501320

VÉRY

ROMAIN

14/07/2005

Note de délibération : 18.73 / 20

Numéro d'inscription 501320

Né(e) le 14/07/2005

Nom VERY

Prénom (s) ROMAIN

18.73 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/06

Numéro de table 039

Exercice 2 :

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée)

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^{n+2} e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o(1)$ (par croissance comparée)

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ $\div t^2 > 0$.

Comme $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ alors par comparaison de fonctions positives (car $t^n e^{-t} \geq 0$), comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann $\alpha = 2 > 1$) donc $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge également et par continuité sur $[0,1]$ de $t \mapsto t^n e^{-t}$ on a $\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ qui converge.}}$

b) $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$

Calculons I_0.

Soit $A \geq 0$.

$\int_0^A e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A$

$= -e^{-A} + e^{-0}$

Pour $A \to +\infty$, $-e^{-A} \to 0$ donc on en déduit que

$\boxed{I_0 = 1}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.73 / 20

$I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t}\, dt$

Calculons I_1.

~~Soit $A \geq 0$~~

~~$\int_0^A t e^{-t}\, dt$~~.

$t \mapsto t e^{-t}$ est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par composition de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc on peut établir une intégration par parties :

Soit $A \geq 0$.

$$\int_0^A t e^{-t}\, dt = \left[-t e^{-t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-t}\, dt$$

$$= -A e^{-A} + \cancel{0 \times e^{-0}} + \left[-e^{-t}\right]_0^A$$

$$= -A e^{-A} + \cancel{0 \times e^{-0}} - e^{-A} + e^{-0}$$

Pour $A \to +\infty$, $-A e^{-A} \to 0$ (par croissance comparée) et $-e^{-A} \to 0$ donc on en déduit que

$$\boxed{I_1 = 1}$$

2) Soit $x \geq 0$. $\forall t \geq 0$, $1 + xt \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+xt} \leq 1 \quad \text{par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t} \quad \times e^{-t} \geq 0$$

Comme $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+xt}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ alors par comparaison de fonctions positives $\left(\frac{e^{-t}}{1+xt} \geq 0\right)$ comme $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = I_0$ converge (d'après question 1. b) alors $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \text{ converge également.}}$

3) $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = I_0 = 1}$

4) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $x \leq y$.

$$\Rightarrow 1 + xt \leq 1 + yt \quad \Big\downarrow t \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-t}}{1+xt} \geq \frac{e^{-t}}{1+yt} \quad \Big\downarrow \text{par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } e^{-t} \geq 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \geq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+yt}\,dt \quad \Big\downarrow \text{par continuité des deux fonctions et par croissance de l'intégrale}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) \geq F(y)}$$

On en déduit que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5) a) • Si $x = 0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \int_0^1 1\,dt = [t]_0^1 = 1$

• Si $x > 0$, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \left[\frac{1}{x}\ln(1+xt)\right]_0^1$ (bien défini car $x > 0$)

$$= \frac{1}{x}\Big(\ln(1+x) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big)$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

b) Soit $x \geq 0$. $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leq e^{-t} \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{1}{1+xt} \quad \Big\downarrow \div\, 1+xt > 0$$

$$\boxed{\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt} \quad \Big\downarrow \text{par croissance de l'intégrale}$$

c) Soit $x>0$. $\forall t \geq 1$, $xt \geq x \geq 0$

$$\Rightarrow 1+xt \geq x \geq 0$$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+xt} \leq \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq \frac{e^{-t}}{x}$$ $\times e^{-t} \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,dt$$ par croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt \leq \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$$

d) D'après la question 5. a, $\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$

d'où par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\,dt = 0$.

Ainsi, par encadrement (5.b), $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = 0$

De plus, on a $\frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

Soit $A \geq 1$.

$$\frac{1}{x}\int_1^A e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\left[-e^{-t}\right]_1^A = \frac{1}{x}\left(-e^{-A}+e^{-1}\right)$$

Pour $A \to +\infty$, $\frac{1}{x}\int_1^A e^{-t}\,dt = \frac{1}{xe}$.

D'où, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = 0$.

Ainsi, par encadrement $\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = 0$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\,dt$ (d'après la relation de Chasles).

Numéro d'inscription 501320

Né(e) le 14/07/2005

Signature

Nom VERY

Prénom (s) ROMAIN

18.73 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐1 ou ☐2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02/06

Numéro de table 039

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$

6) Soit $x \geqslant 0$, $F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt$

par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1-(1-xt)(1+xt))}{1+xt}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(xt)^2}{1+xt}\,dt$$

$$= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt$$

On conclut que : Soit $x \geqslant 0$, $f(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}\,dt$

b) Soit $x \geqslant 0$.

On a $-I_0 + xI_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt + x\int te^{-t}\,dt$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)\,dt$$

d'où, d'après la question précédente,

$$F(x) - I_0 + xI_1 = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-t}}{1+xt}$$

Or, on a : Soit $x \geqslant 0$, $\forall t \geqslant 0$,

$$1 + xt \geqslant 1$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.73 / 20

$$\Rightarrow x^2\frac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leq x^2t^2e^{-t}$$ par décroissance de $t\mapsto\frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x^2t^2e^{-t}\geq 0$.

$$\Rightarrow x^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leq x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt$$ par croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2$$

D'autre part, pour $t\in\mathbb{R}_+$ et $x\geq 0$,

$$\frac{x^2t^2e^{-t}}{1+xt}\geq 0$$ par croissance de l'intégrale

$$\Rightarrow x^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-t}}{1+xt}\geq 0$$

$$\Rightarrow F(x) - I_0 + xI_1 \geq 0$$

Ainsi on en déduit que :

$\boxed{\text{Soit } x\geq 0 \text{ et } t\in\mathbb{R}_+,\quad 0\leq F(x) - I_0 + xI_1 \leq x^2 I_2}$

7) a) D'après l'inégalité précédente, on en déduit que :

$x\geq 0,\qquad I_0 - xI_1 \leq F(x) \leq I_0 - xI_1 + x^2I_2.$

Ainsi, par encadrement,

$\lim_{x\to 0} F(x) = I_0 = 1.$

d'où $F(x) \underset{x\to 0}{=} I_0 - xI_1 + o(x)$

$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)}$

b) On pose le taux de variation de f en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x+o(x)-1}{x} = -1+o(1)$$

On en déduit que f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0)=-1$

8)

<u>Exercice 1 :</u>

1) $E_{O_3} = \left\{ C\times O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\times C = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \mid C\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$

$E_{I_3} = \left\{ CI_3 + I_3C = 2C = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \mid C\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$

2) * $E_C \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

* $C\times O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\times C = O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ donc $O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\in E_C$ et $E_C\neq\emptyset$

* $\forall(\lambda, M, N)\in \mathbb{R}\times E_C^2$, $C(\lambda M+N)+(\lambda M+N)C = \lambda(CM+MC)+CN+NC$

car $(M,N)\in E_C^2$ $= \lambda\times O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$= O_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

Donc $(\lambda M+N)\in E_C$.

Ainsi E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

3) Soit $M \in E_A$.

On a donc que : $AM + MA = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow {}^t(AM + MA) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow {}^tM{}^tA + {}^tA{}^tM = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ linéarité de la transposée

$\Rightarrow {}^tMA + A{}^tM = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow A{}^tM + {}^tMA = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ car A est symétrique

On en déduit que ${}^tM \in E_A$.

4) a) A est diagonalisable car A est symétrique

b) $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ est non inversible

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda^2-\lambda-4 & 2(1-\lambda) \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ $(1-\lambda)L_1 + 2L_2$ est non inversible

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda-4 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}$ est non inversible

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ non inversible $(\lambda^2-\lambda-4)L_2 - 2L_3$

$* = (\lambda^2-\lambda-4)(-1-\lambda) - 4(1-\lambda) = -\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + \lambda^2 + 4 + 4\lambda - 4 + 4\lambda$

$= -\lambda^3 + 9\lambda$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3+9\lambda \end{pmatrix}$ non inversible

Numéro d'inscription 501320

Né(e) le 14/07/2005

Signature

Nom VÉRY

Prénom (s) ROMAIN

18.73 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/06

Numéro de table 039

$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 9\lambda = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^3 - 9\lambda = 0}$

c) On résout l'équation pour trouver les valeurs propres de A :

$\lambda^3 - 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$

Ainsi, $Sp(A) = \{-3, 0, 3\}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3}(A) \Leftrightarrow AX = -3X$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3x \\ -2x + 2z = -3y \\ 2y - z = -3z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 4y + 4z = 0 \quad (L_1 + 2L_2) \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.73 / 20

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \quad (\text{car } 2L_3 = L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ y = z \end{cases}$$

On en déduit que $E_{-3} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ car $\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forme une base E_{-3} (vecteur unique et $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \Leftrightarrow AX = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y = z \end{cases}$$

On en déduit que $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ car $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de E_0 (vecteur unique et $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

$X \in E_3(A) \Leftrightarrow AX = 3X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 3x \\ -2x + 2z = 3y \\ 2y - z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y = 0 \\ -2x-3y+2z=0 \\ 2y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3y+2z=0 \\ -2x-2y = 0 \\ 2y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3y+2z=0 \\ -y+2z=0 \quad L_1-L_2 \\ 2y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-3y+2z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y=-2z \\ y=2z \end{cases}$$

On en déduit que $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ car $\left(\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $E_3(A)$ (vecteur unique et $\neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$).

Finalement, A vérifie $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ inversible}$$

par concaténation des bases de sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A.

5) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 8 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

On cherche X tel que $PX = Y$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = a \\ 2x + y + 2z = b \\ 2x + 2y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = a \\ 3y - 6z = 2a - b \\ 2y - 5z = 2a - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = a \\ 3y - 6z = 2a - b \\ z = -\frac{2a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = a \\ y = -\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b + 2c \\ z = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3}a + b - c \\ y = -\frac{2}{3}a - \frac{5}{3}b + 2c \\ z = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b + c \end{cases}$$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -5/3 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$

6) a)

Numéro d'inscription: 501320

Né(e) le: 14/07/2005

Nom: VÉRY

Prénom (s): ROMAIN

Signature

18.73 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04 / 06

Numéro de table 039

Commencez à composer dès la première page.

6) a) $N \in \mathcal{E}_D \iff DN + ND = 0_3$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = 0_3$$

$$\iff a = b = d = f = h = i = 0.$$

$$\boxed{\text{d'où } N \in \mathcal{E}_D \text{ si et seulement si } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $N = \cancel{c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + e \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + g \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

$\mathcal{E}_D = \left\{ DN + ND = 0_3 \mid N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (c, e, g) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ d'après question précédente.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.73 / 20

$$= \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right)$$

Montrons que $((e_1, e_2, e_3))$ est une famille libre.
On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_3$
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = 0_3$

d'où on obtient immédiatement que : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ainsi la famille est libre et de cardinal égale à 3 donc elle forme une base de E_D de $\dim(E_D) = 3$

Exercice 3 :

Partie I :

1) * Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i est continue sur $\mathbb{R}$ sauf eventuellement en 1 par composition de fonctions telles.

* $\forall x \geq 1, \forall i \in [\![1,n]\!], f_i(x) = \frac{i}{x^{i+1}} \geq 0$

$\forall x < 1, \forall i \in [\![1,n]\!], f_i(x) = 0 \geq 0$

Ainsi, f_i est positive sur l'intervalle.

* Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f_i(x)\,dx = 1$ (car nulle hors de $[1,+\infty[$)

Soit $A \geq 1$.

$\int_1^A f_i(x) = \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}} dx = \cancel{i \int_1^A x^{-(i+1)} dx}$

$= \int_1^A \frac{i}{x^{i+1}} dx$

Numéro d'inscription 501320

Né(e) le 14/07/2005

Nom VÉRY

Prénom (s) ROMAIN

18.73 / 20

Signature

Ecricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05/06

Numéro de table 079

$$= i \int_1^A x^{-(i+1)}\, dx$$

$$= i \left[-\frac{x^{-i}}{i} \right]_1^A$$

$$= i \left(-\frac{A^{-i}}{i} + \frac{1}{i} \right)$$

Pour $A \to +\infty$, $-A^{-i} \to 0$ donc on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, dx = 1$.

Ainsi, f_i est bien une densité de probabilité.

2) a) X_i admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{ix}{x^{i+1}}\, dx$ converge absolument (car nulle hors de $[1;+\infty[$ et donc converge car positif).

Or, $\int_1^{+\infty} ix^{-i}\, dx$ converge si et seulement si $i > 1$.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.73 / 20

Ainsi, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ X_i admet une espérance.

$\forall i \in [\![2, n]\!]$, soit $A \geq 1$. $\displaystyle\int_1^A i x^{-i} \, dx$

$$= i \left[\frac{x^{-i+1}}{-i+1} \right]_1^A$$

$$= \frac{i}{1-i} \left(A^{-i+1} - 1 \right)$$

Pour $A \to +\infty$, $\dfrac{i A^{-i+1}}{1-i} \to 0$ donc $\boxed{E(X_i) = -\dfrac{i}{1-i}}$

b) ~~$\forall i \in [\![2, n]\!]$, $1 - i \geq 1 - (i+1)$~~
~~$\Rightarrow -\dfrac{1}{1-i} \geq -\dfrac{1}{1-(i+1)}$~~ ~~par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x-1$.~~

~~et on a en outre~~ : $\forall i \in [\![2, n]\!]$,

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \; E(X_{i+1}) - E(X_i) = \frac{-(i+1)}{1-(i+1)} + \frac{i}{1-i}$$

$$= \frac{(1-i)(-i-1) - i^2}{-(1-i)i}$$

$$= \frac{-i}{-(1-i)i}$$

$$= \frac{1}{1-i} \leq 0 \quad \text{car } i > 1$$

$\Rightarrow \forall i \in [\![2, n]\!]$, $E(X_{i+1}) \leq E(X_i)$

Ainsi, on en déduit que la catégorie socioprofessionnelle (CSP) 2 a le revenu mensuel moyen le plus important puis la CSP 3 a le second revenu moyen et ainsi de suite jusqu'à la n-ème CSP qui a le plus faible revenu moyen mensuel.

~~3) On sait que là où fi est continue~~

3) $\forall x \geq 1, \quad F_i(x) = i\int_1^x \frac{1}{t^{i+1}}\,dt = \left[-t^{-i}\right]_1^x$

$$= -x^{-i} + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{x^i}$$

$\forall x < 1, \quad F_i(x) = \int_x^1 0 = 0.$

$$\boxed{\text{d'où : } F_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}}$$

4) U est à valeurs dans $]0, 1[$ donc on a :

$$0 < U < 1$$

$$\Rightarrow 0 < U^{1/i} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{U^{1/i}} > 1$$

$$\Rightarrow V_i > 1.$$

Ainsi V_i est à valeurs dans $]1 ; +\infty[$.

$\forall x < 1, \quad F_{V_i}(x) = 0$

$\forall x \geq 1, \quad F_{V_i}(x) = P(V_i \leq x)$

$$= P\left(\frac{1}{U^{1/i}} \leq x\right)$$

$$= P\left(U^{-1/i} \leq x\right)$$

$= P(U \geq x^{-i})$ ↓ par décroissance de $x \mapsto x^{-i}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$= 1 - P(U \leq x^{-i})$

↓ car $x > 1$

$= 1 - x^{-i}$

$= 1 - \frac{1}{x^i}$

On obtient que : $F_{V_i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^i} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

On en déduit que V_i suit la même loi que X_i car $F_{V_i} = F_{X_i}$.

b)
```
def simulX(i):
    U = rd.random()
    Vi = 1/U**(1/i)
    return Vi
```

Partie II :

5)
```
def simulY(n,p):
    c=0
    for k in range(n-1):
        if rd.random() < p:
            c=c+1
    return c+1
```

6)
```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0]*n
    for k in range(N):
```

Numéro d'inscription I01320

Né(e) le 14/07/2005

Nom VERY

Prénom (s) ROMAIN

18.73 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques Appliquées

Sujet 1 ou 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 06/06

Numéro de table 039

```
        Y = simulY(n,p)
        loi[   Y   ] += n
    return loi
```

7) ~~import matplotlib.pyplot as plt~~
~~def diag(p,n):~~
~~X = np.~~
~~Y =~~

7)
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def diag(n,p):
    X = np.range(simulY(n,p))
    Y = np.range(loiY(n,p))
    plt.bar(X, Y)
    plt.show()
```

8) a) la clé primaire doit permettre d'identifier la bonne table en vérifiant le fait qu'elle soit unique.

b) Pour la table individu ce serait i-choice ; pour la

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

18.73 / 20

table departement ce serait d_numero ; pour la table profession ce serait p_pcs.

c) i_nom
i_prenom
i_departement (clé étrangère)
i_insee (clé primaire)
i_code_profession (clé étrangère)

d_numero (clé primaire)
d_nom
d_population

p_pcs (clé primaire)
p_categorie
p_intitule

d) SELECT DISTINCT p_pcs
FROM profession INNER JOIN departement ON d_numero = p_pcs
WHERE d_numero = 28

e) SELECT p_categorie
FROM

Partie III :

3)