt = 1$, et que Y admet une espérance, avec $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\ dt = \frac{1}{2}$ (*rappel :* l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est égale à $\frac{1}{\lambda}$).
Puisque, pour tout t, $th(t) = 2tf(t) - tg(t)$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\ dt$ converge, avec $\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\ dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt - \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\ dt = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire que $E(Z) = \frac{3}{2}$.

Le temps moyen s'écoulant avant le rétablissement du courant est égal à $E(Z)$, donc à $1h\,30\,mn$ (= $\frac{3}{2}$ heures).

b. On a $\int_0^{\ln 2} \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\ dt = \left[-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} - \frac{1}{2} + 1$; comme $e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$, et $e^{-2\ln 2} = \frac{1}{e^{2\ln 2}} = \frac{1}{e^{\ln 4}} = \frac{1}{4}$, on obtient $\int_0^{\ln 2} \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\ dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{8}$.
Il en résulte que $P(Z \leq \ln 2) = \int_{-\infty}^{\ln 2} h(t)\ dt = \int_0^{\ln 2} h(t)\ dt = 2\int_0^{\ln 2} \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\ dt = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

ESC 2012, Voie Technologique. Corrigé

BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Conception : ESC CHAMBERY

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Vendredi 10 MAI 2012 de 8 h à l2 h

N.B.

Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.