ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 2000

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 3 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice 1

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tout nombre réel x on associe la matrice

$$M(x) = I + x.A + \frac{x^2}{2}.A^2 \qquad (1)$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n.
2. Calculer en utilisant (1) le produit $M(x)M(y)$ et montrer que
$$M(x)M(y) = M(x+y) \qquad (2)$$
3. Montrer que pour tout entier positif n : $(M(x))^n = M(nx)$. reconnaître $M(0)$.
4. Ecrire les matrice $M(x)$ et $(M(x))^n$ sous forme de tableaux.
5. Justifier l'inversibilité de la matrice $M(x)$ sans chercher à calculer son inverse.
6. Déterminer l'inverse de $M(x)$ en n'utilisant que la relation (2)
7. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire sous forme de tableaux les matrices B^{-1} et B^n.
8. Retrouver la valeur de B^{-1} en utilisant la méthode du pivot.

Exercice 2

1. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
   Trois personnes ont convenu de se retrouver à la gare pour emprunter le même train de banlieue.
   L'origine des temps est prise à 17 h et l'unité de temps est l'heure.
   Pour k appartenant à $\{1,2,3\}$, on désigne par Y_k l'heure d'arrivée de la personne numéro k. On suppose que les trois variables Y_k sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[0,1]$ (ce qui signifie que les trois personnes arrivent au hasard entre 17 h et 18 h).

2. On note X la variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée de la **dernière** personne (qui n'est pas forcément la personne numéro 3 !).

   (a) Soit t un réel appartenant à $[0,1]$.
   Exprimer l'événement $(X \leqslant t)$ en fonction des événements $(Y_1 \leqslant t), (Y_2 \leqslant t), (Y_3 \leqslant t)$.

   (b) En déduire la fonction de répartition de X que l'on notera G.

   (c) Déterminer une densité de X et l'espérance de X.

3. Les personnes peuvent emprunter trois trains à 17 h 20, 17 h 40 et 18 h (ce qui correspond, dans le repère de temps choisi, aux instants $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ et 1).
   Pour j appartenant à $\{1,2,3\}$ on appelle E_j l'événement : "les trois personnes prennent le $j^{ème}$ train ".
   Exprimer l'événement E_j à l'aide de la variable aléatoire X puis calculer sa probabilité.

4. On désigne par A l'événement : " La première personne arrivée attend moins de 20 minutes avant de monter dans le train avec ses amis.

   (a) Exprimer les événements $A \cap E_1, A \cap E_2, A \cap E_3$ en fonction des variables Y_1, Y_2, Y_3.

   (b) Déterminer alors la probabilité de A.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

1. (a) Montrer que le domaine de définition de f est l'intervalle $]0, e^2]$.
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
3. Montrer que l'image par f de l'intervalle $[1, e]$ est contenue dans l'intervalle $[1, e]$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1, e]$.
   (On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$).
5. Comment obtenir graphiquement un valeur approchée de a au moyen de la courbe tracée au 2) ?
6. On considère la suite définie par récurrence pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Montrer à l'aide de l'inégalités des accroissements finis que :

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - a|$$

   (b) Déterminer un entier n tel que

$$|u_n - a| \leqslant 10^{-3}$$

   (c) Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

FIN DE L'EPREUVE